Академія наук України
Ордена Трудового Червоного Прапора
Інститут математики

На правах рукопису

Шах Лариса Георгіївна

Апроксимаційні критерії та еквівалентність скінченно-різницевих характеристик гладкості функцій

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття вченого ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993

Роботу виконано у відділі теорії функцій Інституту математики АН України

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, ШЕВЧУК І.О.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор ТАМРАЗОВ П.М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент ГАЛАН Д.М.

Провідна установа - Дніпропетровський державний університет

Захист дисертації відбудеться "15" червня 1993р. о __ годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою:

252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Вчений секретар спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Теорія вкладення функціональних класів є важливим розділом теорії функцій, який має чисельні застосування як в самій теорії функцій, так і в теорії диференціальних рівнянь.

Останні 15 років вітчизняними та закордонними математиками досліджувалося питання про необхідні і достатні умови вкладення класів $H[\bar\varepsilon]$ функцій, які визначаються за допомогою послідовності найкращих наближень, в класи W^r з обмеженою r-ю похідною, та більш загальні класи. Якщо для періодичних функцій відповідні питання в основному вирішені, то в не періодичному випадку ряд питань залишалися відкритими. Зокрема, про вкладення класу $H[\bar\varepsilon]$ до класу функцій C^α з неперервною похідною дробового порядку $\alpha>0$, до класу К.І. Бабенка B^r функцій, що мають $r-1$-у локально-абсолютно неперервну похідну на $(-1,1)$ та $|f^{(r)}(x)(1-x^2)^{r/2}|\le const<\infty$, та інших класів.

Значна частина роботи пов'язана з модулем гладкості, запровадженим З. Діціаном та В. Тотіком (далі м.г.Д.Т.). Вони застосували цю характеристику при дослідженні К-функціоналів, отриманні конструктивної характеристики в термінах рівномірної оцінки наближення функцій многочленами в інтегральних метриках та при вивченні ряду інших питань.

В дисертації розглядаються м.г.Д.Т. в рівномірній метриці, через те, що і в цьому випадку вони виявилися вельми вдалим апаратом в різних задачах теорії апроксимації. При цьому акцент робиться на отриманні зв'язку між м.г.Д.Т. і модулем гладкості від функції $\tilde f=f(\cos t)$, (далі – тригонометричний модуль гладкості).

На сьогодні ця тематика актуальна і інтенсивно розвивається у ряді монографій та статей вітчизняних і закордонних математиків, (див. монографії Ditzian Z., Totik V., Шевчука І.О., роботи De Vore R., D. Jiang, D. Leviatan, D. Lubinsky, K. Kopotun, M. Hasson, T. Xie, X.M. Yu, X. Zhou, І.О. Шевчук та інші).

Мета роботи. Знаходження необхідних і достатніх умов вкладення класу $H[\bar\varepsilon]$ до класу функцій B^r та більш загальні

класи, які характеризуються модулем гладкості Діціана -Тотіка, неперервними похідними дробового порядку.
Дослідження еквівалентності модуля гладкості Діціана- Тотіка тригонометричному модулю гладкості.

Методи дослідження. В роботі використані методи теорії функцій, зокрема, методи теорії наближення функцій та теорії інтерполювання функцій.

Новизна результатів та їх наукова цінність. Основні результати дисертації є новими. Їх зміст полягає в наступному:

- доведена еквівалентність модуля гладкості Діціана - Тотіка та тригонометричного модуля гладкості для непарних натуральних k;
- доведена точність за порядком оцінки тригонометричного модуля гладкості через модуль гладкості Діціана -Тотіка для парних натуральних k;
- знайдені необхідні та достатні умови вкладення класу функцій H ,який характеризується послідовністю найкращих наближень, до класу К.І.Бабенка, а також до узагальненого класу К.І.Бабенка;
- знайдені необхідні та достатні умови вкладення класу функцій H до класу функцій, що мають неперервну похідну дробового порядку.

Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути використані в різних задачах теорії функцій, теорії наближення функцій.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на Всесоюзній школі з теорії функцій (м.Одеса 1991 р.), на Міжнародній конференції пам'яті М.Кравчука (м.Київ 1992 р.), на наукових семінарах відділу теорії функцій Інституту математики АН України, на науковому семінарі з теорії функцій Дніпропетровського державного університету.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 4 роботи, список яких наведено в кінці автореферату.

Структура і об'єм роботи. Дисертація обсягом 100 сторінок машинопису. Складається із вступу, трьох розділів та списку літератури, що містить 56 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ.

Значна частина дисертації (за винятком §§ 1.1 і 3.2) пов'язана з модулями гладкості $\bar{\omega}_k(t,f)$, запровадженими Діціаном та В.Тотіком . До характеристик $\bar{\omega}_k(t,f)$ приводять наступні задачі:

А. Поставлена К.І.Бабенком - задача про вивчення простору функцій $f=f(x)$, які мають на $(-1,1)$ локально-абсолютно неперервну $r-1$ -у похідну і таких, що

$$|f^{(r)}(x)(1-x^2)^{r/2}| \le M = const < \infty$$

майже для всіх $x \in I := [-1,1]$.

Надалі простір таких функцій $f=f(x)$ будемо позначати через B^r.

В. Одержання конструктивної характеристики наближення в термінах рівномірної оцінки наближення функції, а не поточкової оцінки.

Дисертація складається із введення та трьох розділів.

Перший розділ носить допоміжний характер. Проте і в ньому доведені теорема 1.1.1 та теорема 1.2.1 , які мають, на наш погляд самостійний інтерес.

В § 1.1 наводяться необхідні надалі факти про к-у різницю

$$\Delta_h^k(f,x) = \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih)$$

функції f в точці $x \in I$ з кроком $h \in R$, а також про модуль гладкості порядку $k, k \in N$

$$\omega_k(t,f) = \sup_{0<h\le t} \ \sup_{x:\, x,\, x+kh \in I} |\Delta_h^k(f,x)|$$

функції f, неперервної на I $(f \in C(I))$. Означається також множина мажорант Φ та множина к-мажорант Φ^k. Будемо писати $\varphi \in \Phi$, якщо

$\varphi(0) = 0,$

$\varphi(t)$ - не спадає на $[0,\infty)$,

$\varphi \in C([0,\infty))$.

Будемо писати $\varphi \in \Phi^k$, якщо $\varphi \in \Phi$ та

$$\frac{\varphi(t)}{t^k} \le \frac{\varphi(u)}{u^k}, \quad 0<u\le t.$$

Далі наводяться відомості про так звану екстремальну функцію

$$F(x,\varphi,k) = \frac{1}{(k-1)!}\int_1^x \frac{x(x-u)^{k-2}}{u^k}\varphi(u)du, \qquad (1)$$

введену І.О.Шевчуком.

Екстремальна функція буде використана у § 2.3.

Тут у § 1.1, за допомогою функції (1) доведена

Теорема 1.1.1. Нехай $k \in N$, $m \in N$, $m > k$, $\alpha = \alpha(t)$ - позитивна на $(0,1)$ функція така, що

$$\lim_{t \to 0} t^r \alpha(t) = 0, \quad r := m-k,$$

Якщо $\varphi \in \Phi^k$, то існує функція $f_{\varphi,\alpha} \in C([0,1])$ така, що

$$\omega_k(t; f_{\varphi,\alpha}; [0,1]) \begin{cases} = O(\varphi(t)); \\ \ne o(\varphi(t)); \end{cases}$$

$$\omega_k(t; f_{\varphi,\alpha}; [0,1]) \ne O(\alpha(t)\,\omega_m(t; f_{\varphi,\alpha}; [0,1])).$$

Теорема 1.1.1 уточнює теорему Р.Несселя та Е.Віккерена у тому смислі, що не містить додаткової умови $\lim_{t \to 0} \varphi(t)/t^k = \infty$.

Зазначимо також, що наше доведення значно простіше, ніж доведення Р. Несселя та Е. Вікюрена, тому що їх доведення побудовано на методі резонансу, який, в свою чергу, є розвитком методів С.М. Лозінського і А.А. Прівалова.

Теорема 1.1.1 доведена в спільній роботі з І.О. Шевчуком. Всі наступні результати дисертації доведені автором самостійно.

У § 1.2 означається модуль гладкості $\bar{\omega}_k(t,f)$.

Позначимо

$$\dot{\Delta}_h^k(f,x) = \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^{k-i} f(x - kh/2 + ih)$$

- симетричн' к-у різницю функції f в точці x з кроком h.

Означен і 1.2.1 Нерівномірним модулем неперервності (модулем гладкості Діціана- Тотіка) порядку k назвемо функцію

$$\bar{\omega}_k(t,f) := \sup_{0<h\le t}\ \sup_{x:(x\mp kh(1-x^2)^{1/2}/2)\in I} \left|\dot{\Delta}^k_{h(1-x^2)^{1/2}}(f,x)\right|.$$

Далі наводяться властивості модуля $\bar{\omega}_k(t,f)$, зокрема, доведений З. Діціаном та В. Тотіком аналог нерівності Маршо:

$$\bar{\omega}_j(t,f) \le c t^j \left(\int_t^2 \frac{\bar{\omega}_k(u,f)}{u^{j+1}}\,du + \|f\|_I\right), \qquad (2)$$

де $0\le t\le 1$, $\|f\|_I = \max_{x\in I} |f(x)|$.

Тут і надалі c, c_1 - додатні числа (сталі), які можуть залежати тільки від k.

Проте, на відміну від звичайного k-го модуля гладкості $\omega_k(t,f)$ нерівність (2) не завжди забезпечує одержання бажаних оцінок. Тому виникла потреба уточнити цю

нерівність. А саме доведена наступна

Теорема 1.2.1. Якщо $f\in C(I)$, $(x\pm kh(1-x^2)^{1/2}/2)\in I$, то

$$|\Delta_\rho^j(f,x)|\le C_1 h^j\int_h^{\rho/h}\frac{\bar{\omega}_k(u,f)}{u^{j+1}}\,du+$$

$$+C_2\rho^j\int_{\rho/h}^{2}\frac{\bar{\omega}_k(u,f)}{u^{2j+1}}\,du+C_3\rho^j\|f\|_I,$$

де $\rho=\rho(h,x)=h^2+h(1-x^2)^{1/2}$.

У § 2.1 доведена

Теорема 2.1.1 Для будь-якої функції $f\in C(I)$ та будь-якого $k, k\in N$, має місце нерівність

$$\bar{\omega}_k(t;f)\le C\,\omega_k(t,\tilde{f}).$$

У § 2.2 доведена

Теорема 2.2.1 Для будь-якої функції $f\in C(I)$ та будь-якого непарного $k, k\in N$, має місце нерівність

$$\omega_k(t;\tilde{f})\le C(\bar{\omega}_k(t,f)+t^k\|f\|_I).$$

Наслідок теорем 2.1.1 и 2.2.1.

Для будь-якої функції $f\in C(I)$ та будь-якого непарного k, $k\in N$, має місце нерівність:

$$\bar{\omega}_k(t,f)\le C_1\tilde{\omega}_k(t;f)\le C_2(\bar{\omega}_k(t,f)+t^k\|f\|_I),$$

зокрема,

$$\bar{\omega}_k(t,f)\le C\tilde{\omega}_k(t;f)\le C\,\bar{\omega}_k(t,f).$$

де $C=C(k, \|f\|_I)$.

Для парних k справедлива наступна

Теорема 2.2.2. Для будь-якої функц.. $f\in C(I)$ та будь-якого парного $k\in N$ має місце нерівність

$$\omega_k(t;\tilde{f}) \le Ct^k \left(\int_t^1 \frac{\bar{\omega}_k(u,f)}{u^{k+1}} du + \|f\|_I \right), t\in[0.1].$$

У § 2.3 досліджується точність останньої оцінки. Тут доведена

Теорема 2.3.1 Нехай k -парне, $k\in N$. Для будь-якої функції $\varphi\in\Phi^k$ знайдеться функція $f\in C(I)$ така, що

$$c_1\varphi(t)\le \omega_k(t,f) < c_2\varphi(t),$$

але

$$\omega_k(t;\tilde{f}) \ge ct^k \left(\int_t^1 \frac{\bar{\omega}_k(u,f)}{u^{k+1}} du + \|f\|_I \right),$$

де $t\in[0.1]$.

В третьому розділі вивчається зв'язок між просторами функцій, які означаються за допомогою диференціально-різницевих співвідношень та просторами функцій, які означаються апроксимаційними умовами.

Нехай C^r, $r\in N$,- простір r раз неперервно діференційованих на I функцій f:

$$E_n(f) := \inf_{p\in P_n} \|f-p\|$$ - величина найкращого наближення функцій $f\in C(I)$ многочленами $p\in P_n$, P_n- простір алгебраїчних многочленів степеня $\le n$;

$\bar{\varepsilon}=\{\varepsilon_n\}$ - спадна послідовність позитивних чисел;

$$H[\bar{\varepsilon}] = \left\{ f : E_n(f) \le \varepsilon_n, n \in N \right\}.$$

У работах Є.П.Долженко та Є.А.Севастьянова (для $r=1$), І.О.Шевчука (для $r>1$), див. також M.Hasson, T.Xie, показано, що умова

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i i^{2r-1} < \infty \qquad (3)$$

необхідна і достатня для того, щоб

$$H[\bar{\varepsilon}] \subset C^r([0,1]). \qquad (4)$$

У § 3.1 доведені

Теорема 3.1.1. Нехай $r \in N$. Умова

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i i^{r-1} < \infty$$

необхідна і достатня для того, щоб

$$H[\bar{\varepsilon}] \subset B^r.$$

Позначимо $\bar{H}[k,\varphi,I] = \left\{ f : \bar{\omega}_k(t,f) = O(\varphi(t)) \right\}$, $B^0\bar{H}[k,\varphi,I] = \bar{H}[k,\varphi,I]$.

При $r \in N$ будемо писати $f \in B^r\bar{H}[k,\varphi,I]$, якщо $f \in B^r$ та $|(1+x)^{r/2}(1-x-k\rho)^{r/2} \Delta_\rho^k (f^{(r)}, x)| = O(\varphi(h))$ при всіх $x, x+r\rho \in (-1,1)$.

Теорема 3.1.2. Нехай $k \in N$, $\varphi \in \Phi^k$. Умова

$$n^{-k} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i i^{k-1} = O(\varphi(1/n))$$

необхідна і достат я для того, щоб

$$H[\bar{\varepsilon}] \subset \tilde{H}[k,\varphi,I].$$

Теореми 3.1.1 и 3.1.2 є наслідками більш загальної теореми 3.1.3.

Теорема 3.1.3. Нехай $k\in N, r\in N$, $\varphi\in\Phi^{k}$. Умова

$$n^{-k}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i i^{k+r-1}+\sum_{i=n+1}^{\infty}r\varepsilon_i i^{r-1}=O(\varphi(1/n))$$

необхідна і достатня для того, щоб

$$H[\bar{\varepsilon}] \subset B^{r}\tilde{H}[k,\varphi,I].$$

Теореми 3.1.1 - 3.1.3 добре узгоджуються з їх аналогами для періодичного випадку.

У § 3.2 дана позитивна відповідь на припущення Є.П.Долженко про те, що спосіб доведення співвідношення (4) дозволяє встановити аналогічне твердження для простору функцій, які мають неперервну похідну дробового порядку α.

Нехай $\alpha>0, \alpha\in N$, $r=[\alpha]$, $\beta=\{\alpha\}$, де $[\alpha]$ - ціла частина α, $\{\alpha\}$ - дробова частина α, так, що $0<\beta<1$.

Дробовою похідною Маршо функції $f\in C([0,1])$ порядку $\alpha\in(0,1)$ називається вираз

$$(D^{\alpha}f)(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(1-x)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{1-x}\frac{f(x)-f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\,dt,$$

де $\Gamma(1-\alpha)$ - гама-функція.

Дробовою похідною Маршо функції $f\in C^{r}([0,1])$ порядку $\alpha>1$ називається вираз

$$(D^{\alpha}f)(x)=\left[\frac{d}{dx}\right]^{r}\left[D^{\beta}f\right](x) \qquad (5)$$

У точці x = 1 покладемо

$$(D^{\alpha}f)(1) = \lim_{x\to 1} (D^{\alpha}f)(x), \qquad (6)$$

якщо границя в (6) існує.

Позначимо

$$H_r[\bar{\varepsilon}] = \left\{ f: E_n(f) \le \varepsilon_n, n\in N, f^{(j)}(1)=0, j=\overline{0,r}, r+1\in N \right\};$$

$$C^{\alpha} = \left\{ f: f\in C^r, (D^{\alpha}f)(x)\in C^0, f^{(j)}(1)=0, j=\overline{0,r}, r+1\in N \right\}.$$

Має місце наступна

Т.орема 3.2.3.Умова

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i i^{2\alpha-1} < \infty$$

необхідна і достатня для того, щоб

$$H_r[\bar{\varepsilon}] \subset C^{\alpha}.$$

Зауваження. Похідна $D^{\alpha}f$ означена формулами (5) ,(6), називається правою дробовою похідною. Аналогічні твердження справедливі і для лівої похідної дробового порядку.

На закінчення висловлюю щиру вдячність науковому керівнику Ігорю Олександровичу Шевчуку за постановку задач і постійну увагу і підтримку в роботі.

Основні положення дисертації
опубліковані в наступних роботах:

1. Шах Л.Г. Связи между некоторыми конструкциями к-го модуля непрерывности // Тези Міжнародної конференції, присвяченої пам'яті академіка М.П.Кравчука (22-29 вересня 1992 р.).- -Київ - Луцьк, 1992.-С. 247
2. Шах Л.Г. Об аппроксимационном условии непрерывности дробной производной // Укр. мат. журн. -1992.- 44.N 12.- С. 1719-1723.
3. Шах Л.Г., Шевчук И.А. Об одном отрицательном результате, связанном с неравенством Маршо //Ряды Фурье: Теория и приложения. -Киев: Ин-т математики АН Украины. -1992.-С. 160-166.
4. Шах Л.Г. Об эквивалентности некоторых конструкций к-х модулей непрерывности //Ряды Фурье: Теория и приложения.- Киев: Ин-т математики АН Украины. -1992.-С. 154-159.

Підп. до друку 10.05.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс.друк.
Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 0,6.
Тираж 100 пр. Зам. 189 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3

Ab 27.391