А К А Д Е М І Я Н А У К У К Р А Ї Н И
Інститут математики

На правах рукопису

ГАЛІЦИН Анатолій Степанович

ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕЯКИХ СПЕЦІАЛЬНИХ РЕЖИМІВ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСУ

01.01.03 - математична фізика

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1993

Робота виконана в Інституті математики АН України

Офіційні опоненти:

член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор ЛУКОВСЬКИЙ І.О.,

доктор фізико-математичних наук, професор ЛІТВИНОВ В.Г.,

доктор технічних наук, професор НІКИТЕНКО М.І.

Провідна організація:
Київський університет ім. Т.Г.Шевченка

Захист відбудеться 21 Травня 1993 р. о 15 годині на засіданні Спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601 Київ - 4, МСП, вул. Терещенківська, 3; FAX: (044) 225 20 10.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано 1993 р.

Вчений секретар
Спеціалізованої ради,
доктор фізико-математичних наук,
професор ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Посеред задач математичної фізики задачі математичної теорії тепло- і масопереносу посідають особливе місце. Сьогодні важко назвати галузь техніки, від створення підземних спецспоруд до об'єктів ракетно-космічного призначення, в якій би розв'язки цих задач не мали значного теоретичного, практичного і, як наслідок, економічного інтересу. В багатьох випадках знання динаміки температурного поля є необхідним вихідним моментом як для подальшого розв'язання конструктивно-технологічних проблем, так і для створення нових матеріалів з заданими фізико-механічними характеристиками. Як правило, вони вимагають удосконалення існуючих або розробки нових, більш адекватних, математичних моделей спеціальних режимів нестаціонарного тепломасопереносу, бо вимоги до точності визначення показників цих процесів невпинно зростають. Тому аналітична теорія переносу енергії і речовини з часу її створення і до цього часу залишається актуальною науковою дисципліною з численними застосуваннями. Останні є одним з джерел постановок нових змістовних математичних задач і послужили спонукальним мотивом для досліджень, результати яких подаються в дисертації.

Проблеми, що увійшли до кола досліджуваних в роботі, можна умовно поділити на три групи:

1. Нелінійні сингулярно збурені спряжені початково-граничні задачі для системи рівнянь з частинними похідними, що описують теплову конвекцію в обмеженому об'ємі в'язкої нестисливої і термічно неоднорідної рідини в перехідному і турбулентному режимах.

2. Необмежені розв'язки лінійного, інваріантног відносно групи Галілея $G(1,m)$ (m - розмірність простору), поліпараболічного рівняння з ітерованими класичним операторами теплопровідності, що описують три типи режимів з загостренням з скінченною і нескінченною швидкостями поширення температурних збурень.

3. Лінійні і нелінійні істотно неоднорідні задачі для інтегро-диференціального еволюційного рівняння спеціального виду, що описує процеси переносу енергії в середовищах з врахуванням їх теплової історії (теплової пам'яті), з некласичними граничними умовами, які містять диференціальні і інтегральні оператори по часу.

Відносно першої групи питань необхідно зауважити наступне.

Будучи одночасно гідродинамічними і теплофізичними, процеси теплової конвекції можуть бути описані системою пов'язаних нелінійних рівнянь, яка виводиться із глобальних законів збереження маси, імпульсу і енергії. Задачі для найбільш ідеалізованих з них в теоретичному плані є одними з на складніших в математичній фізиці: навіть у випадку чисто гідродинамічних рівнянь Нав'є-Стокса для деяких тривимірних задач доведені лише локальні (для малих значень часу) теореми існування та єдиності розв'язку (О.О.Ладиженська, О.П.Осколков, В.А.Солонніков, В.І.Юдович, Р.М.Уховський, Е.Хопф, М.К.Головкін, А.О.Кисельов, П.Є.Соболєвський); однозначна розв'язність в цілому (на довільному проміжку часу) доведена О.О.Ладиженською лише для двовимірних і осесиметричних задач. Зрозуміло, що поповнення системи Нав'є-Стокса нелінійним рівнянням енергії значно ускладнює дослідження задач конвекції в'язкої рідини і теоретично, і з точки зору їх наближеного розв'язування. Для них також немає глобальних теорем існування в тривимірному випадку, існує "розрив" між функціональними просторами, в яких узагальнені розв'язки існують, і просторами, в яких вони єдині (М.К.Коренєв, В.Б.Мосєєнков, M.Shinbrot, W.P.Kotorynski). Труднощі ще більш зростають для розривних коефіцієнтів рівнянь, що фізично відповідає обмеженим об'ємам в'язкої рідини, які містяться в твердому тілі, а також конвекції в системі з двох неперемішуваних рідин з різними густинами.

Далі, оскільки інтенсивним режимам конвекції відповідають великі значення безрозмірного параметра - числа Грасгофа (порядку $10^{6}\div10^{13}$), який входить в праву частину рівняння руху, то це приводить до сингулярно-збурених задач, розв'язкам яких характерна особлива поведінка в примежовому шарі. Різницеві схеми, розроблені для розв'язування задач тепломасопереносу (О.А.Самарський, Г.І.Марчук, М.І.Нікитенко, Л.О.Коздоба, П.Роуч та інші), будучи застосованими для розв'язування таких задач, не мають рівномірної збіжності по малому параметру, що приводить до порушення дискретного принципу максимуму і появи невластивих задачі розв'язків. Крім того, нелінійні члени рівнянь конвекції мають властивість енергетичної нейтральності для класичних умов на границі твердого тіла, а апроксимація цих членів скінченними різницями, як правило, приводить до небажаних проявів обчислювальної в'язкості і спотворення одержуваного поля течій.

Наведені міркування свідчать, що дослідження умов, за виконання яких розв'язок задачі конвекції в'язкої рідини в обмеженому об'ємі існує і єдиний на довільному проміжку часу, а також розробка ефективних наближених методів, адаптованих до особливостей цієї задачі, становлять значний науковий інтерес.

Звертаючись до другої групи питань, досліджуваних в роботі, відзначимо, що в сучасній математичній фізиці особливе місце займає коло питань, пов'язаних з необмеженими розв'язками нелінійних рівнянь в частинних похідних другого порядку, які часто називають режимами з загостренням. Грунтовні теоретичні дослідження таких задач (О.А.Самарський, В.О.Галактіонов, С.П.Курдюмов, О.П.Михайлов, В.П.Маслов, Р.Г.Данилов, К.О.Волосов, М.В.Змитренко, С.І.Похожаєв та інші) показали, що розв'язки, які необмежено зростають за скінченний проміжок часу, не тільки є екзотичними прикладами глобально (по часу) нерозв'язних задач, але й мають фізичний зміст і з'являються при дослідженнях теплового вибуху, процесів горіння, кумуляції ударних хвиль, нестаціонарних структур в магнітній гідродинаміці тощо. В той же час конструктивні дослідження в цій галузі розвинені ще недостатньо. Цю ситуацію можна пояснити тим, що задачі для конкретних нелінійних рівнянь, які використовуються для опису таких режимів, мають свою індивідуальність, яка, взагалі кажучи, не може бути врахована на основі єдиного конструктивного підходу. Це, в свою чергу, є головним наслідком нелінійності - відсутністю принципу суперпозиції, властивого лінійним задачам. Тому виявлення можливостей опису режимів з загостренням і ефекту локалізації тепла з допомогою лінійних рівнянь має значний теоретичний і прикладний інтерес.

Класичне рівняння теплопровідності, в основу якого покладена гіпотеза про лінійну залежність енергії тіла від температури і вектора теплового потоку від градієнта температурного поля, є досить наближеною моделлю, межі застосування якої визначаються достатньо стійкими полями з "помірними" градієнтами. Ясно, що воно не придатне для адекватного опису процесів в середовищах, які мають теплову пам'ять, а розв'язок задачі повинен враховувати попередню теплову історію (спадковість процесу). Проблеми такого типу виникають при дослідженнях еволюції теплових збурень в плазмі, в рідкому гелії-II, в деяких діелектриках і полімерах при низьких температурах. Пам'яттю володіють також багато реологічних в'язко-пластичних середовищ (метали, пластики, суспензії тощо), для яких спадковість проявляється через залежність від часу фізичних і термодинамічних характеристик (J.B.Brown, D.Y.Chung, P.W.Matthews). Математичні дослідження в цій галузі почали проводитись і публікуватись за кордоном з 60-х років (B.D.Coleman, W.Noll, M.E.Gurtin, A.C.Pipkin, V.J.Mizel, C.-C.Wang, I.Herrera, I.W.Nunziato, J.Meixner, C.Truesdell та інші). Результатом цих досліджень стали термодинамічно обгрунтовані нелінійні рівняння переносу теплової енергії в середовищах з пам'яттю, із яких, як наслідок, випливає класичне рівняння теплопровідності.

В той же час конструктивних результатів, які б відносились до конкретних початково-граничних задач теплопровідності середовищ з пам'яттю, одержано дуже мало (I.W.Nunziato, B.D.Coleman, В.А.Даниленко, В.М.Кудінов, А.С.Макаренко, П.М.Колесніков, Л.В.Фурсевич). Практично не розглядалися задачі з нестаціонарними граничними умовами на частині межі тіла, які випливають з нового означення теплового потоку, містять похідні і інтеграли по часу і відповідають контакту тіла з ідеальним тепловим провідником або добре перемішуваною рідиною. Такі некласичні умови природним шляхом приводять до спектральних задач з параметром в рівнянні і в граничних умовах. Маючи на увазі прикладну сторону спектральних задач цього типу, відзначимо, що вони з'являються при дослідженнях деяких задач теорії пружності, динаміки тіл з порожнинами, частково заповненими рідиною, дифракції електромагнітних і акустичних хвиль, класичної теплопровідності (І.О.Луковський, М.Д.Копачевський, О.М.Комаренко, М.Я.Барняк, Н.К.Аскеров, С.Г.Крейн, О.М.Жуковський, М.М.Войтович, Б.З.Каценеленбаум, Л.П.Нижник, В.Л.Кульчицький та інші). Вперше вони були розглянуті В.А.Стекловим в 1895 р. і після довгої перерви стали об'єктом інтенсивних досліджень (J.Odnoff, S.Agmon, J.Ercolano, M.Schechter, J.Walter, В.В.Барковський, Ю.М.Березанський, Я.А.Ройтберг, М.С.Агранович, М.І.Вишик, С.Г.Крейн, Л.О.Котко, О.М.Кожевніков та інші). Найбільш загальні результати з теорії операторних пучків, до яких зводяться ці задачі, одержані М.В.Келдишем і Г.В.Радзієвським.

Отже, звертаючись до третьої групи досліджуваних в роботі питань, можна вважати, що вони відносяться до нетривіальних проблем математичної фізики і в значній мірі направлені на зменшення існуючого розриву між чисто теоретичними результатами, одержаними за останні роки, і потребами практики в конструктивних математичних методах дослідження задач теплопровідності середовищ з пам'яттю.

Мета роботи:

- комплексне дослідження нелінійних початково-граничних задач інтенсивної (при великих значеннях критерію G) конвекції в обмеженому об'ємі в'язкої рідини від глобальних теорем існування узагальнених розв'язків до обгрунтування максимально адаптованих до їх особливостей наближених методів розв'язування і аналізу результатів розрахунків;

- одержання фундаментальних розв'язків, інтегральних представлень розв'язків задачі Коші і початково-граничних задач для лінійного поліпараболічного рівняння порядку n , виявлення особливостей поведінки його розв'язків відносно рівняння теплопровідності, з'ясування питання про можливість опису з його допомогою локалізації тепла, режимів з загостренням і процесів з скінченною швидкістю поширення збурень;

- отримання і дослідження фундаментальних розв'язків інтегро-диференціального рівняння теплопровідності середовищ з затухаючою тепловою пам'яттю для довільних ядер релаксації експоненціального типу, з'ясування характеру проходження хвиль через таке середовище, обгрунтування конструктивних методів розв'язування істотно неоднорідних задач з некласичними граничними умовами на основі власних функцій спектральних задач з параметром в рівнянні і граничних умовах, одержання локальної і глобальної теорем існування для випадку нелінійних даних задачі.

Методи дослідження. Дослідження проводились з застосуванням методів функціонального аналізу, теорії узагальнених функцій, комплексного аналізу і спеціальних функцій, інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа, теорії самоспряжених операторів, асимптотичних і наближених методів типу методу Гальоркіна та інших методів сучасної математичної фізики.

Наукова новизна результатів. Доведені глобальні (по часу) теореми існування і єдиності узагальнених розв'язків нелінійних осесиметричних спряжених задач конвекції в'язкої нестисливої рідини, сформульованих в змінних "функція потоку - температура", отримані апріорні оцінки розв'язків і з'ясоване питання про їх асимптотичну поведінку. Запропоновані видозміни методів типу Гальоркіна (скінченних елементів та зведення до системи звичайних диференціальних рівнянь), що дозволяють максимально врахувати форму області течії і складний характер процесу в приграничному шарі для інтенсивних режимів конвекції. Одержано і проаналізовано розв'язок нелінійної спряженої задачі про тепловий режим підземного сховища зріджених газів.

Одержані узагальнення диференціальної і інтегральної теорем Гріна на випадок ітерованого T^k і поліпараболічного $P(T)$ операторів, побудовані їх фундаментальні розв'язки і показано, що вони відрізняються від фундаментального розв'язку класичного оператора $T = \partial/\partial t - \nabla^2$ на множник, що є функцією тільки часу і описує дисипацію енергії. Отримані представлення оператора $P(T)$ і оберненого до нього в просторі зображень Фур'є і Лапласа-Фур'є у вигляді добутку переставних операторів. Показано, що серед множини розв'язків лінійного поліпараболічного рівняння містяться підмножини фінітних і необмежених розв'язків, що описують процеси з скінченною швидкістю розповсюдження теплових збурень, локалізацію тепла, а також LS , S і HS - режими з загостренням, для моделювання яких звичайно використовуються нелінійні рівняння теплопровідності.

Для ядер релаксації $\lambda(t)$ і $\varepsilon(t)$, що задовольняють тільки умови зображуваності за Лапласом, побудовано фундаментальний розв'язок інтегро-диференціального оператора

$$M = \partial/\partial t - \nabla^2 + \dot{\varepsilon} * (\partial/\partial t) - \dot{\lambda} * \nabla^2 ,$$

досліджена його поведінка при $t \to 0$ і $t \to \infty$ і з'ясовані умови, при виконанні яких він описує процес з скінченною швидкістю поширення збурень, виявлені особливості проходження теплових хвиль по середовищу з пам'яттю. В просторі $L^2(\Omega) = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma_1)$ сформульовані неоднорідні задачі Коші для рівнянь з самоспряженими операторами A_1 і A_2, які на межі Γ_1 відповідають граничним операторам виду

$$N_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{n}_1 \cdot \nabla) + \varepsilon * \frac{\partial}{\partial t} + \lambda * (\vec{n}_1 \cdot \nabla),$$

і

$$N_2 = I - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{n}_1 \cdot \nabla) + \lambda * I - \varepsilon * \frac{\partial}{\partial t}(\vec{n}_1 \cdot \nabla).$$

Запропоновано метод розвинення розв'язків цих задач по власних функціях операторів A_1 і A_2, що забезпечує їх одночасну збіжність як в області Ω, так і на її межі $\partial\Omega = \Gamma$. Доведено, що у випадку нелінійної правої частини операторного рівняння існує єдиний розв'язок, якщо вона задовольняє степеневі оцінки росту по u.

<u>Теоретичне і прикладне значення.</u> Робота в основній своїй частині має теоретичний характер: в ній досліджуються нетрадиційні математичні моделі нестаціонарного тепломасопереносу, які орієнтовані на описання його спеціальних режимів, що неможливо здійснити в межах класичної теорії. Разом з тим ці дослідження інспіровані актуальними запитами практики і тому не можуть розглядатися у відриві від неї тільки в теоретичному аспекті.

Зокрема, дослідження задач інтенсивної конвекції в'язкої рідини виконувались по темі Держкомітету СРСР з науки і техніки "Розробити ефективні методи і алгоритми розрахунків теплових режимів, термопружності і гідродинаміки підземних сховищ зріджених газів та нафтопродуктів і видати рекомендації науковим установам Мінгазпрому СРСР" (постанова N 291 ДК НТ СРСР від 28.08.1977, розпорядження Президії АН УРСР N 1319 від 22.07.1977) та планової теми "Розробка математичних методів дослідження крайових задач тепломасопереносу в неізотермічних лакунах форми обертання" (N держреєстрації 80017274).

Результати, що відносяться до поліпараболічного та інтегро-диференціального рівнянь теплопровідності, мають, на погляд автора, реальну перспективу запровадження, оскільки вони здебільшого носять конструктивний характер.

Розв'язки конкретних задач, наведених в роботі, крім самостійного значення можуть бути корисними як контрольні при обгрунтуванні нових наближених методів.

Апробація роботи. Основні результати і положення роботи обговорювались на семінарах і Вченій раді Інституту математики АН України, а також доповідались на: II Всесоюзній конференції "Проблеми гірничої теплофізики (Ленінград, 1981); Міжнародній конференції з теорії наближення функцій (Київ, 1983); Республіканських конференціях "Нелінійні задачі математичної фізики" (Донецьк, 1983; Чернівці, 1989);III і IV Пленарних засіданнях міжнародного семінару ЛВМТ (НРБ, Пловдив, 1983; Англія, Лондон, 1985); VIII і IX Всесоюзних школах з теорії операторів в функціональних просторах (Рига, 1983; Тернопіль, 1984); II і III Міжнародних конференціях "Лаврентьєвські читання з математики, механіки і фізики" (Київ, 1985; Новосибірськ, 1990); Всесоюзній конференції з нелінійних проблем диференціальних рівнянь і математичної фізики (Тернопіль, 1989); Республіканській конференції: Екстремальні задачі теорії наближень та їх застосування" (Київ, 1990).

Публікації. Основні положення і результати, одержані в дисертації, опубліковані в 2 монографіях і 33 статтях, список яких подано нижче.

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота виконана українською мовою і складається з вступу, п'яти глав та списку цитованої літератури, що містить 129 джерел. Об'єм - 305 сторінок машинописного тексту, таблиць - 11, рисунків - 17.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступній частині наводяться відомості про актуальність теми досліджень, їх мету і методи досліджень, новизну отриманих результатів і їх місце серед споріднених робіт інших авторів, а також короткий огляд змісту дисертації.

Перша глава присвячена введенню математичних моделей тепломасопереносу, які в подальшому досліджуються, і одержуються деякі допоміжні результати, необхідні для цього.

Зокрема в § 1 цієї глави на основі фундаментальних законів збереження, виходячи із математичних і фізичних міркувань, виведена система нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що включає рівняння нерозривності (збереження маси)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0\,. \qquad (1_1)$$

імпульсу (кількості руху)

$$\rho\,\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu\,\nabla^2\vec{v} + (\eta + \tfrac{1}{3}\,\mu)\,\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) + (\nabla\eta - \tfrac{2}{3}\,\nabla\mu)\,\nabla\cdot\vec{v} +$$
$$+\,2\,(\nabla\mu)\cdot\nabla\vec{v} + (\nabla\mu)\times(\nabla\times\vec{v}) + \rho\vec{f} \qquad (1_2)$$

та енергії

$$\rho c_p\,\frac{DT}{Dt} = \nabla\cdot(\lambda\,\nabla T) - p\,(\nabla\cdot\vec{v}) + \rho\,Q + \mu\,\Phi(\vec{v})\,, \qquad (1_3)$$

де ∇ – оператор Гамільтона, ∇^2 – оператор Лапласа, $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ – вектор швидкості, T – температура, p – тиск, $\vec{g}$ – вектор прискорення земного тяжіння, ρ – густина, λ – коефіцієнт теплопровідності, μ і η – коефіцієнти здвигової і об'ємної в'язкості, $\vec{f}$-вектор масових сил, Q-функція, що задає джерела тепла, $\Phi(\vec{v})$ – дисипативна функція, $D \equiv \partial/\partial t + (\vec{v}\cdot\nabla)$ – субстанційна похідна. Якщо всі фізичні характеристики постійні, об'ємною в'язкістю і дисипацією енергії можна знехтувати і задача має аксіальну симетрію, то із системи (1) шляхом введення функції потоку ψ

$$v^r = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\,, \quad v^z = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

і безрозмірних змінних одержується нелінійна система

$$\frac{\partial}{\partial t}\,E^2\psi - r\,\frac{\partial(\psi r^{-2}E^2\psi)}{\partial(r,z)} = \nu\,E^4\psi - r\,\gamma\,\frac{\partial u}{\partial r}\,, \qquad (2_1)$$

$$\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial(\psi,u)}{\partial(r,z)}\right] = \lambda\,\nabla^2 u + \rho\,Q + \mu\,\Phi(\psi)\,. \qquad (2_2)$$

де ν, γ, σ і λ – сталі,

$$E^2 \equiv r\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,\ \nabla^2 \equiv \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left[r\,\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,\ E^4 \equiv E^2E^2\,.$$

$$\Phi(\psi)=2\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\right]^2 + \left[\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial z}\right]^2\right\} +$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]\right]^2.$$

При постановці задачі прийнято для конкретності, що система розглядається в просторовій області $\Omega \in E^3$, в якій меридіанному перетину порожнини, заповненої рідиною, в кругових циліндричних координатах (r,φ,z) відповідає прямокутник $\Pi_1=\{r,z\,|\ 0<r_1< r <r_2< R,$

$H_1 < h_1 < z < h_2 < H_2 \}$, а перетину тіла, в якому знаходиться порожнина, відповідає область $\Pi_2 = \Pi \setminus \Pi_1$, де $\Pi = \{ r,z \mid 0 \le < r < R,$ $H_1 < z < H_2 \}$. На межі Γ_1, що розділяє рідину і тверде тіло, задаються умови

$$\left[u \right]_{\Gamma_1} = \left[\lambda (\vec{n} \cdot \nabla u) \right]_{\Gamma_1} = 0 \ , \quad \phi \Big|_{\Gamma_1} = (\vec{n} \cdot \nabla) \phi \Big|_{\Gamma_1} = 0 \ , \qquad (2_3)$$

де $[f]_{\Gamma_1}$ -стрибок функції f, заданної в П, при переході Γ_1, рівний $(f_2 - f_1)_{\Gamma_1}$. Початкові умови мають вигляд

$$u \Big|_{t=0} = u_0(r,z) \ , \ (r,z) \in \Pi \ ; \ \phi \Big|_{t=0} = \phi_0(r,z) \ , \ (r,z) \in \Pi_1 . \qquad (2_4)$$

Якщо теплофізичні параметри рідини слабо змінюються з температурою, то замість (2_1), (2_2) розглядається система

$$\frac{\partial}{\partial t} E^2\phi - r \frac{\partial(\phi, r^{-2}E^2\phi)}{\partial(r,z)} - E^2_{\nu}(E^2\phi) = r\left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} B(\varepsilon u) + F_1 \right] , \qquad (3_1)$$

$$\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\phi,u)}{\partial(r,z)} \right] - \nabla \cdot \left[\lambda(\varepsilon u, \varepsilon\nabla u) \nabla u \right] = F_2 \ . \qquad (3_2)$$

де $B = \rho^{-1}$, ε - малий безрозмірний параметр,

$$E^2_{\nu}\varphi = r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] .$$

F_1,F_2- задані функції, що характеризують масові сили та джерела тепла. Для неї ставляться початкові і граничні умови (2_3), (2_4).

Інтенсивність теплової конвекції, яка описується системою (2_1), (2_2) або (3_1),(3_2), характеризується безрозмірним параметром (числом Грасгофа)

$$G = \beta \, g \, \Delta T \, R^3 \, \nu^{-2} \ .$$

Характерні математичні особливості розглядуваних задач: нелінійність, різні порядки рівнянь руху та енергії, розривність коефіцієнтів рівняння енергії, великі значення чисел Грасгофа, які відповідають більшості реальних процесів теплообміну в рідині ($G = 10^6 \div 10^{15}$).

Показано, що нелінійні (інерційні) члени рівнянь (2) і (3) для класичних умов прилипання та непротікання на твердій стінці не дають безпосереднього внеску у виробництво повної енергії збурень, тобто вони енергетично нейтральні:

$$\int\limits_{\Pi_1} r\,\frac{\partial(\psi, r^{-2}E^2\psi)}{\partial(r,z)}\,\frac{\psi}{r}\,dr\,dz = \int\limits_{\Pi_1} r\,\frac{\partial(\psi,u)}{\partial(r,z)}\,\frac{u}{r}\,dr\,dz = 0\,. \qquad (4)$$

Одержано також більш загальні, ніж (4), умови енергетичної нейтральності.

В § 2 із теоретико-групових міркувань вводиться узагальнення класичного лінійного рівняння теплопровідності виду

$$P(T)\,u \equiv (\alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_n T^n)\,u(t,x) = f(t,x)\,, \qquad (5)$$

де $\alpha_k\,(k=\overline{0,n})$ – деякі дійсні параметри, $T\equiv\partial/\partial t-\nabla^2$. Показано, що в силу ізоморфізму між множиною операторів $P(T)$ і кільцем дійсних поліномів $P(z)$, кожен поліпараболічний оператор єдиним чином може бути представлений у вигляді добутку переставних операторів:

$$P(T) = \alpha_n \prod_{j=1}^{k} (T - z_j I)^{\nu_j}\,, \quad \sum_{j=1}^{k} \nu_j = n\,, \qquad (6)$$

де z_j – корені полінома $P(z)$ кратності ν_j.

Лема 1. Якщо $u,v\in C^{2n,n}(E^{m+1})$, $n=2k+1$, $k=0,1,2,\ldots$, то для довільних непарних $n=2k+1$, $k=0,1,2,\ldots$, степенів оператора T диференціальна формула Гріна має вигляд

$$B_{2k+1}(u,v) = u\,T^{2k+1}v + v\,\overline{T}^{2k+1}u = \qquad (7_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i (T^i v)\overline{T}^{2k-i}u + \Delta \sum_{i=0}^{2k}(-1)^i [(T^i v)\nabla\overline{T}^{2k-i}u - (\overline{T}^i u)\nabla T^{2k-i}v]\,,$$

а для парних $n=2k$, $k=1,2,\ldots$, –

$$B_{2k}(u,v) \equiv u\,T^{2k} - v\,\overline{T}^{2k}u = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^j (\overline{T}^j u)\,T^{2k-j-1}v -$$

$$- \nabla\cdot\sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^j [(\overline{T}^j u)\,\nabla T^{2k-j-1}v + (T^j)\,\nabla\overline{T}^{2k-j-1}u]\,, \qquad (7_2)$$

де $\overline{T} \equiv \partial/\partial t + \nabla^2$ – оператор, спряжений до T.

Поклавши $n=2N+1$, $N=0,1,2,\ldots$, одержимо, що для непарних степенів оператора $P(T)$

$$u\,P(T)v - v\,\overline{P(T)}u = \sum_{k=0}^{2N+1}\alpha_k[\,u\,T^k v - (-1)^k v\,\overline{T}^k u\,] = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k(\,u\,T^{2k}v -$$

$$- v\overline{T}^{2k}u) + \sum_{k=0}^{N}\alpha_{2k+1}(uT^{2k+1} + v\overline{T}^{2k+1}u) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_{2k}B_{2k}(u,v) + \sum_{k=0}^{N}\alpha_{2k+1}B_{2k}(u,v)$$

Якщо ж $n=2N$, $N=1,2,\ldots$, то

$$u\,P(T)v - v\,\overline{P(T)}u = \sum_{k=1}^{N}\alpha_{2k}B_{2k}(u,v) + \sum_{k=0}^{N-1}\alpha_{2k+1}B_{2k+1}(u,v)\,.$$

Отже, одержано наступне твердження.

Лема 2. Оператор $F(T)$, що вводиться формулою

$$\overline{F(T)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k T^k ,$$

спряжений до оператора $F(T)$ довільного цілого степеня n, і для довільних функцій $u,v \in C^{2n,n}(E^{m+1})$ має місце формула

$$u\,F(T)v - v\,\overline{F(T)}u = \sum_{k=1}^{N} a_{2k} B_{2k}(u,v) + \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k+1} B_{2k+1}(u,v) + \left\{ \begin{array}{ll} 0 , & n = 2N , \\ a_{2N+1} B_{2N+1} , & n = 2N+1, \end{array} \right. \qquad (8)$$

де форми B_{2k} та B_{2k+1} задаються співвідношеннями (7).

За допомогою цих лем одержані узагальнення інтегральних формул Гріна для операторів T^n і $F(T)$, які дали можливість вказати класи коректних початкових і граничних умов для поліпараболічного рівняння і в подальшому (§ 16,17) сформулювати інтегральні представлення розв'язків задачі Коші і початково-граничних задач.

В § 3, виходячи з закону збереження енергії, фундаментальної нерівності Клаузіуса-Дюгема для ентропії системи, яка має місце для фізично реальних процесів, виведені визначальні лінеаризовані рівняння для теплового потоку і внутрішньої енергії в середовищі з тепловою пам'яттю. Для цього введені історія до поточного моменту $t = t$ температури $u^t(\tau)=u(t-\tau,\vec{x})$ та історія градієнта температури $\vec{g}^t(\tau)=\vec{g}(t-\tau,\vec{x})=\nabla u(t-\tau,\vec{x})$, упорядкована пара яких $\Lambda^t(\tau) \equiv (T^t(\tau), \vec{g}^t(\tau))$ називається термічною історією матеріальної точки $\vec{x}$ до поточного моменту часу $t=t$, $0 \le \tau \le t$ (I.W.Nunziato). Тоді процес дифузії тепла в речовині з пам'яттю в найзагальнішому випадку можна описати за допомогою нелінійних функціоналів виду

$$e = \mathfrak{E}(\Lambda^t), \quad s = \mathfrak{S}(\Lambda^t), \quad \vec{q} = \mathfrak{Q}(\Lambda^t) \quad , \qquad (9)$$

де e - питома внутрішня енергія, s - ентропія, $\vec{q}$ - тепловий потік. Припускаючи ізотропність речовини, неперервність та достатню гладкість функціоналів в (9), а також малість відхилення енергетичного стану від рівноважного (від рівноважної термічної історії $\Lambda_0=(u_0 \ ,\vec{0})$), ці функціонали апроксимуються в околі Λ_0 узагальненими рядами Тейлора. Обмежившись в них першими двома членами, одержуються лінійні обмежені функціонали, які, згідно з теоремою Ріса, представлені скалярними добутками в деякому гільбертовому просторі. В результаті необхідних обчислень шукані визначальні співвідношення набувають вигляду

$$e(t,\vec{x}) = e_0 + \varepsilon(0)\, u(t,\vec{x}) + \int_0^\infty \varepsilon(\tau)\, u(t-\tau,\vec{x})\, d\tau\,, \qquad (10_1)$$

$$\vec{q}(t,\vec{x}) = -\lambda(0)\, \vec{g}(t,\vec{x}) - \int_0^\infty \lambda(\tau)\, \vec{g}(t-\tau,\vec{x})\, d\tau\,. \qquad (10_2)$$

Функції λ і ε називаються ядрами релаксації теплового потоку і енергії відповідно. Для скорочення запису далі використовується позначення

$$\varphi(t) * \psi(t) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\, \psi(t-\tau)\, d\tau\,.$$

Після внесення (10) в рівняння збереження енергії одержується інтегро-диференціальне рівняння теплопровідності речовин з пам'яттю вигляду

$$Mu \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_0 \nabla^2 u + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = f(t,\vec{x}) \qquad (11)$$

з початковою умовою $u(0,\vec{x})=u_0(x)$, для якого в главі 5 розглядаються породжені визначенням (10_2) нетрадиційні граничні умови двох типів:

$$N_1 u \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_0 (\vec{n}_1 \cdot \nabla u) + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{\lambda}(\vec{n}_1 \cdot \nabla u) = f_1(t,\vec{s}),\ \vec{s} \in \Gamma_1;$$

$$(\vec{n}_2 \cdot \nabla) u = 0\,,\ s \in \Gamma_2\,, \qquad (12_1)$$

$$N_2 u \equiv u - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n}_1 \cdot \nabla u) + \dot{\lambda} * u - \dot{\varepsilon} * \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n}_1 \cdot \nabla u) = f_1(t,\vec{s}),\ \vec{s} \in \Gamma_1;$$

$$u = 0\,,\ s \in \Gamma_2\,, \qquad (12_2)$$

Показано, що в просторі зображень Лапласа рівняння (11) зводиться до еліптичного

$$\nabla^2 U - \frac{sE}{L}\, U = -\frac{F}{sL}\,,$$

де s – комплексний параметр перетворення, а великими літерами позначені перетворення відповідних функцій: $U = \mathcal{L}\{u\}$ і т.д.

Д р у г а г л а в а роботи присвячена дослідженням коректності нелінійних математичних моделей конвекції в'язкої нестисливої і термічно неоднорідної рідини, що заповнює обмежений об'єм в твердому тілі, виведених в § 1.

В § 4 вводяться функціональні простори (банахові і гільбертові) і даються означення узагаль[...] розв'язків задач (2) і (3).

Зокрема, узагальненим розв'язком задачі (2) з граничною умовою $u = 0$ на Γ_2 та $\Theta=\Phi=0$ називається упорядкована пара функцій (ϕ, u) із простору $V^{3,0}_{2,0}(\Pi^T_1) \times V^{1,0}_{2,0}(\Pi^T)$, що задовольняє інтегральні співвідношення

$$\int\limits_{\Pi_1} \frac{1}{r}\, \varphi\, E^2\phi\; dr\, dz \Big|_{t=0}^{t=t} + \int\limits_{\Pi^t_1} \Big[-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial t} E^2\phi - \varphi\, \frac{\partial(\phi, r^{-2}E^2\phi)}{\partial(r,z)} +$$

$$+ \frac{\nu}{r}\,(\nabla\varphi\cdot\nabla\phi)\Big]\, dr\, dz\, dt = - \int\limits_{\Pi^t_1} \gamma\, r\, u\, \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, dr\, dz\, dt\,. \qquad (13_1)$$

$$\int\limits_{\Pi} \sigma\,\theta\, u\, r\, dr\, dz \Big|_{t=0}^{t=t} + \int\limits_{\Pi^t} \Big[-\sigma\, r\, u\, \frac{\partial\theta}{\partial t} - \sigma\,\frac{\partial(\phi,u)}{\partial(r,z)}\,\theta +$$

$$+ r\,\lambda\,(\nabla\theta\cdot\nabla u)\Big]\, dr\, dz\, dt = 0 \qquad (13_2)$$

для кожного $t\in[0,T]$ та довільної пари (φ,θ) із простору $V^{1,1}_{2,0}(\Pi^T_1) \times V^{1,1}_{2,0}(\Pi^T)$ (тут знак $\times$ означає прямий добуток відповідних просторів). Аналогічним чином вводиться і узагальнений розв'язок $(\phi,u) \in V^{3,0}_{2,0}(\Pi^T_1) \times V^{1,0}_{2+2\gamma,0}(\Pi^T)$, $0 \le \gamma < 1$, задачі (3).

§ 5 містить повне доведення теореми існування єдиного узагальненого розв'язку осесиметричної нелінійної задачі (2) для довільного проміжку часу. При цьому використовується видозміна схеми доведення, запропонованої О.О.Ладиженською для дослідження коректності чисто гідродинамічних задач. Вона включає зведення за допомогою методу Гальоркіна вихідної системи до скінченн ї системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь з подальшим використанням до неї теорем Пеано і Арцела, леми Фрідріхса та відзначеної вище властивості енергетичної нейтральності нелінійних членів (співвідношення (4)). В результаті одержано наступне твердження.

<u>Теорема 1.</u> Якщо початкові дані нелінійної задачі (2) при $u = 0$ на Γ_2 такі, що $\phi_0(r,z)\in V^{(2)}_{2,0}(\Pi_1)$ і $u_0(r,z)\in L_2(\Pi)$, то для довільного скінченного $T>0$ вона має єдиний розв'язок (ϕ, u) із простору $V^{3,0}_{2,0}(\Pi^T_1) \times V^{1,0}_{2,0}(\Pi^T)$, для якого виконуються енергетичні співвідношення

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_1} v^2\,dx\Big|_{t=0}^{t=t} + \int\limits_{\Pi_1^t} \nu\,\omega^2\,dx\,dt = \int\limits_{\Pi_1^t} \gamma u v^2\,dx\,dt,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_1} \omega^2\,dx\Big|_{t=0}^{t=t} + \int\limits_{\Pi_1^t} \nu\left\{ |\nabla\omega|^2 + \left|\frac{\omega}{r}\right|^2 \right\} dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\Pi_1^t} \left(v^r\omega^2 - \gamma\omega\frac{\partial u}{\partial r} \right) dx\,dt\,,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_2} \left|\frac{\omega}{r}\right|^2 dx\Big|_{t=0}^{t=t} + \int\limits_{\Pi_2^t} \nu\left|\nabla\frac{\omega}{r}\right|^2 dx\,dt = \int\limits_{\Pi_1^t} \gamma\,u\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega}{r}\right) dx\,dt\,; \qquad (14_1)$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi} \sigma u^2\,dx\Big|_{t=0}^{t=t} + \int\limits_{\Pi^t} \lambda\,|\nabla u|^2\,dx\,dt = 0\,, \qquad (14_2)$$

де $dx = r\,dr\,dz$, $\omega = E^2\phi$, і який підкоряється оцінкам

$$\|\,|v|\,\|_{\Pi_1} \le \|\,|v_0|\,\|_{\Pi_1} + c_0\,\|\sigma^{1/2}u_0\|_{\Pi}\,,$$

$$\|\,|\nabla v|\,\|_{\Pi_1^t} \le \|\omega\|_{\Pi_1^t} \le \nu^{-1/2}\|\,|v_0|\,\|_{\Pi_1} + c_1 t^{1/2}\|\sigma^{1/2}u_0\|_{\Pi}\,,$$

$$\|v^r\|^4_{4,\Pi_1} \le c_2\,(h_2-h_1)^{-3}\|v^r\|^4_{\Pi_1} + c_3\,\|v^r\|_{\Pi_1}\cdot\|\,|\nabla v^r|\,\|^3_{\Pi_1}\,,$$

$$\|v^z\|^4_{4,\Pi_1} \le c_4\,r_1^{-3}\|v^z\|^4_{\Pi_1} + c_5\,\|v^z\|_{\Pi_1}\cdot\|\,|\nabla v^z|\,\|^3_{\Pi_1}\,,$$

$$\|\omega\|_{4,\Pi_1} \le c_6\,\|\omega\|^{1/4}_{\Pi_1}\cdot\|\,|\nabla\omega|\,\|^{3/4}_{\Pi_1}\,.$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_1} \omega^2 r\,dr\,dz\Big|_{t=0}^{t=t} + \int\limits_{\Pi_1^t} \nu\left\{ |\nabla\omega|^2 + \left|\frac{\omega}{r}\right|^2 \right\} r\,dr\,dz\,dt \le M(t) + \|\omega_0\|^2_{\Pi_1}\,.$$

$$|\phi|_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^t)} \le \|\phi_0\|_{(2)\,\Pi_1} + c_7\,r_1^{-1}\,t^{1/2}\,\|u_0\|_{\Pi}\,.$$

$$|u|_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi^t)} \le c_8\,\|u_0\|_{\Pi}\,.$$

де c_k, $k = \overline{1,8}$ – деякі константи, а функція $M(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ та $r_1 \to 0$.

Теорема 1 узагальнюється на сингулярні області, а також на задачі з неоднорідними змішаними умовами або умовами Діріхле на Γ_2. Теорема залишається вірною і в тому випадку, коли порожнина з рідиною - суть довільна обмежена область Ω_1 з достатньо гладкою межею Γ_1, віддалена від осі обертання.

Оскільки наведені вище оцінки не є рівномірними по r_1 (r_1 - відстань, на яку область Π_1 віддалена від осі обертання), за їх допомогою не можна зробити граничний перехід по $r_1 \to 0$, що не дозволяє узагальнити відповідну теорему О.О.Ладиженської для чисто гідродинамічної задачі на випадок, коли вісь обертання перетинає об'єм з рідиною.

Якщо порожнина в твердому тілі заповнена двома рідинами, що не змішуються (або рідиною і її насиченою парою, а конвекція протікає в умовах гідростатичного тиску, що забезпечує динамічну рівновагу між ними), то задача досліджується за тією ж схемою, що приводить до аналогічної теореми (з точністю до оцінок у відповідних просторах).

В §6 доводиться, що початкові збурення в системі рідина - тверде тіло при постійній температурі на зовнішній межі Γ_2 затухають з часом і це затухання має експоненційний характер. Іншими словами, має місце наступна

Теорема 2. Узагальнений розв'язок (ϕ, u) задачі (2) при $u = 0$ на Γ_2 асимптотично стійкий в сенсі простору $W^{(2)}_{2,0}(\Pi_1) \times L_2(\Pi)$:

$$\lim_{t \to \infty} \| \phi \|_{(2),\Pi_1} = \lim_{t \to \infty} \| \sigma u \|_{\Pi} = 0 , \tag{15}$$

і для нього справджуються оцінки

$$\| \sigma^{1/2} u \|_{\Pi} \le \| \sigma^{1/2} u_0 \|_{\Pi} e^{-b_1 t},$$

$$\| |v| \|_{\Pi_1} \le \| |v_0| \|_{\Pi_1} e^{-b_2 t} + \frac{\xi_1}{b_2 - b_1} \| \sigma^{1/2} u_0 \|_{\Pi} \left[e^{-b_1 t} - e^{-b_2 t} \right], \tag{16}$$

$$\| \phi \|^2_{(2),\Pi_1} \le \| \phi_0 \|^2_{(2),\Pi_1} e^{-b_3 t} + \frac{\xi_2}{r_1^2 (b_3 - 2b_1)} \| \sigma^{1/2} u_0 \|^2_{\Pi} \left[e^{-2b_2 t} - e^{-b_3 t} \right],$$

де $b_k, k = \overline{1,3}$, і ξ_1, ξ_2 - деякі константи, що конструктивно обчислюються і залежать тільки від фізичних параметрів системи і областей Π та Π_1.

Доведення коректності нелінійної системи рівнянь конвекції термічно неоднорідної рідини (3) при тих же, що і в задачі (2), початкових і граничних умовах в § 7 здійснено в кілька етапів. Перш за все, із фізичних міркувань прийнято, що динамічна в'язкість ν =

$\nu(\varepsilon u)$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = \lambda(\varepsilon u, \varepsilon\nabla u)$ та функція $B(\varepsilon u)$ для рідини неперервні і задовольняють умови:

1°. $0 < \nu_0 \le \nu(\xi) \le \nu_1$, $|\dot\nu(\xi)| \le \nu_2$ ($\nu_k = const > 0$, $k = \overline{0,2}$);

2°. $\lambda'(1 + |\eta|^{2\gamma}) \le \lambda(\xi,\eta) \le \lambda''(1 + |\eta|^{2\gamma})$ ($\gamma, \lambda', \lambda'' = const > 0$);

3°. $[\eta_1\lambda(\xi,\varepsilon\eta_1) - \eta\lambda(\xi,\varepsilon\eta)]\,(\eta_1 - \eta) \ge \lambda_0 |\,\eta_1 - \eta\,|^2$;

4°. $|\lambda(\xi_1,\varepsilon\eta_1) - \lambda(\xi,\varepsilon\eta)| \le \lambda^0 |\,\xi_1 - \xi\,|$;

5°. $0 < b_0 \le B(\xi)$, $B(0) = 1$ ($b_0 = const > 0$);

6°. $|\,B(\xi) - B(\xi_1)\,| \le b_1(\,1 + |\xi|^{\gamma_1} + |\xi_1|^{\gamma_1}\,)\,|\,\xi - \xi_1\,|$

($b_1 = const > 0$, $1 \le \gamma_1 \le 2\gamma + 1$).

В 1° $\dot\nu(\xi)$ - звичайна похідна від $\nu(\xi)$.

Узагальнений розв'язок задачі (3) вводиться аналогічно попередній задачі, і для його знаходження будується ітераційний процес (ϕ^1, u^1), (ϕ^2, u^2),..., на кожному кроці якого розв'язується нелінійна система

$$\frac{\partial}{\partial t}E^2\phi - r\frac{\partial(\phi, r^{-2}E^2\phi)}{\partial(r,z)} - E^2_{\nu}(E^2\phi) = r\left[\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial r}B(\varepsilon u) + F_1\right],\ (r,z)\in\Pi_1; \qquad (17_1)$$

$$\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial(\phi,u)}{\partial(r,z)}\right] - \nabla\cdot\left[\lambda(t,r,z,\varepsilon\nabla u)\,\nabla u\right] = F_2,\ (r,z)\in\Pi\ ; \qquad (17_2)$$

з граничними і початковими умовами (2_3), (2_4). Відзначимо, що ця задача має також самостійний фізичний зміст. Доведено, що має місце наступне твердження.

<u>Теорема 3.</u> Якщо:

1) $(\varphi_0, \theta_0) \in W^{(2)}_{2,0}(\Pi_1) \times L_2(\Pi)$;

2) $F_1 \in L_{p,\frac{2p}{3p-2}}(\Pi_1^T)$, $F_2 \in L_{p,\frac{2p}{3p-2}}(\Pi^T)$, $1 < p \le 2$;

3) функції λ та B задовольняють умови 2°- 6°;

4) $0 < \nu_0 \le \nu(t,r,z) \le \nu_1$, $(t,r,z) \in \Pi_1^T$;

5) $M_\nu \equiv \bar\nu - c_0\,\|\,\nu_r\,\|_{\Pi_1^T} > 0$, ($\bar\nu = \min(1, \nu_0)$) ,

то задача (17) для всякого $t \in [\,0,\,T\,]$ має єдиний узагальнений розв'язок $(\phi,u) \in V^{2,0}_{2,0}(\Pi_1^T) \times V^{1,0}_{2+2\gamma,0}(\Pi^T)$.

Одержано апріорні оцінки цього розв'язку:

$$|u|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^t)}+\varepsilon^{2\gamma}\|\nabla u\|^{2+2\gamma}_{2+2\gamma,\Pi^T}\le c_1(\|u_0\|^2_{\Pi}+\|F_2\|^2_{p,\Pi^T})\equiv M_1(u_0,F_2),$$

$$|\phi|^2_{V^{2,0}_{2,0}(\Pi_1^t)}\le c_2 M_\nu^{-2}\left[\left\|\frac{|\nabla\phi_0|}{r}\right\|^2_{\Pi_1}+\|F_1\|^2_{p,\Pi_1^T}+\right.$$

$$\left.+M_1(1+\varepsilon^{1+\gamma_1}M_1^{\gamma_1})\right]\equiv M_1^{-2}M_2(\phi_0,u_0,F_1,F_2),$$

$$|\phi|^2_{V^{3,0}_{2,0}(\Pi_1^t)}\le c_3 M_\nu^{-2}\left[\|\phi_0\|^2_{(2),\Pi_1}+\|F_1\|^2_{p,\Pi_1^T}+\right.$$

$$\left.+M_1(1+\varepsilon^{1+\gamma_1}M_1^{\gamma_1})\right]\equiv M_\nu^{-2}M_3(\phi_0,u_0,F_1,F_2),$$

де константи c_k, $k=\overline{0,3}$, залежать лише від Π_1, Π_2, p та r_1.

З використанням теореми 3 і одержаних оцінок розв'язку (ϕ^{n+1},u^{n+1}) доведена

<u>Теорема 4.</u> Якщо вхідні дані нелінійної задачі (3),(2_3),(2_4) такі, що $(\phi_0,\ u_0)\in W^{(2)}_{2,0}(\Pi_1)\times L_2(\Pi)$; $F_1\in L_{p,\frac{2p}{3p-2}}(\Pi_1^T)$, $F_2\in L_{p,\frac{2p}{3p-2}}(\Pi^T)$, $1<p\le 2$; а функції λ, ν і B мають властивості 1°-6°, $\gamma\ge 1$, $\varepsilon<\left\{\bar\nu C^{-1}M_1^{-1}(u_0,F_2),\ \ \bar\nu(1+CM_1(u_0,F_2))^{-1}\right\}$, то для довільного $t\in[0,T]$ існує її єдиний узагальнений розв'язок $(\phi,u)\in V^{3,0}_{2,0}(\Pi_1^T)\times V^{1,0}_{2+2\gamma,0}(\Pi^T)$.

Одержані теореми при виконанні вказаних в них умов гарантують існування і єдиність розв'язків розглянутих нелінійних задач конвекції в'язкої рідини впродовж довільного інтервалу часу, що дозволяє для їх розв'язування обгрунтовано застосовувати наближені методи. Оскільки при доведенні теорем існування для зведення задач до системи звичайних нелінійних рівнянь використано метод Гальоркіна і доведена його збіжність, природно покласти його в основу таких методів. Отже, т р е т я г л а в а роботи містить результати таких досліджень.

В § 8 введені безрозмірні змінні і параметри, що характеризують задачі конвекції в'язкої рідини, і зроблено аналіз практики застосування методу скінченних різниць (МСР) для їх розв'язування. Висновки, що випливають з цього аналізу, полягають в тому, що: 1) для критичних значень критерію Грасгофа, який характеризує інтенсивність руху рідини, в'язкісні члени в рівняннях руху та енергії за величиною порівнянні з інерційними (нелінійними) членами, і апроксимація останніх скінченними різницями приводить до появи обчислювальної в'язкості, яка спотворює реальну картину поля; 2) МСР не дозволяє ефективно враховувати енергетичну нейтральність нелінійних членів рівнянь; 3) різницеві схеми не мають рівномірної збіжності по малому параметру $\varepsilon = G^{-1}$, що приводить до порушення дискретного принципу максимуму і появи розв'язків з парадоксальними властивостями.

Отже, МСР, будучи ефективним при розв'язуванні задач з помірними G , тут втрачають свою універсальність і можуть приводити до маловірогідних результатів. Ці особливості МСР для розрахунків інтенсивних і турбулентних течій вимагають розробки альтернативних методів, які б дозволяли з достатньою точністю і вірогідністю моделювати процеси в широких діапазонах зміни характеристичних параметрів.

В § 9 на прикладі однієї нелінійної нестаціонарної спряженої осесиметричної задачі, сформульованої в змінних "функція потоку - вихор - температура", розглянуто особливості застосування методу скінченних елементів (МСЕ), в якому істотно враховується апріорна інформація про гладкість розв'язку і геометричні особливості області течії рідини. Це досягається за рахунок розбиття області Ω на трикутні елементи і вибору лагранжевих або ермітових поліномів одного порядку для апроксимації функцій φ , $\omega = (1/r)\, E^2\varphi$ і v. Отже, кожній неперервній функції $v(r,z)$ ставиться у відповідність функція $v^h(r,z)$, яка у кожному трикутнику $\Delta\in\Omega^h$ є кубічним поліномом

$$v^h = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k+l=i} a_{kl}\, r^k z^l \qquad (a_{kl} = a_{lk}) \tag{18}$$

Після введення барицентричних координат, в яких визначаються всі диференціальні оператори задачі, і наближеної формули для задання вихора ω на межі Γ_1, її розв'язок будується у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi^h &= \bar\Phi(t)\, N^T(r,z) && (\Delta \in \Omega^h_1,\ t > 0), \\ \omega^h &= \bar\omega(t)\, N^T(r,z) && (\Delta \in \Omega^h_1,\ t > 0), \\ u^h &= \bar u(t)\, N^T(r,z) && (\Delta \in \Pi^h,\ t > 0). \end{aligned} \tag{19}$$

де $N^T = (N_1, N_2, \dots, N_{m_2})$-вектор кусково-поліноміальних базисних функцій $\bar{\Phi} = (\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots, \bar{\Phi}_{m_1})^T$, $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_{m_1})^T$ і $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{m_2})^T$- вектор-стовпці значень відповідних функцій і їх похідних у вузлових точках триангуляції областей, m_1 і m_2 - кількість елементів в областях Ω_1^h і Π^h відповідно. Після використання методу Гальоркіна на кожному із елементів $\Delta \in \Pi^h$ одержується нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь, яка в матричному записі має вигляд

$$\left.\begin{aligned} m_\omega \frac{d\bar{\omega}}{dt} + [\, d_\omega(\bar{\Phi}) + k_\omega + k_1 \,]\, \bar{\omega} &= b_\omega \\ m_u \frac{d\bar{u}}{dt} + [\, d_u(\bar{\Phi}) + k_u + k_2 \,]\, \bar{u} &= b_u \\ [\, k_\phi + k_3 \,]\, \bar{u} &= b_\phi \end{aligned}\right\} . \qquad (20)$$

де m, d та k (з відповідними індексами) - підматриці глобальних матриць, визначених на розбитті Π^h. Вони можуть бути представлені як в термінах базисних функцій на елементі, так і в термінах вектора поліноміальних членів і його похідних. В останньому випадку більшість інтегралів, що входять в матриці, обчислені точно.

Сформувавши на основі (20) глобальні матриці і застосувавши для розв'язування одержаної системи схему Кранка-Нікольсона, лінеаризуємо її на кожному кроці по часу. Це здійснюється за рахунок того, що $\hat{D}_\omega$ і $\hat{D}_u$, які відповідають нелінійним членам рівнянь конвекції, обчислюються на n-му кроці за допомогою значень функції ϕ_{n-1} ,знайдених на попередньому кроці. Після виконання цієї процедури одержується лінійна система алгебраїчних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} (\hat{M}_\omega + \hat{H}_1 \tfrac{\tau}{2})\, \bar{\omega}_n &= (\hat{M}_\omega - \hat{H}_1 \tfrac{\tau}{2})\, \bar{\omega}_{n-1} + \tfrac{1}{2}\tau\, (B_\omega^n + B_\omega^{n-1}) \\ (\hat{M}_u + \hat{H}_2 \tfrac{\tau}{2})\, \bar{u}_n &= (\hat{M}_u - \hat{H}_2 \tfrac{\tau}{2})\, \bar{u}_{n-1} + \tfrac{1}{2}\tau\, (B_u^n + B_u^{n-1}) \\ (\hat{K}_\phi + \hat{K}_3)\, \bar{\Phi}_n &= B_\omega^n \end{aligned}\right\}, \qquad (21)$$

де $\hat{H}_1 = \hat{D}_\omega(\bar{\Phi}_{n-1}) + \hat{K}_\omega + \hat{K}_1$, $\hat{H}_2 = \hat{D}_u(\bar{\Phi}_{n-1}) + \hat{K}_u + \hat{K}_2$.Матриці в цій системі мають стрічкову структуру. Крок по часу τ вибирався з умови

$$\tau \le \min\left[\left(\frac{h}{G}\right)^{1/2}, \frac{h}{v_{max}}, \frac{h^2}{8} \right] .$$

де $h = max\ h_i$ – характерний лінійний параметр триангуляції, G – число Грасгофа, v_{max} – максимальне значення швидкості конвективного руху рідини. Елементи матриць $\hat{D}_\omega$ і $\hat{D}_u$ визначались за допомогою квадратурної формули Гаусса-Радо, а гранична умова для вихору ω апроксимувалась наближено умовою

$$\omega_n \Big|_{\Gamma_1} = \left(\frac{3}{r\delta^2} \Phi_{n-1} - \frac{\omega_{n-1}}{2} \right) \Big|_{\Gamma_\delta} .$$

На заключному етапі алгебраїчна система (21) розв'язується методом Гаусса з вибором головного елемента.

Необхідно відзначити, що одержати теоретичні оцінки швидкості збіжності і похибки методу не вдалося. В зв'язку з цим була проведена серія методичних розрахунків, в яких:

- проведено кількісне та якісне співставлення результатів розрахунків на більш простих задачах, розв'язаних іншими авторами скінченно-різницевими та проекційними методами;
- проведено вивчення кількісної поведінки розв'язку задачі для різних триангуляцій розрахункових областей;
- вивчався вплив на чисельний розв'язок задачі варіація кроку по часу при реалізації схеми Кранка-Нікольсона;
- вивчалась залежність характеристик термоконвективних течій від величини чисел Прандтля і Грасгофа.

В результаті методичних розрахунків встановлено, що реалізація запропонованого методу забезпечує необхідні для застосувань надійність і точність розв'язку задачі в широкому діапазоні визначальних параметрів і може служити альтернативним варіантом застосування МСР для помірних чисел G. У випадку областей складної геометричної форми для великих G при інших рівних умовах він виявляється більш ефективним, бо дозволяє одержувати докладну картину процесу на великому проміжку часу. Це ілюструє наведений в § 10 розв'язок однієї з задач конвекції при $P = 2{,}5$ і $G = 8{,}6\cdot10^{15}$.

В § 11 описано проекційно-різницевий метод з спеціальним вибором системи координатних функцій, що точно задовольняють граничні умови, орієнтований на розв'язування двовимірних і осесиметричних задач конвекції. В ньому наближений розв'язок шукається у вигляді

$$\psi^{NM}(t,\vec{x}) = \sum_{n=1}^{N} c_n^{NM}(t)\,\varphi_n(\vec{x}) \; , \; u^{NM}(t,\vec{x}) = \sum_{m=1}^{M} c_{N+m}^{NM}(t)\,\theta_m(\vec{x}), \qquad (22)$$

де $(\varphi_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ і $(\theta_m(\vec{x}))_{m=1}^{\infty}$ – системи лінійно незалежних повних в $W_{2,0}^{(2)}(\Omega)$ та $W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ відповідно функцій, а невідомі компоненти $c_n(t)$ є розв'язками стандартної нелінійної системи $N+M$ звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\hat{B}\,\frac{dY}{dt} + \hat{A}\,Y = D(Y) + F\;,\quad Y(0) = Y^0\;, \qquad (23)$$

де

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}^{(1)} & \hat{A}^{(0)} \\ \hline \hat{A}^{(3)} & \hat{A}^{(2)} \end{array}\right], \quad \hat{B} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{B}^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & \hat{B}^{(2)} \end{array}\right] -$$

блочні матриці розміру $(N+M)\times(N+M)$,

$$Y = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_N(t) \\ c_{N+1}(t) \\ \vdots \\ c_{N+M}(t) \end{bmatrix}, \; Y^0 = \begin{bmatrix} c_1^{(0)} \\ \vdots \\ c_N^{(0)} \\ c_{N+1}^{(0)} \\ \vdots \\ c_{N+M}^{(0)} \end{bmatrix}, \; D(Y) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_N(t) \\ d_{N+1}(t) \\ \vdots \\ d_{N+M}(t) \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \\ f_{N+1}(t) \\ \vdots \\ f_{N+M}(t) \end{bmatrix}.$$

Стовпець Y^0 побудований з коефіцієнтів розвинення початкових даних по вибраних базисах, стовпець $D(Y)$, що відповідає нелінійним членам руху та енергії, будується з елементів виду

$$d_{n'}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} c_n(t)\,c_m(t)\,d_{nmn'}\;, & n' = \overline{1,\,N}\;, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} c_n(t)\,c_{N+m}(t)\,d_{nmn'}\;, & n' = \overline{N+1,\,N+M}\;, \end{cases}$$

де $d_{nmn'}$ - деякі інтеграли по Ω. Властивість енергетичної нейтральності нелінійних членів рівняння (23) має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Y^{T}\hat{B}Y\right]+Y^{T}\hat{A}Y=Y^{T}F \qquad (24)$$

Наступним кроком задача Коші (23) за допомогою схеми Кранка-Нікольсона зводиться до нелінійної алгебраїчної системи

$$\left[\hat{B}+\frac{\tau}{2}\hat{A}\right]Y_{s+1}=\left[\hat{B}-\frac{\tau}{2}\hat{A}\right]Y_{s}+\tau D\left[\frac{Y_{s+1}+Y_{s}}{2}\right]+\tau\frac{F_{s+1}+F_{s}}{2},$$

$$Y_0=Y^0. \qquad (25)$$

яка далі розв'язується узагальненим методом Ньютона з використанням, як першого наближення, розв'язку лінійного рівняння (23) при $D(Y)=0$ за неявною різницевою схемою. Застосування цього прийому показало, що для досягнення необхідної точності вимагається 3-4 ітерації.

Одночасний розв'язок як проблеми стійкості алгоритму, створеного на базі описаного вище методу, так і проблеми мінімізації похибки наближеного розв'язку задачі за допомогою невеликого числа координатних функцій досягається за рахунок раціонального вибору останніх. До них поставлені такі основні вимоги:

- для обчислення поля швидкостей $\vec{V}$ наближення ψ^{NM} повинні сходитись до ψ разом із своїми першими похідними по координатах;

- процес формування і обчислення матриць $\hat{A}$ і $\hat{B}$ повинні бути стійкими по відношенню до малих похибок при обчисленнях їх елементів;

- координатні функції повинні точно задовольняти граничні умови задачі і враховувати структуру примежових гідродинамічного та теплового шарів;

- підматриці $\hat{A}^{(1)}$, $\hat{A}^{(2)}$ і $\hat{B}^{(1)}$, $\hat{B}^{(2)}$ повинні бути розрідженими і разом з $d_{nmn'}$ обчислюватись точно.

Ці жорсткі вимоги мінімізують більшість джерел похибок обчислювального характеру на стадії зведення вихідної задачі до задачі Коші (23).

Встановлено, що перелічені вимоги задовольняють координатні функції у вигляді деяких комбінацій зсунутих поліномів Лежандра, побудованих з врахуванням їх ортонормованості в енергетичних просторах лінійних операторів задачі та сильної мінімальності в просторі $L_2(\Omega)$. Системи таких координатних функцій введені в §12-14, де розв'язані конкретні нелінійні задачі конвекції, що мають як самостійне, так і методичне значення.

Четверта глава роботи присвячена дослідженням деяких розв'язків поліпараболічного рівняння (5), які описують спеціальні режими теплопровідності. Для їх одержання за допомогою методів інтегральних перетворень спочатку виведені представлення оператора $P(T)$ і оберненого до нього в просторах зображень Фур'є і Лапласа-Фур'є. Зокрема, якщо $\mathfrak{F}$ - оператор прямого перетворення Фур'є, то для ітерованого оператора T^n має місце представлення

$$\mathfrak{F}\,[\;T^n\;] = (\,-\,i\rho\,+\,|\sigma|^2\,)^n\;, \tag{26$_1$}$$

звідки одержується, що

$$\mathfrak{F}\,[\;P(T)\;] = P(\,-i\rho\,+\,|\vec{\sigma}|^2\,) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(\,-i\rho\,+\,|\vec{\sigma}|^2\,)^k =$$

$$= a_n \prod_{j=1}^{k}(\,-i\rho\,+|\vec{\sigma}|^2\,-\,z_j\,)^{\nu_j}\;, \tag{26$_2$}$$

де $\vec{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m)$, z_j – нулі поліноеа $P(z)$ кратності ν_j.

Із (26$_2$) випливає, що кожному символу

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_n}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{(\,z\,-\,z_j)^{\nu_j}} = \frac{1}{a_n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu_l}\frac{A_l^{(j)}}{(\,z\,-\,z_l\,)^j}$$

можна взаємно однозначно поставити у відповідність оператор

$$\frac{1}{P(-i\rho+|\vec{\sigma}|^2)} = \frac{1}{a_n}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{(\,-i\rho+|\vec{\sigma}|^2-z_j)^{\nu_j}} =$$

$$= \frac{1}{a_n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu_l}\frac{A_l^{(j)}}{(\,-i\rho+|\vec{\sigma}|^2-z_j)^{\nu_j}}\;, \tag{27}$$

де

$$A_l^{(j)} = \frac{1}{(\,\nu_l-\,j\,)!}\;\lim_{z\to z_j}\;\frac{d^{\nu_l-j}}{dz^{\nu_l-j}}\left[\frac{(\,z\,-\,z_l\,)^{\nu_l}}{P(z)}\right] \tag{28}$$

Аналогічні співвідношення одержані і для перетворення Лапласа-Фур'є. За допомогою цих формул в § 16 одержано фундаментальний розв'язок поліпараболічного оператора $P(T)$ довільного степеня у вигляді

$$g(t,\vec{x} \mid t_0,\vec{x}_0) = \text{æ}(t-t_0)\, h(t,\vec{x} \mid t_0,\vec{x}_0) \quad , \tag{29}$$

де h – фундаментальний розв'язок оператора T

$$h(t,\vec{x} \mid t_0,\vec{x}_0) = \frac{\theta(t-t_0)}{[\,4\pi(t-t_0)\,]^{m/2}}\, e^{-|\vec{x}-\vec{x}_0|^2/4(t-t_0)} \,, \tag{30$_1$}$$

$$\text{æ}(t-t_0) = \frac{1}{a_n} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{\nu_l} \frac{(t-t_0)^{j-1} A_l^{(j)}}{(j-1)\,!}\, e^{z_l(t-t_0)} \quad . \tag{30$_2$}$$

Отже, фундаментальний розв'язок оператора $P(T)$ відрізняється від фундаментального розв'язку оператора T лише множником, що є функцією тільки від часу і описує дисипацію енергії. Функції $\text{æ}(t-t_0)$ одержані в явному вигляді для ряду варіантів оператора $P(T)$.

За допомогою фундаментального розв'язку одержано розв'язок задачі Коші

$$P(T)\, u(t,\vec{x}) = f(t,\vec{x}) \quad , \quad T^i u \Big|_{t=0} = \varphi_i(\vec{x}) \qquad (\, i = \overline{1,n-1}\,) \tag{31$_1$}$$

у вигляді

$$u(t,x) = \int_0^{t^+} dt_0 \int_{E^m} fg\, d^m x_0 - \sum_k \Bigg[a_{2k+1} \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \int_{E^m} \Big\{ T^{2k-i} g \Big\}_{t_0=0} \times$$

$$\times\, \varphi_i\, d^m x_0 + a_{2k} \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j \int_{E^m} \Big\{ T^j g \Big\}_{t_0=0} \varphi_{2k-j-1}\, d^m x_0 \Bigg] \,. \tag{31$_2$}$$

Зокрема, якщо $n = 2$, $f = \varphi_1 = 0$, а

$$\varphi_0 = \begin{cases} A \;, & |x| \le a \\ 0 \;, & |x| > a \end{cases} \,.$$

де $A = const > 0$, то із (31$_2$) одержується розв'язок

$$u(t,x) = \frac{A}{2}\, \text{æ}(t) \left[erf\left(\frac{a + x}{2\sqrt{t}} \right) + erf\left(\frac{a - x}{2\sqrt{t}} \right) \right] \,, \tag{32}$$

де

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}} \exp(-a_1 t/2a_2)\left[a_1 \, sh \left[\frac{t\sqrt{D}}{2a_2} \right] + \sqrt{D} \, ch \left[\frac{t\sqrt{D}}{2a_2} \right] \right], & D>0 \\ \frac{1}{\sqrt{D}} \exp(-a_1 t/2a_2)\left[a_1 \sin \left[\frac{t\sqrt{D}}{2a_2} \right] + \sqrt{D} \cos \left[\frac{t\sqrt{D}}{2a_2} \right] \right], & D<0 \end{cases}$$

($D=a_1^2-4a_0a_2$). Показано, що цей розв'язок, як і ряд інших одержаних розв'язків біпараболічного рівняння, має істотно відмінні властивості від розв'язків рівняння теплопровідності. Зокрема, для розв'язку (32) характерна поява поодинокої хвилі, що рухається в напрямі осі x з монотонно спадаючою по t амплітудою.

В § 17 введена функція впливу $G(t,\vec{x}|t_0,\vec{x}_0)$ поліпараболічного оператора $P(T)$ і одержано інтегральне представлення розв'язку початково-граничної задачі, яке має вигляд

$$u(t,\vec{x}) = \int_0^{t^+} dt_0 \int_\Omega f G d^m x_0 -$$

$$- \sum_k \left\{ a_{2k} \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j \left[\int_\Omega \left((\bar{T}^j G) \, T^{2k-j-1} u \right)_{t_0=0} d^m x_0 - \right.\right.$$

$$\left. - \int_0^{t^+} dt_0 \int_\Gamma \left\{ (\bar{T}^j G) \nabla T^{2k-j-1} u + (T^j u) \nabla \bar{T}^{2k-j-1} G \right\} \cdot \vec{n}_0 d\gamma_0 \right] +$$

$$+ a_{2k+1} \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l \left[\int_\Omega \left[(\bar{T}^{2k-l} G) \, T^l u \right]_{t_0=0} d^m x_0 - \right.$$

$$\left.\left. - \int_0^{t^+} dt_0 \int_\Gamma \left[(\bar{T}^l G) \nabla T^{2k-l} u + (T^l u) \nabla \bar{T}^{2k-l} G \right] \cdot \vec{n}_0 d\gamma_0 \right] \right\}, \qquad (33)$$

де $\Omega \in E^m$ - обмежена область простору E^3 з регулярною однозв'язною межею Γ, $\vec{n}$ - зовнішня нормаль до неї.

На прикладі однієї одновимірної задачі для біпараболічного рівняння, розв'язок якої, одержаний за допомогою формули (33), має вигляд

$$u(t,x) = u_1(t,x) + \varphi_1 t + w_2 x \; erfc\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right] + (w_1 - \varphi_0)\frac{x}{\sqrt{\pi t}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right] - 2\varphi_1\left[x\sqrt{t}\; ierfc\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right] - 2\, ti^2 erfc\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right]\right], \quad (34)$$

де φ_0, φ_1, w_1 і w_2 – деякі сталі, а

$$u_1(t,x) = \varphi_0 + (w_1 - \varphi_0)\, erfc\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right] - \quad (35)$$

розв'язок класичної задачі

$$T\, u(t,x) = 0 \qquad (0 \le x < \infty\,,\; t > 0)\,;$$
$$u(0,x) = \varphi_0\,,\quad u(t,0) = w_1\,,\quad \lim_{x\to\infty} u_x(t,x) = 0\,,$$

показано, що ці розв'язки принципово відрізняються. Зокрема, для (34) характерна поява через деякий період процесу сплеску, амплітуда якого росте з часом, а сам він рухається в напрямі осі x. При цьому, якщо $x_{max}(t)$ – координата максимуму сплеску, то для фіксованого t при $x \gg x_{max}(t)$ розв'язок (34) прямує до розв'язку (35).

В § 18 вивчаються автомодельні фінітні розв'язки

$$u(t,x) = \begin{cases} w_A(t,x)\,, & 0 \le x < x_\varphi(t)\,, \\ 0\,, & x \ge x_\varphi(t)\,, \end{cases} \quad (36)$$

одновимірного біпараболічного рівняння

$$P(T)\, u \equiv T^2 u(t,x) = 0\,, \quad (37)$$

яке дозволяє одержувати точні розв'язки в замкнутій аналітичній формі.

Доведено, що це рівняння має розв'язки типу (36)

$$w_A(t,x) = \exp(\beta t)\, \varphi(\xi)\,,\quad \xi = x - v t\,; \quad (38)$$

$v = const > 0$ – швидкість хвилі, β – коефіцієнт затухання. Вони є тепловими хвилями з скінченною швидкістю поширення збурень. Прикладами одержаних розв'язків з такими властивостями є:

$$w_A(t,x) = c\, \exp(\beta t)\left[\frac{4r_2+v}{4r_1+v}\exp(r_1(x-vt)) - \exp(r_2(x-vt))\right],\; \beta=-v^2/8;$$

$$w_A(t,x) = c\,\exp(\beta t)\left\{\left[\frac{\upsilon(r_2-r_1)(x-\upsilon t)}{4r_1+\upsilon}-1\right]\exp(r_1(x-\upsilon t)) + \right.$$

$$+\exp(r_2(x-\upsilon t)) + \frac{\upsilon\sqrt{\upsilon^2+4\beta}}{2(\upsilon^2+8\beta)}\left[\sqrt{\upsilon^2+4\beta}-\upsilon\right](x-\upsilon t)\times$$

$$\left.\times\left[-\frac{4r_2+\upsilon}{4r_1+\upsilon}\exp(r_1(x-\upsilon t)) + \exp(r_2(x-\upsilon t))\right]\right\}, \quad -\upsilon^2/8 < \beta < 0 ;$$

$$w_A(t,x) = c\,\exp(\beta t)\,(x-\upsilon t)\exp(r(x-\upsilon t))\left[\frac{\upsilon^2}{24}(x-\upsilon t)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\upsilon}{2}(x-\upsilon t)+1\right], \qquad \beta = -\upsilon^2/4 ,$$

де $0 \le x \le \upsilon t$, $c = const$, $r = -\upsilon^2/4$, $r_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\upsilon \pm \sqrt{\upsilon^2+4\beta}\right]$.

Розглядаючи автомодельні розв'язки, що відповідають степеневому граничному режиму для рівняння (37), одержано наступні твердження.

Теорема 5. Множина розв'язків біпараболічного рівняння $T^2u=0$ містить в собі підмножину с п а д н и х при $x \to \infty$ фінітних розв'язків виду

$$u_A(t,x) = \begin{cases} (1+t)^{\alpha}\,\varphi\left[\dfrac{x}{\sqrt{1+t}}\right], & 0 \le x < \xi_\varphi(1+t)^{1/2}, \\ 0, & x \ge \xi_\varphi(1+t)^{1/2}, \end{cases} \tag{39}$$

які відповідають степеневому граничному режиму $u(t,0)=(1+t)^{\alpha}$ і при $0 \le \alpha < 1$ описують теплову хвилю з скінченною швидкістю поширення збурень; при $\alpha \ge 1$ таких хвиль не існує.

Теорема 6. Множина розв'язків рівняння $T^2u=0$ містить в собі підмножину необмежено з р о с т а ю ч и х при $x \to \infty$ фінітних автомодельних розв'язків виду (39), що відповідають степеневому граничному режиму $u(t,0)=(1+t)^{\alpha}$ і для довільного $\alpha > 0$ описують теплову хвилю з скінченною швидкістю поширення збурень.

Заключна частина § 18 присвячена дослідженню умов існування автомодельних розв'язків рівняння (37), які описують режими з загостренням (див. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболичьских уравнений.- М.: Наука, 1987). Нехай розв'язок $u(t,x)$ поліпараболічного рівняння необмежено зростає за скінчелний проміжок часу $[0,T_0)$. Будемо вважати, що реалізується

1) HS - режим з загостренням, коли $u(t,x) \to \infty$ при $t \to T_0^-$ для всіх $x \geq 0$;

2) S - режим з загостренням, якщо $u(t,x) \to \infty$ при $t \to T_0^-$ для $x \in [0,x_0)$, а при $x \in [x_0,\infty)$ ця функція обмежена зверху рівномірно по $t \in [0,T)$;

3) LS - режим з загостренням, якщо $u(t,0) \to \infty$ при $t \to T_0^-$, а для $x > 0$ вона обмежена зверху рівномірно по $t \in [0,T_0)$.

Отже, у випадку 2) має місце локалізація енергії, а у випадку 3) - граничний режим з загостренням.

Спочатку розглянуто автомодельні розв'язки рівняння (37) вигляду

$$w_A(t,x) = (T_0 - t)^{-\alpha}\varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{T_0 - t}}, \ \alpha > 0, \tag{40}$$

що відповідають степеневому граничному режиму з часом загострення T_0. Одержано наступне твердження.

Теорема 7. Множина розв'язків рівняння $T^2u=0$ не містить фінітних автомодельних розв'язків виду (38),(40), а функція $w_A(t,x)$ описує в LS-режимі з загостренням процес переносу енергії з нескінченною швидкістю поширення збурень.

Якщо ж в (40)

$$\xi = \frac{x_0 - x}{\sqrt{T_0 - t}}, \quad x_0 = const > 0, \tag{41}$$

то, як і в попередньому випадку, найбільш загальний вигляд функції $\varphi(\xi)$ буде

$$\varphi(\xi) = a_1 H_{-2\alpha}(\xi/2) + a_2 H_{-2\alpha-2}(\xi/2) + \\ + \exp(-\xi^2/4)\left[a_3 H_{2\alpha-1}(\xi i/2) + a_4 H_{2\alpha+1}(\xi i/2)\right], \tag{42}$$

де $H_\nu(z)$ - поліноми Ерміта, a_k, $k = \overline{1,4}$ - довільні сталі.

Координата фронту теплової хвилі вводиться як $x_\varphi = x_0 - \xi_\varphi (T_0 - t)^{1/2}$, де $0 \leq \xi_\varphi < x_0/T_0^{1/2}$. З цього видно, що півширина теплової хвилі при $t \to T_0^-$ прямує до x_0, а $x_\varphi(t)$ є неспадною функцією (фізично це означає, що енергія, яка надходить в систему, зосереджується в зоні, ефективний розмір якої не скорочується). Має місце

Теорема 8. Множина фінітних розв'язків рівняння $T^2u=0$ містить підмножину розв'язків

$$u_A(t,x) = \begin{cases} w_A(t,x) , & 0 \le x < x_0 - \xi_\varphi(T_0-t)^{1/2} , \\ 0 , & x \ge x_0 - \xi_\varphi(T_0-t)^{1/2} , \end{cases} \quad (43)$$

де $w_A(t,x)$ визначається (40),(41), які при $\alpha = (n + 1)/2$, $n = 0,1,2,\ldots$; описують локаліз цію тепла в S-режимі з загостренням.

Отже, тут існук ть два типи фінітних розв'язків, які описують цей ре им: 1) зупинена теплова хвиля (при $\xi_\varphi = 0$); 2) хвиля, що не поширюється за точку $x=x_0$ (при $\xi_\varphi > 0$). Прикладом останньої може бути розв'язок рівняння $T^2u = 0$, який одержується з (42) при $n = 1$, $a_1 = 0$, $a_3 = -i$, і має вигляд (43), де

$$w_A(t,x) = \frac{x_0 - x}{(T_0-t)^{3/2}} \; exp \left[\frac{(x_0-x)^2}{4(T_0-t)} \right] , \quad 0 \le x < x_0 .$$

Теорема 9. Нехай з (42) $a_1 = 0$ і виконується одна з умов:

1) $a_4 = 0$, $a_2 \ne 0$, а у вир зі (40) $\alpha \ge -3/4$, але $\alpha \ne -1$;

2) $a_3 = 0$, а у виразі (40) α - довільне дійсне число,

то рівняння $T^2u = 0$ не має фінітних розв'язків типу (43).

Теорема 10. Нехай в (42) $a_2 = a_3 = 0$. Тоді

1) якщо $\alpha = n + 1/2$, $n = 0,1,2,\ldots$, то існують автомодельні фінітні розв'язки типу (43) рівняння $T^2u = 0$, що описують S-режим з загостренням і є зупиненими хвилями;

2) якщо $\alpha = n$, то таких розв'язків не існує.

В § 19 проведено узагальнення одержаних вище результатів на випадок біпараболічного рівняння вигляду

$$P(T)\, u \equiv (\alpha_1 T + \alpha_2 T^2)\, u(t,x) = 0 \quad . \quad (44)$$

Фінітний розв'язок цього рівняння типу (38), якщо він існує, при $0 \le x < x_\varphi(t)$, $t > 0$ має задовольняти умови

$$u(t,0) = u_1(t) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 + \alpha_2 T)\, u(t,0) = 0 \; ;$$

$$u(0,x) = u_0(x) \; , \; (\alpha_1 + \alpha_2 T)u(0,x) = \alpha_2 \left[\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] . \quad (45)$$

Для нього спочатку розглядаються граничні режими, які задовольняють умову

$$u(t,0) \le A\,(T_0 - t)^{\nu} \exp(a(T_0-t)^{\mu}) \quad (-1<\mu\le 0\ ;\ A,a=const>0) \quad (46)$$

З істотним використанням теорем порівняння для параболічних рівнянь доведені наступні твердження.

Теорема 11. Якщо ν - дійсне і в (45) $u_1(t) \to \infty$ при $t \to T_0^-$, то існує фінітний розв'язок $u(t,x)$ рівняння $P(T)\,u = 0$, що задовольняє умови (45) і описує LS-режим з загостренням з скінченною швидкістю поширення збурень.

Теорема 12. Якщо

$$u_1(t) \ge A\,(T_0 - t)^{\nu} \exp(a(T_0-t)^{-1}) \quad (A,a=const>0, \nu \in \mathbb{R}),$$

то існує фінітний розв'язок рівняння $P(T)u = 0$ типу (38), що задовольняє умови (45) і описує S - режим з загостренням з скінченною швидкістю поширення збурень.

Теорема 13. Якщо для біпараболічного рівняння $P(\hat{T})u = 0$ граничний режим такий, що

$$u_1(t) \ge A\,(T_0 - t)^{\nu} \exp(a(T_0-t)^{-\mu}),$$

де $\mu > 1$, ν - дійсне, a, $A = const > 0$, то серед множини розв'язків його містяться фінітні, які задовольняють умови (45) і описують HS-режим з загостренням і з скінченною швидкістю поширення збурень.

В п'ятій главі роботи розглянуто деякі питання, пов'язані з математичним описанням процесів переносу тепла в речовинах з тепловою пам'яттю за допомогою еволюційного інтегро - диференціального рівняння (11) та конструктивного розв'язування спеціальних граничних задач для нього. Зокрема, в § 20 показано, що зображення Лапласа-Фур'є оператора M має вигляд

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{F}_x[\,M\,] = s\left[\,s\,E(s) + |\sigma|^2\,L(s)\,\right], \quad (47)$$

що дозволяє одержати фундаментальний розв'язок його для ядер релаксації, які задовольняють тільки умови зображення по Лапласу:

$$g(\tau,\vec{r}) = \frac{i^{-1}}{(2\pi)^{m+1}} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(s\tau)}{s\,L(s)}\,ds \int \frac{\exp(-i(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}))}{|\sigma|^2 + A(s)}\,d^m\sigma, \quad (48)$$

де $\tau = t - t_0$, $r = \vec{r} - \vec{r}_0$, $A(s) = \dfrac{s\,E(s)}{L(s)}$. При цьому, в залежності від розмірності простору E^m,

$$\frac{1}{(2\pi)^m}\int \frac{\exp(-i(\vec{r}\cdot\vec{\sigma}))}{|\sigma|^2 + A(s)}\, d^m\sigma = \begin{cases} \dfrac{\exp\left[-|\vec{r}|\sqrt{A(s)}\right]}{2\sqrt{A(s)}}, & m=1, \\ \dfrac{1}{2\pi} K_0\left[|\vec{r}|\sqrt{A(s)}\right], & m=2, \\ \dfrac{\exp\left[-|\vec{r}|\sqrt{A(s)}\right]}{4\pi|\vec{r}|}, & m=3, \end{cases}$$

де $K_0(z)$ - функція Бесселя уявного аргументу.

Одержані представлення фундаментального розв'язку (48) для малих і великих значень часу, виявлений його зв'язок з фундаментальним розв'язком $h(\tau,\vec{r})$ класичного оператора теплопровідності. Зокрема, для малих t

$$g(\tau,\vec{r}) = h(\tau,\vec{r}) - \varepsilon_1\left[æ_1\int_0^\tau h(\tau',\vec{r})\,d\tau' + (1-æ_1)\tau\, h(\tau,\vec{r})\right] -$$

$$- \varepsilon_1^2\left[-\tfrac{1}{2}(2 - 3æ_1)\int_0^\tau d\tau'\int_0^{\tau'} h(\xi,\vec{r})\,d\xi - \tfrac{1}{2}(1 - æ_1)^2\tau^2 h(\tau,\vec{r})\right] -$$

$$- \varepsilon_2\left[æ_2\int_0^\tau d\tau'\int_0^{\tau'} h(\xi,\vec{r})\,d\xi + (1 - æ_2)\int_0^\tau \tau' h(\tau',\vec{r})\,d\tau'\right] - \ldots, \quad (49)$$

де $æ_k = \lambda_k/\varepsilon_k$, $\lambda_k = \lambda^{(k)}(0)$, $\varepsilon_k = \varepsilon^{(k)}(0)$.

Доведено, що при $\lambda_0\neq 0$ характер розповсюдження тепла, який описується цим розв'язком, в якісному відношенні близький до того, що дається класичною теорією. Коли ж $\lambda_0=0$, то рівняння (11) описує процес з скінченною швидкістю поширення збурень $v=1/\sqrt{\varepsilon_0}$, що є новим важливим моментом.

В § 21 вивчається питання про особливості проходження затухаючих хвиль вигляду

$$u(t,\vec{x}) = A\exp\left[-\varkappa(\vec{a}\cdot\vec{x}) + i\omega\left[t - (\vec{a}\cdot\vec{x})/v\right]\right], \quad (50)$$

в речовині з пам'яттю для відзначених випадків $\lambda_0\neq 0$ і $\lambda_0=0$. Показано, що (50) є розв'язком рівняння (11) при $f_0=0$ тоді і тільки тоді, коли ядра релаксації задовольняють умову

$$i\,(\,\nu + i\,\omega/v\,)^2\,L(\omega) = \omega\,E(\omega)\,, \qquad (51)$$

де $F(\omega)=\int\limits_0^\infty f(\tau)exp(-i\omega\tau)d\tau$. Як функції в'ї частоти ω в явному вигляді одержані вирази для швидкості і коефіцієнта затухання хвиль, виявлені зв'язки з відповідними величинами для класичного рівняння теплопровідності.

<u>Теорема 14.</u> Якщо проходження температурної хвилі (50) в середовищі з пам'яттю описується рівнянням $Mu(t,\vec{x}) = 0$, то

1) при $\lambda_0\neq 0$ для низьких частот її швидкість і коефіцієнт затухання узгоджуються з значеннями, що даються класичною теорією; для високих частот швидкість і коефіцієнт затухання зростають пропорційно $\omega^{1/2}$, причому швидкість при інших рівних умовах або більша (при $\lambda_0/\varepsilon_0>k/c_v$), або менша (при $\lambda_0/\varepsilon_0<k/c_v$) від значень класичної теорії;

2) при $\lambda_0=0$ швидкість хвилі і коефіцієнт затухання скінченні при довільних великих ω, а амплітуда хвилі монотонно прямує до нуля при $t \to \infty$.

В § 22 подається операторне формулювання початково-граничних задач (11), (12_1) і (11), (12_2) в просторі $L^2(\Omega)=L_2(\Omega)\oplus L_2(\Gamma)$, елементами якого є пари функцій $\bar{u}(\vec{x})=[\,u_0(\vec{x}),u_1(\vec{s})\,]$, а скалярний добуток задається формулою $((\bar{u},\bar{v}))=(u_0,v_0)_\Omega+\langle u_1,v_1\rangle_\Gamma$. З задачами пов'язуються оператори A_1 і A_2, що породжені допоміжними еліптичними задачами і діють за правилами

$$A_1\bar{\varphi} = [\,\mathcal{E}\,\varphi(\vec{x})\,,\,(\,\vec{n}\cdot\nabla\,)\varphi(\vec{s})\,]\,,\; A_2\bar{\varphi} = [\,\mathcal{E}\,\varphi(\vec{x})\,,\,\varphi(\vec{s})\,]\,. \qquad (52)$$

Їх області визначення $D(A_1) = \{\,\varphi(\vec{x}):\ \varphi(\vec{x}) \in C^2(\bar{\Omega}),(\,\vec{n}_2\cdot\nabla\,)\varphi(\vec{s}) = 0\}$ і $D(A_2) = \{\,\varphi(\vec{x}):\ \varphi(\vec{x}) \in C^2(\bar{\Omega}),\varphi(\vec{s})|_{\Gamma_2} = 0\}$ відповідно.

Тоді в просторі $L^2(\Omega)$ задачам (11), (12_1) і (11), (12_2) відповідають операторні задачі Коші (k = 1,2):

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A_k\bar{u} + \varepsilon * \frac{d\bar{v}}{dt} + \lambda * A_k\bar{u} = \bar{f}\,,\quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0\,, \qquad (53)$$

де $\bar{f} = [\,f_0(t,\vec{x},\bar{u}(\vec{x}))\,,\,f_1(t,\vec{s},\bar{u}(\vec{s}))\,]\,,\ \bar{u}_0 = [\,u_0(\vec{x})\,,\,u_0(\vec{s})\,]$.

За означенням, операторне рівняння $A_1\bar{\varphi} = \beta\,\bar{\varphi}$ еквівалентне граничній задачі

$$\mathcal{E}\varphi = \beta\varphi, \quad \vec{x} \in \Omega ; \tag{54}$$
$$(\vec{n}_1 \cdot \nabla)\varphi = \beta\varphi, \ \vec{s} \in \Gamma_1 ; \ (\vec{n}_2 \cdot \nabla)\varphi = 0, \ \vec{s} \in \Gamma_2$$

а рівняння $A_2 \overline{\varphi} = \beta \overline{\varphi}$ – задачі

$$\mathcal{E}\varphi = \beta\varphi, \quad \vec{x} \in \Omega ;$$
$$\varphi = -\beta(\vec{n}_1 \cdot \nabla)\varphi, \ \vec{s} \in \Gamma_1 ; \ \varphi = 0, \ \vec{s} \in \Gamma_2 . \tag{55}$$

Істотною особливістю цих задач є входження спектрального параметра як в рівняння, так і в граничні умови, що приводить до ряду корисних в теоретичному і прикладному відношеннях висновків відносно спектра власних значень і апроксимативних властивостей власних елементів. Зокрема, довільний елемент $\overline{f} \in L^2(\Omega)$ може бути наближений рядом

$$\overline{f}(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overline{\varphi}_n(\vec{x}), \ (f_n = \omega_n^{-2} ((\overline{f}, \overline{\varphi}_n)), \ \omega_n = \|\overline{\varphi}_n\|), \tag{56}$$

по ортонормованій системі власних функцій оператора A_1, який збігається в нормі простору $L^2(\Omega)$, тобто як в області Ω, так і на її межі Γ. Крім того, мають місце наступні твердження.

<u>Лема 3.</u> Якщо $\Gamma \in C^{p}$, $p > 0$ – ціле, то знайдеться константа $\mu > 0$ така, що для довільної функції $u \in W_2^{(p)}(\Omega)$ має місце нерівність

$$\| u \|_{(p),\Omega} \le \mu \| A_1^{\nu} \overline{u} \| ,$$

де $\nu = p - 1/2$, $\overline{u} = [\, u(\vec{x}),\ u(\vec{s})\,]$.

<u>Теорема 15</u>. При виконанні умов леми узагальнений ряд Фур'є (56) функції $f(\vec{x}) \in W_2^{(p)}(\Omega)$ з слідом $f(\vec{s})$ на Γ_1 по власних функціях оператора A_1 збігається в нормі $W_2^{(p)}(\Omega)$, а для його коефіцієнтів має місце оцінка

$$| f_n | < c \frac{\beta_n^{-p+1/2}}{\omega_n^2} , \tag{57}$$

де β_n – власне значення оператора A_1. При $p > 1 + [m/2]$, $m \ge 1$, ряд збігається в $C^{p-1-[m/2]} \subset C(\Omega)$.

У випадку оператора A_2 задача (55) зведена до дослідження операторного рівняння

$$\varphi(\vec{x}) = \beta P \varphi - \frac{1}{\beta} Q\varphi , \tag{58}$$

з цілком неперервними операторами P і Q, дослідження якого показало, що при $m \ge 2$ спектр оператора A_2 складається з двох серій дійсних власних значень: додатних з точкою згущення на нескінченності і від'ємних з точкою згущення в нулі. Слід зауважити, що при $m = 1$ число від'ємних власних значень не перевищує двох.

В § 23 метод апроксимації рядами по власних функціях оператора A_1 застосовано до розв'язування лінійної операторної задачі (53), коли $\bar{f}$ не залежить від $\bar{u}$. Її розв'язок шукається у вигляді

$$\bar{u}(t,\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, \bar{e}_n(\vec{x}) \,, \tag{59}$$

де функції $u_n(t)$ визначаються як розв'язки задачі Коші для звичайного інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{du_n}{dt} + \beta_n u_n + \dot{\varepsilon} * \frac{du_n}{dt} + \beta_n (\dot{\lambda} * u_n) = f_n(t), \quad u_n(0) = \mathring{u}_n \,.$$

До нього застосовано перетворення Лапласа, в результаті чого коефіцієнти в представленні (59) одержані у вигляді

$$u_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(st)(F_n + \varepsilon_\infty \mathring{u}_n) \, ds}{s\, [\dot{E}(s) + 1\,] + \beta_n\, [\,\dot{L}(s) + 1\,]} \,, \tag{60}$$

де шлях інтегрування в комплексній площині s лежить справа від усіх особливих точок підінтегральної функції; $\dot{E}(s) = \mathcal{L}\,[\dot{\varepsilon}]$, $\dot{L}(s) = \mathcal{L}\,[\dot{\lambda}]$, $F_n = \mathcal{L}\,[f_n]$.

В заключній частині цього параграфу наведено кілька прикладів ортонормованих в $L^2(\Omega)$ власних функцій оператора A_1 при $\mathcal{E} \equiv -\nabla^2$ для обмежених областей Ω в циліндричній і сферичній системах координат.

В § 24 досліджується одновимірна задача типу (55), для якої оператор A_2 діє за законом

$$[\; u(x)\,,\; u'(0),\; -u'(1)\;] \;\rightarrow\; [\; -u''(x) + q u(x),\; u(0),\; u(1)] \,. \tag{61}$$

Обчислено від'ємні власні значення цього оператора при $q = const$, досліджена асимптотика власних значень, яка має вигляд

$$\gamma_n^* \sim (n-1)\pi - \frac{(n-1)\pi}{6} + \left[\left(\frac{(n-1)\pi}{6} \right)^2 + \frac{2}{3(n-1)^2\pi^2} \right]^{1/2} + \ldots$$

і розглянуто два методичні приклади застосування власних функцій задач з параметром в рівнянні і граничних умовах для розв'язування двоточкових одновимірних задач. Основний результат складає

Теорема 16. Якщо функція $\vec{f}=[f(x), f'(0), -f'(1)] \in L^2[0,1]$ має в околі точки $x \in (0,1)$ обмежену варіацію, то її ряд Фур'є по власних функціях операто̧ра A_2 збігається в нормі $L^2[0,1]$ до $\vec{f}$, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n(x,\beta_n) = \begin{cases} f(+0) & , x = 0 , \\ \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] & , x \in (0,1), \\ f(1-0) & , x = 1 , \end{cases} \qquad (62)$$

де

$$a_n = \frac{k_n}{W'(\beta_n)} \left[\int_0^1 c(x,\beta_n) f(x) dx + c'(1,\beta_n) f'(0) + f'(1) c'(1,\beta_n) \right].$$

Ці формули мають конструктивний характер. Власні функції і рівняння для визначення власних значень операторів A_2 для різних комбінацій граничних умов в точках $x = 0$ і $x = 1$ подані в таблицях.

В § 2 вивчаються питання існування і єдиності розв'язку нелінійної істотно неоднорідної задачі

$$M\, u(t,\vec{x}) = f_0(t,\vec{x},u) \quad , \quad \vec{x} \in \Omega \quad ; \qquad (63)$$

$u(0,\vec{x}) = u_0(\vec{x})$; $N\, u(t,\vec{s}) = f_1(t,\vec{s},u)$, $\vec{s} \in \Gamma_1$; $(\vec{n}_2 \cdot \nabla) u(t,\vec{s}) = 0$, $\vec{s} \in \Gamma_2$, яка за допомогою оператора A_1 зведена до операторного рівняння типу (53) в просторі $L^2(\Omega)$. За допомогою дробових степенів оператора, теорем про підвищення гладкості і теорем вкладання для соболевських просторів одержані наступні локальна і глобальна теореми існування.

Теорема 17. Нехай ядра релаксації аналітичні і задовольняють умови

$$\varepsilon(0) > 0 \ , \ \dot{\varepsilon}(0) \ge 0 \ , \ \varepsilon(\infty) \ge \varepsilon(0) \ , \ \lambda(0) > 0 \ , \ \dot{\lambda}(0) \ge 0 \ .$$

Тоді, якщо

1) $u_0(\vec{x}) \in C^2(\bar{\Omega})$ і $(\vec{n}_2 \cdot \nabla) u_0 = 0$ на Γ_2 ;

2) $f_j(t,\vec{x},\vec{u})$, $j = 0,1$, мають неперервні перші похідні по t і u;

3) $|f_j(t,\vec{x},\vec{u})|^2 \le |f_j(t,\vec{x},0)|^2 + c_1 (1 + |u|^{m+2})$, де $c_1 = const > 0$, $m \ge 1$,

то при $t \in [0,t_0]$ існує єдиний розв'язок задачі (63); при цьому

$\bar{u} \in W_2^{(3\nu/2)}(\Omega) \oplus W_2^{(\nu)}(\Gamma)$, $0 \le \nu < 1$.

Вона гарантує існування і єдиність розв'язку для малих значень часу. Якщо нелінійність задачі (63) слабка

$$\| f(t_1,\bar{u}) - f(t_2,\bar{w}) \| \le c_0 \| A_1^{\nu}\bar{u} - A_1^{\nu}\bar{w} \| ,$$

то має місце

Теорема 18. Якщо ядра релаксації задовольняють умови попередньої теореми і, крім того,

1) $u_0(\vec{x}) \in C^3(\Omega)$ і $(\vec{n}_2 \cdot \nabla)u_0 = 0$ на Γ_2 ;

2) $f_j(t,\vec{x},\bar{u})$, $j = 0,1$, мають неперервні перші похідні по t , x і u;

3) $\partial f_j/\partial u$ рівномірно обмежені по t і x ;

4) $|f_j(t,\vec{x},\bar{u})|^2 \le |f_j(t,\vec{x},0)|^2 + c_2 (1 + |u|^{m+2})$,

то існує єдиний розв'язок задачі (63) на довільному інтервалі часу $[0,T]$ і при цьому $u \in W_2^{(3/2+\nu)}(\Omega)$, $\nu < 1/4$.

В § 26 викладено наближені методи інтегрування лінійних і нелінійних операторних рівнянь теплопровідності середовищ з пам'яттю, в яких на етапі зведення до задачі Коші для системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь застосовуються проекційні методи типу Гальоркіна, в яких для наближення розв'язків істотно використовуються власні функції операторів A_1 і A_2. Якщо в вихідній нелінійній задачі можна виділити малий параметр $0 < \varepsilon \ll 1$, що входить як множник при нелінійності в правій частині (наприклад, за рахунок переходу до безрозмірного виду), то вона попередньо зводиться до рекурентної послідовності лінійних операторних задач і до них застосовуються викладені методи.

Основні положення дисертації опубліковані в монографіях

1. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. - Киев: Наук. думка, 1976. - 282 с.

2. Галицын А.С. Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. - Киев: Наук. думка, 1983. - 235 с.,

а також в наступних статтях

3. Об одном методе решения задачи для уравнения газовой атаки с разрывным граничным условием // Изв. вузов. Математика. - 1973. -

N 5.- С. 18-19.

4. Тепловой режим изотермической емкости в пластовом потоке // Моделирование задач теплофизики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 197.. - С. 114-123.

5. Некоторые задачи аксиально-радиального потока тепла // Смешанные краевые задачи и вопросы математического моделирования. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. - С. 117-132.

6. Об одном классе задач тепломассопереноса, разрешимых в вытянутых сфероидальных функциях // Математическое исследование процессов фильтрации и тепломассопереноса. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. - С. 157-167.

7. Разложения в бесконечной области функций в интегралы по вытянутым сфероидальным функциям и некоторые их приложения // Физико-технические приложения краевых задач. - Киев: Наук.думка, 1978. - С. 47-59.

8. Краевая задача о нестационарном тепловом взаимодействии вытянутой сфероидальной полости с неограниченной средой // Прикладные методы исследования физико-механических процессов. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. - С. 25-35.

9. К определению температурного поля во внешности сферы с шероховатой поверхностью // Исследования по краевым задачам теплофизики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. - С. 84-80.

10. О решении некоторых задач теории теплопроводности в функциях Кельвина // Методы и средства моделирования физических процессов - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. - С. 19-31.

11. Пространственная задача нестационарной теплопроводности для внешности двух непересекающихся разновеликих сфер // Математические методы исследования физических полей. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. - С. 112- 135.

12. Явный вид решения некоторых задач для уравнения теплопроводности в эллиптических координатах // Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. - Киев: Наук. думка, 1977. - С. 18-28 (разом з О.М.Жуковським).

13. Интегральные ПГ- преобразования и их приложения.- Киев, 1978. - 52 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.39) (разом з О.М.Жуковським).

14. Алгоритм численного решения нестационарной сопряженной задачи конвективно-кондуктивного теплообмена в неизотермической

полости// Прикладные методы исследования физико-механических процессов. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. - С. 7-24 (разом з Г.А.Легейдою).

15. К численному исследованию динамики тепловой конвекции в замкнутом обьеме вязкой жидкости методом конечных элементов // Математические вопросы механики сплошных сред и теплофизики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. - С. 14-22 (разом з Г.А.Легейдою).

16. Об одном проекционном алгоритме решения существенно неоднородных задач для уравнений параболического типа // Там же - С. 61 - 66 (разом з О.М.Жуковським).

17. Об одной экономичной разностной схеме численного решения уравнений тепловой конвекции в цилиндрической лакуне // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. - С. 36-40 (разом з В.П.Караголовим).

18. Нестаціонарна теплопровідність гірського масиву при наявності на поверхні виробки суцільного кріплення // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1982. - №9. - С. 65 - 67 (разом з В.П.Черняком).

19. О термомеханическом состоянии подземной выработки, заполненной хорошо перемешиваемой жидкостью // Прикл. математика и механика - 1983. - 47, N 4. - С. 679-683.

20. Построение решений некоторых неоднородных задач для диффузионного уравнения с затухающей памятью.- Киев,1983.- 43 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.51).

21. Нестационарная теплопроводность горного массива вокруг выработки с высокотеплопроводным сплошным креплением // Докл. АН УССР. Сер.А. - 1983. - N 4. - С. 83-87.

22. Аксиально-симметрические квазилинейные сопряженные задачи конвекции и проекционно-сеточный метод их решения.- Киев, 1984. - 46 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.22) (разом з В.Б.Мосеєнковим і Г.А.Легейдою).

23. Про однозначну розв'язність однієї квазілінійної задачі нестаціонарної конвекції в'язкої рідини // Доп. АН УРСР. Сер. А. - 1984. - N 12. - С. 7-10 (разом з В.Б.Мосеєнковим і Г.А.Легейдою).

24. О применении метода Галеркина к решению осесимметричной задачи конвекции вязкой несжимаемой жидкости в замкнутом обьеме. - Киев, 1985. - 47 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.40).

25. Обобщение метода конечных интегральных преобразований на случай неоднородных краевых задач // Исследования по теории функций комплексной переменной с приложениями к механике сплошных сред. - Киев: Наук.думка, 1986. - С. 172-183.

26. Вопросы численного решения начально-граничных задач конвекции в ограниченном объеме вязкой жидкости методом конечных элементов. - Киев, 1987. - 57 с. -(Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87. 1) (разом з Г.А.Легейдою).

27. Прямой метод решения неоднородных задач теплопроводности в средах с затухающей тепловой памятью // Процессы переноса тепла и вещества. - Киев: Наук.думка, 1985. - С. 108-118.

28. Решение нелинейных задач конвекции в замкнутом объеме вязкой жидкости проекционно-разностным методом. - Киев, 1987. - 43с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.9) (разом з О.М.Жуковським і В.П.Карагодовим).

29. О тепловом режиме подземной лакуны, содержащей хорошо перемешиваемую жидкость // Инж.-физ. журн.- 1984.- 46, N 3. - С. 518-520.

30. Нелинейная задача для эволюционного уравнения, учитывающего тепловую память среды // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1987. - N 10. - С. 11-15 (разом з Л.В.Слюсаревою).

31. О представлении решения некоторых существенно неоднородных граничных задач обобщенными рядами Фурье по собственным функциям // Теория приближения функций.-М.: Наука, 1987. - С. 107-109 (разом з О.М.Жуковським).

32. Об однозначной разрешимости в целом осесимметричной задачи конвекции вязкой термически неоднородной жидкости // Укр.мат.журн. - 1989. - 41, N 7. - С. 885-893 (разом з В.Б.Мосеенковим).

33. Нова математична модель дифузійних процесів зі скінченною швидкістю // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1988. - N8. - С. 21-26 (разом з В.І.Фущичем і А.С.Полубінським).

34. О новой математической модели процессов теплопроводности // Укр.мат. журн. - 1990. - 42, N 2.- С. 237-246 (разом з В.І.Фущичем і А.С.Полубінським).

35. Об одном методе решения существенно неоднородных задач теплопроводности с граничными условиями импедансного типа // Специальные граничные задачи теории теплообмена. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С. 26-41 (разом з Л.Г.Фурсевич).

Підп. до друку 14.04.93. Формат 60×84/16. Папір друк. Оф
Ум. друк. арк. 2,56. Ум. фарбо-відб. 2,56. Обл.-вид. арк.
Тираж 100 пр. Зам.169 . Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3