АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭНЕРГЕТИКЕ

На правах рукописи

ВРАГОВ Андрей Владимирович

Разрешимость ряда обратных задач для уравнений второго порядка.

Специальность 05.13.16- Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях.

Автореферат
на соискание учёной степени
кандидата технических наук

К И Е В 1993г.

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете им. Ленинского комсомола.

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук, профессор Лучка А.Ю.,
кандидат технических наук Фуртат И.Э.

Ведущая организация

Институт прикладной математики и механики г.Донецк.

Защита состоится "___" ___________ ______ 1993 г. в ______ час. на заседании специализированного Совета Д 016.61.01 по защите диссертаций при Институте проблем моделирования в энергетике АН Украины (252680, ГСП, Киев-164, ул. Генерала Наумова, 15).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем моделирования в энергетике АН Украины.

Реферат разослан "___" _____________ 1993 г.

Учёный секретарь специализированного
совета Д016.61.01 Э.П.Семагина
канд.техн.наук

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Характерной чертой современного научно-технического прогресса является интенсивный рост энергоёмких технологических процессов во всех сферах народного хозяйства, что приводит к увеличению масштабов добычи и эксплуатации топливно-энергетических ресурсов, уменьшению и постепенному истощению их запасов.

Поэтому на первый план выходит вопрос эффективного управления технологическими процессами с целью уменьшения энергозатрат, который приводит к необходимости решения обратных задач для уравнений в частных производных второго порядка. Искомой функцией эффективного управления в этих уравнениях является неизвестная функция источника в правой части . Задачи такого типа относятся к классу обратных задач для уравнения второго порядка.

Развитием теории краевых задач для уравнения смешанного типа явились работы М.А.Лаврентьева, И.Н.Векуа, Ф.И.Франкляи др. В этих работах было указано на важность изучения уравнений смешанного типа, в частности задачи Трикоми, в связи с трансзвуковой газовой динамикой, магнитогидродинамическими течениями с переходом через скорость звука и скорость Альфена, с теорией бесконечно малых изгибаний поверхности, а также с безмоментной теорией оболочек с кривизной переменного знака и другими вопросами механики.

Исследование уравнений смешанного типа имеет и значительный математический интерес, так как при их изучении обычные классические методы не всегда подходят, и поэтому приходится создавать новые методы для их изучения.С 80-их годов были предложены новые подходы и методы построения единой теории краевых задач для уравнений смешанного типа. В частности для разрешимости таких задач впервые применён метод "ε - регуляризации".

Впервые краевые задачи для уравнения составного типа рассмотрены Адамаром. В качестве модельного уравнения составного типа им были предложенны уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = 0$$

Впоследствии эта проблема развивалась в работах Sqostrand O., Barozzi G.C., Салахитдинова М.С., Джураева Т.Д.,Кожанова А.И., и многих других. Отметим, что в вышеупомянутых работах краевые условия носят локальный характер. Теория нелокальных краевых задач по всей видимости, берёт своё начало от работ Pice , M.Picone

Краевые условия называются нелокальными, если задаётся связь между значениями следов решения и его производных на различных частях границы области, а не сами эти значения .

Различным аспектам теории нелокальных краевых задач посвящены работы А.В.Бицадзе , А.А.Самарского , А.А.Дезина, В.А.Ильина, Е.И.Моисеева, Г.Д.Коротопроклиева, А.Н.Терехова, С.Н.Глазатова, Н.О.Алимова, Базарова Д и многих других учёных.

К необходимости исследования нелокальных краевых задач приводят разнообразные модели, возникающие при изучении ряда прикладных задач. Например, с различными процессами физики плазмы, влагопереноса, решения обратных задач для уравнения теплопроводности . В теории нелокальных краевых задач для дифференциального уравнения, особенно для уравнения смешанного типа, много открытых и мало изученных проблем, представляющих как теоретический, так и практический интерес. Среди них отметим, например, широкий класс вопросов, связанных с получением условий однозначной разрешимости и устойчивости, когда нелокальные краевые условия задаются сразу в двух граничных или внутренних гиперплоскостях.

Одной из проблем является устанавление связи между нелокальными задачами и обратными задачами.

Под обратными задачами понимается постановка такого типа: дан класс дифференциальных уравнений, и для одного дифференциального уравнения этого класса задана определенная информация об решение одной прямой задачи. Требуется по имеющийся информации найти дифференциальное уравнение из данного класса. Класс дифференциальных уравнений задается конечным набором параметров или функций. Для линейных дифференциальных уравнений неизвестными функциями, входящими в это уравнение, обычно являются коэффициенты или правая часть этого уравнения. Поэтому нахождение линейного дифференциального уравнения из данного класса дифференциальных уравнений сводится к нахождению его коэффициентов или правой части этого уравнения.

Исследованию одномерных и многомерных обратных задач, связанных с нахождением правой части уравнений в частных производных, были посвящены работы А.Х.Амирова, Ю.Е.Аниконова, Б.А.Бубнова, А.Л.Бухгейма, А.Д. Искандерова, А.И.Прилепко и др. к и неклассическим задачам для уравнений математической физики.

Цель работы

Целью настоящей диссертации является развитие теории эффективного управления объектами, описываемыми линейными и квазилинейными уравнениями второго порядка. Исследование ряда нелокальных краевых задач, возникающих при изучении прикладных проблем и доказательство возможности их численной реализации с получением условий однозначной разрешимости и устойчивости.

Методика исследования

В диссертации используются методы функциального анализа с использованием теорем вложения, метода априорных оценок, метода Галеркина, метода вспомогательного оператора. При исследовании обратных задач применялись: принцип сжатых отображений, метод последовательных приближений.

Научная новизна

Разработан новый метод эквивалентного сведения обратных задач математической физики к нелокальным задачам, что позволило осуществить перех ; к их численной реализации.

Впервые доказаны теоремы существования , единственности и устойчивости решения постановки обратных задач для классических и неклассических уравнений второго порядка.

Проведенные теоретические исследования дали возможность численной реализации расчетов источников для эффективного управления процессами, описываемые данными постановками.

Проведено теоретическое исследование управления газодинамическим режимом в сопле Лаваля в линеаризованной постановке, показана необходимая взаимосвязь параметров для устойчивости процесса.

Практическая и теоретическая значимость

Полученные в диссертации результаты являются новыми и имеют теоретический и практический характер. Они могут быть использованы для дальнейшей разработки теории нелокальных и обратных задач, а также при решении прикладных задач, приводящих к таким постановкам

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на семинаре "Обратные задачи математической физики " под руководством д.ф.-м.н. академика РАН М.М.Лаврентьева (институт математики СО АН России),на семинаре кафедры "Математические проблемы геофизики", под руководством член-кор. АН РАН В.Г.Романова. (Новосибирский госуниверситет), на семинаре "Неклассические уравнения математической физики" под руководством д.ф.-м.н. Врагова В.Н., а также докладывались на Всесоюзной конференции "Дифференциальные уравнения и оптимальное управление"(г.Ашгабад 1990г), на Всесоюзнойконференции "Условно-корректные задачи математической физики и анализа"(Новосибирск 1992г), на конференции "Методы и средства прикладного моделирования"(Киев ИПМвЭ 1993г), на конференции молодых учёных на секции "уравнения математической физики" Ленинград 1988,1989г.,Тбилиси 1989г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[5].

Теперь перейдём к краткому изложению настоящей диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 89 наименований.

Глава I состоит из двух параграфов.

В §I главы I рассматривается дифференциальное уравнение эллиптического типа второго порядка

$u_{tt}(x, t) + \Delta_x u(x, t) - a(x)u = f(x, t)h(x)$ (0.1.1)

где $a(x) \geqslant a_0 > 0$

в области $Q = (0,T)*D$, где D- ограниченная область в пространстве R^n с границей $S \in C^4$., $n \leqslant 3$ с боковой поверхностью $\Gamma = (0,T)*S$ и γ_0, γ_T -соответственно нижнее и верхнее основания цилиндра.

Положим

$\mathcal{D}_t^3 f,\ f \in L^2(0,\ T:W_2^2(D))$; $\left|f(x,\ T)\right| \geqslant \delta > 0,$

$f(x,\ 0) = f_t(x,\ T) = f_{tt}(x,\ 0) = 0$ (0.I.2)

$a \in W_2^2(D)$; $u_1 \in W^4(D)$; $\mathcal{D}_t^5 \varphi_0,\ \varphi_0 \in L^2(0,\ T:W_2^{7/2}(s))$

$\varphi_0(x,\ 0) = \mathcal{D}_t^1\varphi_0(x,\ T) = \mathcal{D}_t^2\varphi_0(x,\ 0) = \mathcal{D}_t^3\varphi_0(x,\ T) = \mathcal{D}_t^4\varphi_0(x,\ 0) = 0$

Смешанная задача. Найти решение уравнения (0.1.I), удовлетворяющее следующим условиям

$u(x,\ 0) = u_t(x,\ T) = 0,\ \ u\big|_\Gamma = \varphi_0\ ,\ \ \varphi_0(x,\ 0) = \varphi_{0_t}(x,\ T) = 0$ (0.1.3)

Обратная задача. Найти функции $u(x,t), h(x)$ входящие в (0.1.1) удовлетворяющие краевым условиям (0.1.3) и дополнительному условию

$u(x,\ T) = u_1,\ \ \varphi_0(x,\ T) = u_1\big|_\Gamma$ (0.1.4)

Теорема 0.1.1. Пусть выполнены предположения на функцию и начальные условия(0.I.2). Тогда обратная задача (0.1.I)-(0.1.3) имеет решение в классе

$u,\ \mathcal{D}_t^3\mathcal{D}_x^\alpha u \in L^2(Q), |\alpha| \leqslant 2$; $\mathcal{D}_x^\beta u \in L^2(Q), |\beta| \leqslant 4$;$h \in W_2^2(D)$

и это решение единственно в данном классе.

В §2 главы I рассматривается дифференциальное уравнение эллиптического типа второго порядка

$u_{tt}(x,\ t) + \Delta_x u(x,\ t) - a(x)u(x,\ t) = f(t)h(x),$ (0.I.5) где $a(x) \geq a_0 > 0$.

в области $Q = (0,T)*D$, где D- ограниченная область в пространстве R^n с границей S , $n \leq 3$ с боковой поверхностью $\Gamma = (0,T)*S$ и γ_0, γ_T -соответственно нижнее и верхнее основания цилиндра.

Всюду ниже будем предполагать, что выполнены следующие условия

$\mathfrak{D}_t^3 f$, $f \in L^2(0, T)$; $f(T) = 0$; (0.I.6)

$f(t) > 0$, $t \in [0, T - 2\delta]$; $f(t) \geq 0$, $t \in [T - 2\delta, T - \delta]$

$f(t) = 0$, $t \in [T - \delta, T]$; $a(x) \in W_2^2(D)$, $u_1 \in W_2^4(D)$,

а также выполнено условие согласования

$\Delta_x u_1 \in W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Смешанная задача. Найти решение уравнения (1.2.I) в области Q , удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = u_t(x, T) = 0 \text{ , } u(x, t)\Big|_\Gamma = 0 \qquad (0.I.7)$$

Обратная задача. Найти функции $u(x, t)$, $h(x)$, входящие в (1.2.I), удовлетворяющие краевым условиям (1.2.2) и дополнительному условию $u(x, T) = u_1(x)$ (0.I.8)

При сделанных предположениях в работе выводится необходимое и достаточное условие для разрешимости обратной задачи (1.2.I)-(1.2.3)

в классах $h \in W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$; $u \in W_2^2(D)$ (0.I.9)

h_k будет однозначно найдена при условии: $C_k \neq 0$ (0.I.10)

h-неоднозначно определена при условии:

$a_k = C_k = 0$ (0.I.11)

Решения нет в случае $\exists k_0$, что $a_{k_0} \neq 0$, $C_{k_0} = 0$. (0.I.12)

Теорема 0.1.2.

Пусть выполнены вышеприведенные условия на коэффициенты и правую часть уравнения (0.I.6).

Тогда, если выполнено условие (0.I.10), то существует и притом единственное решение обратной задачи $\in W_2^2(Q)$, $h \in W_2^2 \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$

Если же выполнено условие (0.I.II), то обратная задача имеет бесконечное число решений.

В случае выполнения условия (0.I.I2) обратная задача не имеет решения.

В главе 2 рассматривается система гиперболических уравнений.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} - u_{xx} = f(z)\,h(x,t) & 0 < z < H \\ v_{tt} - \rho\, v_{zz} - v_{xx} = 0 & H < z < H_1 \end{cases} \qquad (0.2.1)$$

Где $t \in (0,\infty)$, $x \in (-a,a)$, $z \in (0,H_1)$, $Q = (-a,a)\times(0,H)$

Будем искать решение системы уравнений (0.2.I), удовлетворяющие начально краевым условиям (0.2.2)-(0.2.7).

$$u(0,x,z) = u_t(0,x,z) = 0 \qquad (0.2.2)$$

$$v(0,x,z) = v_t(0,x,z) = 0 \qquad (0.2.3)$$

$$u(t,a,z) = u(t,-a,z) = v(t,a,z) = v(t,-a,z) = 0 \qquad (0.2.4)$$

$$u(t,x,H) = v(t,x,H) \qquad (0.2.5)$$

$$u_z(t,x,H) = \rho\, v_z(t,x,H) \qquad (0.2.6)$$

$$u_z(t,x,H_1) = v_z(t,x,0) = 0 \qquad (0.2.7)$$

Обратная задача Найти $u(t,x,z)$, $v(t,x,z)$, $h(x,t)$, если задано дополнительное условие $u(t,x,0) = \tau(x,t)$ (0.2.8)

и выполнено условие согласование $\tau(a,t) = \tau(-a,t) = 0$

Всюду ниже будем считать, что выполнены следующие условия

$$|f(0)| \geqslant \delta > 0\ ;\ f(z) \in L^2(0,H_1) \qquad (0.2.9)$$

Л Е М М А 0.2.I.

Пусть $u(t,x,z)$, $v(t,x,z)$, $h(x,t)$ - решения обратной задачи (0.2.I)-(0.2.8). тогда справедливо следующее представление

$$h(x,t) = \left[\tau_{tt}(x,t) - \tau_{xx}(x,t) - u_{zz}(t,x,0)\right]\left[f(0)\right]^{-1}$$

ЛЕММА 0.2.2.

Если функции $C_{mn}(t)$, являются решениями в области Q задачи

$$\begin{cases} c''_{mn}(t) + c_{mn}(t)\left[\lambda_n^2 + \mu_m^2\right] = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{0}^{h1} \varphi_{kl}\frac{f(z)}{f(0)}\left[\tau_{tt}(x,t) - \tau_{xx}(x,t) - \right. \\ \left. - u_{zz}(t,x,0)\right]dzdx \qquad (0.2.10) \\ c_{mn}(0) = c'_{mn}(0) = 0 \end{cases}$$

из класса $\sum\limits_n \lambda_n^2 |C_{mn}(t)|^2$ (0.2.11)

Тогда функции

$$u = \sum_{kl} C_{kl}(t)\,\varphi_{kl}(z,x), 0<z<H; \quad v = \sum_{kl} C_{kl}(t)\,\varphi_{kl}(z,x),\ H<z<H_1.$$

$$h(x,t) = \frac{1}{f(0)}\left[\Phi_{mn}(x,t) + \int\limits_0^{H1} g_n(z)\,dz \sum_l C_{ml}^{p-1}(\tau)\lambda_l^2 g_l(0)\right]$$

являются решениями обратной задачи (0.2.1)-(0.2.8), где $\varphi_{kl}(x,z) \in W_2^1\left[[0,H1]\times[-a,a]\right]$ является базисной функцией.

Сама базисная функция представлена в виде

$$\varphi_{kl} = \sin\frac{\pi kx}{a}\, g_l(z),\ g'_l(0) = g'_l(H1) = 0,\ \sigma g''_l(z) = -\lambda_l^2 g'_l(z)$$

$$\sigma = \begin{cases} 1 & 0<z<H \\ \rho & H<z<H1 \end{cases}; \qquad \{g_l(z)\} \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,H1)$$

ЛЕММА 0.2.3

Доказать, что существует единственное решение задачи (0.2.10) из класса (0.2.11)

ТЕОРЕМА 0.2.

Пусть выполнены условия (*), тогда существует единственное решение задачи (0.2.1) - (0.2.8) из классов

$u(x,z,t), v(x,z,t) \in L\left[t\in(0,\infty); W_2^1(Q)\right]$; $h(x,t) \in L\left[t\in(0,\infty); W_2^1(-a,a)\right]$

Доказательство теоремы напрямую следует из лемм (0.2.I)-(0.2.3)

В 3 главе в прямоугольнике $P=(0,T)\times(0,1)$ рассмотрим параболическое уравнение

$$Lu = u_t - u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = f_1(x,t)h(t)+f_2(x,t) \qquad (0.3.I)$$

где известны функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$, причем $f_1(x,t) \neq 0$

Обратная задача

Требуется найти пару функций $(u(x,t),h(t))$ по следующим начальным и краевым условиям

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(0,t) = u_1(t), \qquad (0.3.2)$$
$$u(0,t) = u_2(t),\ u(1,t) = u_3(t)$$

Всюду ниже предполагаем, что выполнены условия согласования

$$u_0(0) = u_2(0),\quad u_0(1) = u_3(0),\quad u_{t0}(0) = u_1(0)$$

Для доказательства разрешимости линейной обратной задачи (0.3.2)-(0.3.2) мы предлагаем эквивалентное сведение обратной задачи к нелокальной задаче. С этой целью рассмотрим нелокальную краевую задачу .

Нелокальная краевая задача

Найти в области P решение параболического уравнения

$$LQ = Q_t - Q_{xx} + \hat{a}(x,t)Q_x + \hat{b}(t)Q = f_3(x,t) \qquad (0.3.3)$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = Q_0(x,0) = \frac{V_0(x)}{f_1(x,0)} \qquad (0.3.4)$$

и граничными условиями

$$Q_x(0,t) = 0,\quad Q(0,t) = Q(1,t) \qquad (0.3.5)$$

Воспользуемся известным результатом О.А.Ладыженской [4I]

Теорема 0.3.

Пусть $f_3(x,t) \in C^{2\alpha,\alpha}(\bar{P})$ $0 < \alpha < 1/2$, тогда существует, и притом единственное, решение нелокальной краевой задачи (0.3.3)-

(0.3.5) из пространства $Q(x,t) \in C^{2+2\alpha,1+\alpha}(\bar{P})$.

Далее, так как след функции $Q(x,t)$ определен при $x = 0$, $x = I$, то введем функцию $\Phi(x,t) = Q(x,t) - Q(0,t)$

Не трудно проверить, что функция $\Phi(x,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\Pi\Phi(x,t) = \Pi Q(x,t) - \Pi Q(0,t) = f_3(x,t) - Q'(0,t) - \hat{b}(t)Q(0,t)$$

Таким образом мы можем заключить, что решением обратной задачи (0.3.I)-(0.3.2) будут функции $\hat{V}(x,t) = \Phi(x,t)$, и

$h(t) = Q(o,t)' + \hat{b}(t)Q(0,t)$

Следствие I

Условия на гладкость функции $f_3(x,t)$ можно значительно ослабить используя локальные свойства гладкости решения параболических уравнений.

В самом деле мы можем предполагать, что функция $f_3(x,t)$ в области $P_\delta = \left\{(x,t) \in P,\ \delta < x < 1-\delta,\ 0 < t < T\right\}$, где $0 < \delta < 1/2$

принадлежащих классу $L_2(P)$, а в области $\tilde{P} = P \setminus P_\delta$ из класса $C^{2\alpha,\alpha}(\tilde{P})$, то решение обратной задачи (0.3.I)-(0.3.2) существует из класса $W_2^{2,1}(P)$ И функция $h(t) \in C^{1+\alpha}(\bar{P})$.

Следствие 2

На основании вышеизложенного можно заключить, что мы можем доказать разрешимость в целом следующей обратной задачи.

Найти пару функций $(u(x,t), h(x,t))$ из уравнения

$$\Pi u = u_t - u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = f_1(x,t)h(x,t) + f_2(x,t) \qquad (0.3.6)$$

где известны функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$,

причем $f_1(x,t) \neq 0$

где решение удовлетворяет следующим начальным и краевым условиям

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(0,t) = u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (0.3.7)$$

где функция $h(x,t)$ в классефункций представима в виде

$$h(x,t) = h_1'(t) - \hat{b}(x,t)h_1(t)$$

где функция $\hat{b}(x,t) = \left[b(x,t) + a(x,t)\frac{f_{1x}}{f} - \frac{f_{1xx}}{f} + \frac{f_{1t}}{f} \right]$ известная функция , а функция $h(t)$- неизвестная.

Глава 4

К вопросу о разрешимости смешанной задачи для уравнения смешанного типа второго порядка

В данной главе приводится постановка некоторых нелокальных и обратных задач для уравнения смешанного типа второго рода. При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказывается корректность этих задач в пространстве С.Л.Соболева. В §I главы 4 рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка второго рода

$$Lu = K(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)u +$$
$$\beta(t)\,|u_t|^{\rho}u_t = f(x,t) \qquad (0.4.1)$$

в области $D = (0,T)\times\Omega$, где Ω - ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n, с достаточно гладкой границей. Пусть выполнено одно из условий

а) $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, $\qquad a_0>0, \qquad \forall\xi \in R^n$,

б) $-\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, $\qquad a_{ij} = a_{ji}, \ \forall ij = \overline{1,n}$

Всюду ниже будем предпологать, что $K(x,0)=K(x,T)=0$ функции $K(x,t)\in C^1(D)$, $a_{ij}(x)\in C^2(\bar\Omega)$, $\alpha(x,t),c(x,t)\in C^1(D)\cap C(\bar{D})$ $0 \leq \beta(t) \in C^1([0,T])$ $\qquad -1 < \rho < 2/n-2$ при $n\geq3$ ($\rho>-I$ произвольно и конечно при $n=I,2$.)

Из вышесказанного следует, что уравнение (0.4.I) относится к уравнению смешанного типа второго рода, Так-как на знак функции $K(x,t)$ внутри области не сделано никаких ограничений.

Нелокальная краевая задача (Н.З.1.1.)

Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (0.4.1) и следующим краевым условиям

$$\gamma u\Big|_{t=0} = u\Big|_{t=T} \tag{0.4.2}$$

$$u|_{s} = 0 \tag{0.4.3}$$

где $s = \partial\Omega \times [0,T]$; в пространствах $W_2^2(D)$ и $L_p^{\beta}(D)$, где $p=\rho+2$

Определение 4.1.1.

Назовём функцию $u(x,t)$ регулярным решением задачи (4.1.1)-(4.1.3), если $u\in C_L$ и удовлетворяет уравнению (4.1.1) почти всюду в области D .

ЛЕММА 4.1.1.

Пусть выполнены вышеуказаные условия для коэффициентов уравнения (4.1.1), пусть, кроме того, $\lambda=2\ln\gamma / T$ где в случае а) $\gamma\in(I,+\infty)$, в случае б) $\gamma\in(0,I)$, такое, что выполнены неравенства $2a - K_t + \lambda K \geq \delta > 0$; $\lambda c-c_t\geq \delta_1 > 0$,

где функция $c(x,t)$ периодическая по переменной t с периодом T, тогда для всех функций $u(x,t) \in C_L$ имеют место неравенства

$$\|u\|^2_{W_2^1(D)} + \|u_t\|^2_{L_p^{\beta}(D)} \leq m \|Lu\|^2_{L_2(D)}$$

В §2 главы 4 рассматривается уравнение составного типа третьего порядка. Рассмотрим в области D семейство уравнений

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t} B_0 u_\varepsilon - \lambda u_{\varepsilon_{tt}}\right] + Lu_\varepsilon = f(x,t) \tag{0.4.4}$$

где $B_0 u_\varepsilon = u_{\varepsilon_{tt}} + \sum\limits_{ij=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j}$

ε - достаточно малое положительное число. Отметим , что уравнение вида (0.4.4) относится к классу уравнений составного типа Исследование краевых задач для уравнений составного типа представляет большой интерес, особенно в многомерном случае. Ниже используем уравнение составного типа (0.4.4) в качестве "ε - регуляризующего" уравнения для уравнения (0.4.1).

Нелокальная краевая задача (Н.3.1.2)

Найти регулярное решение уравнения (0.4.4) в области $\mathcal{D}$ и такое , что

$$\gamma D_t^q u_\varepsilon \Big|_{t=0} = D_t^q u_\varepsilon \Big|_{t=T} \tag{0.4.5}$$

$$u_\varepsilon \Big|_S = 0 \tag{0.4.6}$$

где $q = 0,1,2.$

Обозначим через C_{L_ε} класс функций из пространства

$$\mathfrak{B} = \left\{ u_\varepsilon |\ u_\varepsilon \in W_2^2(\mathcal{D});\ \frac{\partial}{\partial t} B_0 u_\varepsilon \in L_2(\mathcal{D}),\ u_{\varepsilon_t} \in L_p^\beta(\mathcal{D}) \right\}$$

удовлетворяющих условиям (4.2.2)-(4.2.3).

Определение 0.4.1. Назовём функцию $u_\varepsilon(x,t)$ регулярным решением задачи (0.4.4)-(0.4.6), если $u_\varepsilon(x,t) \in C_{L_\varepsilon}$, $|u_{\varepsilon_t}|^\rho u_{\varepsilon_t} \in L_2^\beta(\mathcal{D})$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[|u_{\varepsilon_t}|^{\rho/2} u_{\varepsilon_t} \right] \in L_2^\beta(\mathcal{D})\ , \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[|u_{\varepsilon_t}|^{\rho/2} u_{\varepsilon_t} \right] \in L_2^\beta(\mathcal{D})$$

и $u_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет уравнению (0.4.4) почти всюду в области $\mathcal{D}$

В данном параграфе, методами функционального анализа с использованием теорем вложения, априорных оценок, стационарным методом Галёркина, методом вспомогательного оператора доказывается следующая теорема

Т Е О Р Е М А 0.4.1.

Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (0.4.1) , пусть кроме того всюду в области $\mathcal{D}$ выполнены условия

$2a - |K_t| \geqslant \lambda K \geqslant \delta > 0$; где функции $c(x,t), a(x,t)$ периодические по переменной t с периодом T.

$\max |a_{ij} k_{x_i}| \leqslant \delta_* = \min \{\delta, a_0\lambda\}$; $\lambda c - c_t \geqslant \delta_1 > 0$ где $\lambda = 2\ln\gamma / T$

а)$\gamma \in (I, +\infty)$, в случае б)$\gamma \in (0, I)$

$\lambda \notin P_\sigma(T_0)$, где $T_0 = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ оператор с областью определения состоящей из функций класса $W_2^2([0,T]$, удовлетворяющие периодическим условиям

$\max |\beta_t(t)| \leqslant \delta_0 = \min \{\delta_*, \delta_1\}$, $\gamma^\rho \beta(T) = \beta(0)$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f, f_t \in L_2(\mathcal{D})$

$$\gamma f(x,0) = f(x,T)$$

существует единственное регулярное решение задачи (0.4.4)-(0.4.6)

В §3 главы 4 при тех же условиях, что и в теореме 0.4.I, использование (0.4.4) в качестве "ε - регуляризирующего" уравнения для уравнения (0.4.I) доказана однозначная разрешимость задачи (0.4.I)-(0.4.3)

Т Е О Р Е М А .0.4.2

Пусть выполнены все условия теоремы 0.4.1., тогда регулярное решение задачи (0.4.1)-(0.4.3) существует и единственное.

В конце §3 главы 4 приводятся примеры, которые показывают, что условия на γ при постановке нелокальной краевой задачи является существенным.

З а м е ч а н и е 0.4.I.

Для уравнения (0.4.I) в области $\mathcal{D}$ аналогично рассматривается задача (в линейном случае)

$$\gamma u\Big|_{t=0} = u\Big|_{t=T} \qquad \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_s = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_j \Big|_s = 0$$

где в случае а)$\gamma \in (I, +\infty)$, в случае б)$\gamma \in (0, I)$

4.I. Периодическая задача

В области положим $\mathcal{D} = (0,T)\times\Omega$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим уравнение (0.4.I) в случае $\beta(t)=0$.

Периодическая задача

Найти решение уравнения (0.4.I) в области удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{t=0} = u\Big|_{t=T} \qquad (0.4.9)$$

$$u\Big|_{s} = 0 \qquad (0.4.10)$$

ТЕОРЕМА 0.4.3.

Пусть в области $\mathcal{D}$ выполнено условие

$$D_t^p K\Big|_{t=0} = D_t^p K\Big|_{t=T} \ ; \quad p = 0,1.$$

$$2\alpha - K_t + \lambda K \geq \delta > 0 \ ; \ \max a_{ij}k_{x_i} \leq \delta_* < \delta$$

$$2\lambda c - c_t + c_{tt} \geq \delta_1 > 0 \text{ где } \lambda > 0$$

где функции $c(x,t), \alpha(x,t)$ периодические по переменной t с периодом T.

Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^1(\mathcal{D})$ такой, $f(x,0) = f(x,T)$ существует единственное регулярное решение задачи (0.4.1)-(0.4.9)-(4.4.IO) из пространства $W_2^2(\mathcal{D})$

В §5 рассматривается обратная задача для уравнения смешанного типа второго порядка с нелинейным членом.

Преимущественно при исследовании обратных задач для уравнений математической физики доказывались единственность и устойчивость решения. Вопросы существования оставались открытыми [73]. В данной работе в области $D = (0,T)\times\Omega$, $S = \partial\Omega \times [0,T]$

В цилиндрической области $D \subset R^n$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$L\varphi = K(x,t)\varphi_{tt}-\sum_{ij=1}^{n}\left[a_{ij}(x)\varphi_{x_i}\right]_{x_j} + \alpha(x,t)\varphi_t + c(x)\varphi +$$

$$\beta(t)\ |\varphi_t|^{\rho}\varphi_t = h(x) + f(x,t) \qquad (0.4.11)$$

Под обратной задачей, мы понимаем нахождение вектор функции $(\varphi(x,t),h(x))$ удовлетворяющую уравнению (4,5,I) в области D по следующим краевым условиям

$$\gamma\varphi\Big|_{t=0} = \varphi\Big|_{t=T} = \varphi_0(x) \qquad (0.4.12)$$

$$\varphi|_S = 0 \qquad (0.4.13)$$

Решение обратной задачи проводится сведением задачи (0.4.11)-(0.4.13) эквивалентным образом к нелокальной краевой задаче для одного уравнения смешанного типа второго порядка.

Т Е О Р Е М А 0.4.4.

Пусть выполнены условия теоремы (0.4.2), тогда существует и единственно решение обратной задачи (0.4.11)-(0.4.13) из следующих пространств $\varphi(x,t) \in W_2^2(D)$; $h(x) \in W_2^1(\Omega)$.

В §6 рассматривается обратная задача для уравнения смешанного типа второго порядка в линейном случае.

В области D рассмотрим уравнение

$$LV = K(x,t)V_{tt}-\sum_{ij=1}^{n}\left[a_{ij}(x)V_{x_i}\right]_{x_j} + \alpha(x,t)V_t + c(x)V$$

$$= f_1(t)h(x) + f_2(x,t) \qquad (0.4.14)$$

Под обратной задачей, мы понимаем нахождение вектор функции $(V(x,t),h(x))$ удовлетворяющую уравнению (0.4.14) в области D по следующим краевым условиям

$$\gamma V\Big|_{t=0} = V\Big|_{t=T} = V_0(x) \qquad (0.4.15)$$

$$V|_s = 0 \qquad (0.4.16)$$

Решение обратной задачи проводится сведением задачи (0.4.14)-(0.4.16) эквивалентным образом к нелокальной краевой задаче для одного уравнения смешанного типа второго порядка.

Т Е О Р Е М А 0.4.5.

Пусть выполнены условия теоремы (0.4.2), а так же выполнены следующие условия $f_1(t)\neq 0$, $f_1(0) = f_1(T)$ и функция $\tilde{c}(x)$ зависит только от переменной x

$$\tilde{c}(x) = \left[\frac{K(x,t)f_{1tt}(t)}{f_1(t)} + \frac{\alpha(x,t)f_{1t}(t)}{f_1(t)} + c(x,t)\right]$$

тогда существует и единственно решение обратной задачи (0.4.14)-(0.4.16)

В §7 изучается обратная периодическая задача для уравнения смешанного типа второго порядка в линейном случае.

Положим $D = (0,T)\times\Omega$, $S = \partial\Omega \times [0,T]$

В цилиндрической области $D \subset R^n$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$LV = K(x,t)V_{tt} - \sum_{ij=1}^{n}\left[a_{ij}(x)V_{x_i}\right]_{x_j} + \alpha(x,t)V_t + c(x,t)V$$

$$= f_1(t)h(x) + f_2(x,t) \qquad (0.4.17)$$

Под обратной задачей, мы понимаем нахождение вектор функции $(V(x,t),h(x))$ удовлетворяющую уравнению (0.4.18) в области D по следующим краевым условиям

$$V\Big|_{t=0} = V\Big|_{t=T} = V_0(x) \qquad (0.4.18)$$

$$V\big|_{s} = 0 \qquad (0.4.19)$$

Решение обратной задачи проводится сведением задачи (0.4.17)-(0.4.19) эквивалентным образом к нелокальной краевой задаче для одного уравнения смешанного типа второго порядка.

Т Е О Р Е М А 0.4.6.

Пусть выполнены условия теоремы 0.4.2, а так же выполнены следующие условия $f_1(t)\neq 0$, $f_1(0) = f_1(T)$ и функция $\tilde{c}(x)$ зависит только от переменной x,

$$\tilde{c}(x) = \left[\frac{K(x,t)f_{1tt}(t)}{f_1(t)} + \frac{\alpha(x,t)f_{1t}(t)}{f_1(t)} + c(x,t)\right]$$

тогда существует и единственно решение обратной задачи (0.4.17)-(0.4.19).

В пятой главе рассмотрено приложение для постановок задач из главы четыре для газодинамики, к вопросу о течении газа через сопло Лаваля . Рассмотрены вопросы существования и единственности решения , а так же вопрос управления процессом.

О С Н О В Н Ы Е Р Е З У Л Ь Т А Т Ы Р А Б О Т Ы

Проблема эффективного управления технологическими процессами, с целью уменьшения энергозатрат приводят к необходимости решения обратных задач для уравнений в частных производных второго порядка. Искомой функцией эффективного управления в этих уравнениях является неизвестная функция источника в правой части . В случае задач, связанных с трансзвуковой газовой динамикой, магнитогидродинамическими течениями и др. возникают вопросы необходимости изучения уравнений смешанного типа. Исследование уравнений смешанного типа, особенно, если задаётся связь между значениями следов решения и его производных на различных частях границы области, а не сами эти значения (нелокальные условия) имеет значительный математический интерес, так как при их изучении обычные классические методы не всегда подходят. Одной из проблем является установление связи между нелокальными задачами и обратными задачами. Кроме того необходимо отметить широкий класс вопросов, связанных с получением условий однозначной разрешимости и устойчивости.

В данной диссертационной работе получены следующие результаты

I. Разработан новый метод эквивалентного сведения обратных задач математической физики к нелокальным задачам, что позволило осуществлять переход к их численной реализации.
2. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения вышеприведенной постановки обратной задачи для классического уравнения второго порядка эллиптического типа.
3. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения вышеприведенной постановки обратной задачи для системы уравнений второго порядка гиперболического типа.
4. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения вышеприведенной постановки обратной задачи для классического уравнения второго порядка параболического типа. Разработан алгоритм, приводящий задачу к численной реализации.
5. Впервые доказаны теоремы существования , единственности и устойчивости решения вышеприведенных постановок обратных задач для неклассических уравнений смешанного типа второго порядка, описывающих переход через скорость звука, скорость Альфена и многие другие сложные задачи.

6. Проведенные теоретические исследования дали возможность численной реализации расчетов источников для эффективного управления процессами описываемыми данными постановками.
7. Проведено теоретическое исследование управления газодинамическим режимом в сопле Лаваля в линеаризованной постановке, показана необходимая взаимосвязь параметров для устойчивости процесса.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах

I Врагов А.В. О разрешимости линейной обратной задачи для эллиптического уравнения.//Межвузовский сборник научных трудов. Новосибирск 1990 г.С.61-66

2 Врагов А.В. Об одной обратной задачи для эллиптического уравнения второго порядка.//Сборник тезисов докладов всесоюзной конференции "Дифференциальные уравнения и оптимальное управление" Ашгабад 1990г.С.42-43

3 Врагов А.В. О разрешимости и численной реализации одной обратной задачи для параболического уравнения.//Сборник тез. докладов всесоюзной конференции "Условно-корректные задачи математической физики и анализа" Новосибирск 1992г.С184

4 Врагов А.В. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения//Швеция. Международный сборник по обратным задачам математической физики 1993г.№4 (на англ. яз) (в печати 5стр)

5 Врагов А.В. О разрешимости квазилинейной обратной задачи для уравнения смешанного типа второго порядка.//Сб.науч.раб. "Неклассические задачи математической физики" ИМ РАН 1993г. (в печати 12стр)

Подписано к печати 30.04.1993г. Формат 60х84/16
Бумага офсетная Усл.-печ.лист.1,0 Уч.-изд.лист 1,0.
Тираж 100. Заказ 510. Бесплатно

Полиграф. уч-к Института электродинамики АН Украины,
252057, Киев-57, проспект Победы, 56.