АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ФІЛОСОФІЇ

На правах рукопису

ОМЕЛЬЯНЧИК Валентин Йосипович

УДК 14+111+164.2+167.2

ЛОГІЧНІ ЗАСАДИ МОДАЛЬНОГО РЕАЛІЗМУ

09.00.07 — ЛОГІКА

Наукова доповідь
на отримання вченого ступеня
доктора філософських наук

Київ — 1993

Академія Наук України

Інститут філософії

На правах рукопису

ОМЕЛЬЯНЧИК Валентин Йосипович

УДК 14+111+164.2+167.2

ЛОГІЧНІ ЗАСАДИ МОДАЛЬНОГО РЕАЛІЗМУ

09.00.07 - логіка

Наукова доповідь
на отримання
вченого ступеня
доктора філософських наук

Київ - 1993

Робота виконана у відділі логіки, методології та філософії науки Інституту філософії АН України.

Офіційні опоненти: доктор філософських наук, кандидат фіз.-мат. наук БУРГІН М.С.

доктор філософських наук, професор КРИМСЬКИЙ С.В.

доктор філософських наук, професор ЛЕДНІКОВ Є.Є.

Провідна організація: кафедра логіки Київського держуніверситету ім. Т.Г.Шевченко

Захист відбудеться "25" червня 1993 р. о 14 годині на засіданні Спеціалізованої ради Д 016.26.02 при Інституті філософії АН України за адресою : 252 001, Київ-1, вул. Трьохсвятительська,4.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту філософії АН України.

Наукова доповідь розіслана "21" травня 1993 р.

Вчений секретар
Спеціалізованої ради ЛУКЬЯНЕЦЬ В.С.

І. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження. Дати точне визначення, що таке реалізм, мабуть, неможливо, враховуючи обсяг та неоднорідність того кола філософських концепцій, які ідентифікують себе з реалізмом, а саме: до реалістів себе відносять математичні платоністи та моральні об"єктивісти, наукові реалісти та реалісти в теорії значення, онтологічні реалісти та реалісти в філософії права та філософії квантової механіки. Але можна стверджувати, що реалізм,як філософська доктрина та спосіб робити філософію,так чи інакше пов"язан з ім"ям Аристотеля. В цьому сенсі реалістична традиція включає не тільки перипатетиків Давнього світу, але і схоластичну філософію Середньовіччя, другу схоластику ХУІІ - сер.ХУІІІ ст. та сучасну аналітичну філософію.

Може видатись дивним, але на континенті ця традиція була майже невідомою або з конфесійних причин ігнорувалась: історія філософії Нового часу сюди відносить тільки Ляйбніца та Фр.Брентано (сер.ХІХ ст.). З останнього починається відродження реалістичної традиції на континенті, яке закінчується, приблизно, в семидесяті роки ХХ ст.

Як відомо, Аристотель був творцем трьох філософських дисциплін: логіки, метафізики, етики (останню він розумів як частину політичної теорії). Внутрішній взаємозв"язок цих дисциплін є характерною ознакою реалістичної філософії - вона має етичну (та політологічну, як би ми сказали зараз) спрямованість: тут метафізика виступає як засада етики, тобто тут відкидається теза кантівського конструктивізму про автономність морального судження. В цьому сенсі реалістична традиція протистоїть континентальній традиції - традиції, яку можна назвати, ідучи за гуманістами, риторичною, але яка сама себе називала критичною (Кант), чи традицією Erkenntnistheorie. Суть її складає послідовне протиставлення сфери "теоретичної" та "моральної" ("практичної"), тобто дескриптивної сфери факту та нормативної сфери вартостей, Natur- та Geisteswissenschaften.

Етична стерильність Erkenntnistheorie обернулась, з одної сторони, стерильністю її філософської рефлексії для Naturwissenschaften (згадаймо ситуацію у математиці та фізиці в кінці ХІХ - на початку ХХ ст.), а з другої - стерильністю її етичної доктрини, тобто моралізацією моральної сфери, що спричинилося до емотивістської реакції (марксизм, Ніцше та ін.).

Вбачаючи своє основне завдання в тому, щоби бути філософією Geisteswissenschaften , риторична філософія, пройшовши крізь екзистенціалізм, структуралізм, філософську антропологію, філософську герменевтику, деконструктивізм, volens nolens стала філософією літературної критики. Редукуючи весь людський досвід до естетичного досвіду, а цей в свою чергу - до Мови-з-великої-літери, риторична філософія стала ідеологією ліберального конформізму. До цього в цілому зводиться реалістична критика континентальної філософії. Одначе остання критикувала реалізм за натуралізацію структур соціальної активності, який тим самим ставав ідеологією консерватизму.

Останні десять років розпочався та продуктивно іде діалог реалістичної та риторичної філософських традицій. Континентальна філософія враховує реалістичну критику, свідчення чому , наприклад, - теорія комунікативних дій Ю.Хабермаса та теорія семантики дії П.Рикера. З іншої сторони, іде процес переосмислення реалістичної традиції. В англо-саксонському світі це пов"язано перш за все з доктриною наукового реалізму, полемікою реалізму - антиреалізму, етикою чеснот.

Перед українською філософією зараз стоїть питання: як робити філософію - реалістично чи риторично, з якою традицією - континентальною чи англо-саксонською - ідентифікуватись, яким чином включитись в зазначений діалог?

За часів ancien régime філософія розумілась риторично та ототожнювалась з Erkenntnistheorie, куди включалась теорія свідомості , теорія культури та ін. Цей напрям домінує і зараз. Але його, строго кажучи, не можна ототожнювати з континентальною традицією з огляду на його безгрунтовність: риторична філософія витворилась в полеміці з аристотелівською традицією (тому, наприклад, на континенті є зрозумілим, що кантівська Ding-an-sich є ремінісценцією аристотелівського τὸ χωριστόν), чого не можна сказати про інтелектуальну ситуацію в Україні. Те, що в Європі було розривом з традицією, у нас , з огляду на різні обставини, перетворилось на традицію sui generis. Тому існує нагальна потреба виправлення історичної перспективи та створення підстав української філософії (а не "філософії на Україні"). Потреба інтелектуальної Реформації (чи Контрреформації ?). Тому є актуальним відродження та розвиток реалістичної, аристотелівської традиції в Україні в контексті сучасного діалогу філософських традицій. Саме відродження, а не започаткування, оскільки традиція. Саме відродження, а не започаткування, оскільки аристотелівська традиція започаткована у нас 1632 р. з постанням Києво-Могилянської Академії.

Ступінь розробленості проблеми. Оскільки доктрина реалізму має декілька аспектів, то розглянемо їх послідовно:

1). Історичний (аналіз аристотелівської традиції). Дослідження Corpus Aristotelicum в 40-ві - 50-ті роки пов"язано з такими іменами, як В.Йегер (філологічна критика текстів), Д.Росс (видання та коментар до "Аналітик"), Г.Оуен (аналіз онтології), Г.Райл (аналіз "Топік"), Е.Бохеньський, Я.Лукасевич (аналіз логіки), Дж.Акрил (видання та коментар "Етики"), Г.Анскомб, А.Прайор (аналіз гл.9 трактату "Про тлумачення"), Дж.Стальмах (аналіз аристотелівських модальностей), Ф.Сольмсен (аналіз "Фізики"). Цікавою постаттю є Е.Тугендхат. Учень М.Хайдеггера, але послідовник аналітичної філософії, зробив спробу текстологічно підтвердити тезу вчителя про підміну Аристотелем поняття буття поняттям οὐσία, яке у німців значить "присутність".

Характерною рисою досліджень цього періоду було виправлення "помилок" Аристотеля, а разом і коментаторів XIX - поч.XX ст. (досить згадати екстримістську критику Р.Майера Я.Лукасевичем). Загальним припущенням досліджень було те, що аристотелівська система понять радикально відрізняється від сучасної, нагадуючи системи менш розвинутих суспільств.

Дослідження 60-70 років пов"язані з такими іменами, як Дж.Оуен (аналіз "Метафізики" та її томістична критика), М.Кромпець (аналіз "Метафізики" та розвиток томістичної теорії analogia entis), П.Обанке (аналіз поняття буття),Я.Хінтікка, С.Кнуутіла (аналіз модальної силогістики та аналіз "принципу повноти"), Г.Патціг (аналіз асерторичної силогістики), Г.Хапп (аналіз поняття матерії), Х.Перельман (аналіз теорії аргументації), Г.фон Вригт та А.Кенні (реконструкція засад практичної філософії).

Характерною рисою досліджень цього періоду є їх більша толерантність та реалістичність: стало зрозуміло (завдяки розвитку самої аналітичної філософії, зокрема - логічних досліджень, частково - завдяки дослідженням неотомістів), що аристотелівська концептуальна система не так радикально різниться від сучасної, як це видавалось раніш. Більш того, вона дозволяє аналізувати сучасні проблеми, перш за все в практичній філософії та теорії дії.

У 80-ті продовжувалися дослідження практичної філософії Аристотеля (Д.Чарлз, К.Наталі), але разом з тим стає помітною тенденція інтегральної реконструкції логіки, метафізики та етики (політичної теорії). Недоліком всіх попередніх реконструкцій було те , що центральні розділи аристотелівської філософії коментувались та розумілись незалежно один від одного.

2). Логічний (проблема de re-модальності). Дослідження 60-70 рр. були реакцією на критику В.Куайном de re-модальності (а заразом і аристотелівського есенціалізму) в 50-ті. На захист есенціалістичної тези була розроблена каузальна теорія референції (С.Кріпке, Х.Патнем), теорія індивідуюючих функцій (Я.Хінтикка), теорія природніх видів (natural kinds)(Д.Віггінс).

Далі дискусія перемістилась в площину питання: чи є модальні оператори схованими кванторами? Анти-модалісти (А.Плантінга, Р.Сталнакер,Д.Л"юїс) твердять, що це так і є, тобто модальності - це квантори по можливим світам. При цьому Д.Л"юїс стверджує ще тезу посибілізму: можливий світ існує подібно до актуального. Модалісти (Л.Пикок, К.Файн, Г.Форбес) стверджують незводимість модальної ідіоми до кванторної, пропонуючи переклад умов істинності модального судження в проміжну модальну мета-мову.

Недоліком як модалістів, так і анти-модалістів є припущення, що оператор необхідності репрезентується квантором загальності.

3). Онтологічний (проблема універсалій та онтологічних модальностей). Однією з центральних тем досліджень в 60-70 рр. була проблема онтологічного статусу властивостей та відношень. Теорія схожості (Г.Бергман, Г.Кюнг, П.Стросон, Д.Віл"ямс) стверджувала, що властивості та відношення є партикуляріями (particularized qualities), які об"єднуються в один клас завдяки відношенню схожості з відповідним взірцем. Теорія тотожності (Д.Армстронг, П.Бутчаров) навпаки заперечувала редукцію універсалій до партикулярій.

Іншою темою була проблема онтологічної модальності (= можливих способів буття речей) або "можливих світів". Модальний реалізм (К.МакГінн) стверджував, що модальні факти не редукуються до актуальних фактів. Модальні анти-реалісти заперечували це, причому імперсональні (комбінаторні) актуалісти (Д.Армстронг) редукували можливе до перекомбінації актуального , а персональні актуалісти (Д.Кім) редукували можливе до ментальних фактів.

Недоліком цих досліджень було те , що проблема універсалій розглядалась у відриві від проблеми онтологічних модальностей.

4). Епістемологічний (проблема наукової та персональної когніції). В 70-80 рр. відбувалась інтенсивна дискусія в філософії науки після твердження М.Даммітa, що бути реалістом - значить приймати кореспондентну теорію істини ("трансцендентальний реалізм" Канта). Прихильники наукового реалізму (Дж.Аронсон,Д.Бойд,Х.Філд, Р.Вхаскар, Х.Патнем Р.Харре та ін.), відкидаючи останній, твердили , що а) найкращі наші наукові теорії приблизно істинні, б) теоретичні терміни в цих теоріях реально референтні (каузальна теорія референції), в) приблизна істинність наукової теорії - це достатнє пояснення її успіху у передбаченні.

Прихильники анти-реалізму (А.Файн, В.ван Фраасен та ін.) стверджували а) радикальну дисконтинуальність розвитку науки, нестабільність референції теоретичних термінів, 2) важливість для науки не істинних, а успішних теорій (завдання "врятування феноменів").

Недоліком в дискусії наукового реалізму та конструктивізму є те, що тут не враховувались модальні (чи інтесіональні) аспекти сучасної науки.

Інше коло проблем пов"язано з репрезентативною теорією свідомості (Дж.Фодор), згідно з якою кожна когниція є символічним оперуванням з репрезентаціями (де репрезентація - це інтеціональна символічна структура, головна функція якої - бути про якісь речі чи процеси). Каузальна теорія інтенціональності (А.Апіа, Х.Філд, Д.Дретцке) стверджує, що А є про В т.і.т.,коли А пов"язано з В певним каузальним ланцюгом. Інтерналістська теорія інтенціональності (Дж.Серль, Р.Чизом,М.Міллер та ін.) заперечує редукцію інтенціонального відношення до каузального, стверджуючи, що репрезентація репрезентує об"єкт, якщо він задовольняє зміст репрезентації. Відповідна теорія змісту пропозиційної установки (attitude) розроблялась Дж.Перрі, Г.Евансом, Г.Нунаном, К.МакГінном та ін.

Недоліком зазначених теорій є те , що проблема інтенсіональності аналізувалась безвідносно до теорії дії.

5). Практичний (проблеми теорії дії та соціальної теорії). Етичні дослідження 60-70 рр. проходили під знаком полеміки кантівського конструктивізму (= теорії суспільного контракту)(Дж.Ролс, Р.Дворкин, Р.Ноцік) та раціонального інтуїціонізму (= теорії натурального права)(Д.МакКормик, Д.Лайонс, Г.Харт та ін.). В контексті цієї полеміки в кінці 70-х А.МакІнтайр відроджує та розробляє аристотелівську етику чеснот. В кінці 80-х У.Аутвейт та Р.Бхаскар, критикуючи структуралізм та герменевтику, розробляють концепцію " трансцендентального реалізму" в соціальній філософії, сподіваючись в її межах збалансувати структуру та дію.

Недоліком цих досліджень є ігнорування модальних аспектів структури та дії, а також виключення з розгляду пасивних дій, тобто активізм теорії дії.

Мета та завдання дослідження. Дослідження, яке охоплюється цією науковою доповіддю, провадилось автором з 1976 по 1991 рр., та мало за мету історичний та концептуальний аналіз реалістичної філософської традиції, її розвиток в контексті філософських проблем сучасності формулювання адекватної сьогоденню концепції реалізму.

Для реалізації цієї мети ставились та вирішувались наступні завдання:

- текстологічний аналіз та цілісна реконструкція аристотелівської філософії , а саме:логіки, метафізики , теорії дії;
- аналіз проблеми модальностей та універсалій в часи Високого середньовіччя (Фома з Аквіно та Дунс Шотландець);
- аналіз рецепції реалістичної традиції в Україні (Києво-Могилянська Академія);
- аналіз історії та причин сучасної кризи в філософії науки, та перспектив реалістичної філософії науки;
- аналіз модальних аспектів науки;
- аналіз еквівокацій дискурсу філософії дії;
- логічний аналіз об"єкту модального дискурсу;
- логічний аналіз аристотелівської модальності;

Таким чином дослідження велося в 3-х напрямах: історичному, концептуальному та логічному.

Методологічну основу дослідження в його історичному аспекті складав принцип людяності (Р.Гранді), згідно з яким, стикаючись з відмінною від нашої системою понять та вибираючи переклад її у свою понятійну систему, ми маємо преферувати той переклад , згідно з яким відношення між світом та віруваннями, вартостями, бажаннями та ін. наших контрагентів були б на стільки схожі на наші, на скільки це можливо.

Методологічну основу дослідження в його концептуальній частині складає стандартна аналітична методологія, доповнена "принципом подиву" Аристотеля: вважай аналіз формальним, якщо виявлена форма корегує твої інтуїції.

Методи логічного аналізу - синтаксичний, семантичний та алгебраїчний.

<u>Наукова новітність дослідження та тези, що захищаються.</u> Наукова новітність дослідження полягає у тому, що на основі історичного, концептуального та логічного аналізу реалістичної філософської традиції була сформульована концепція модального реалізму, основні твердження якої наступні:

1. На питання/"Що може бути зроблено мною на благо?" модальний реалізм дає відповідь/ :

Це може бути (онтологія)

зроблене (теорія дії)

мною (теорія особи)

на благо (етика).

Таким чином стверджується, що (1) поняття блага спирається на поняття особи (hauto, se, self, selbst, meme), (2) поняття особи - на поняття дії, (3) поняття дії - на поняття модальності та істоти (сутності, usia). (Це підпорядкування заповнює х"юмівську та кантівську прірву між асерторичною та імперативними сферами).

2. Модальний реалізм є реалістичною доктриною, по-перше, у тому сенсі, що вважає вихідний пункт філософії - онтологію, чи ширше - метафізику - реалістичною дисципліною (схожою, скажімо, на фізику). В термінах П. Стросона це ревізіоністська (реальна), а не дескриптивна метафізика.

Модальний реалізм є модальним, по-перше, тому що той факт, що буття модалізоване, є вихідним фактом його онтології: буття влаштоване таким чином, що не просто А є Б, але А необхідно (можливо, випадково та ін.) є В. У цому сенсі онтологія - це теорія модалізованності буття.

3. Модальний реалізм є реалізмом, по-друге, у тому сенсі, що він виходить з онтології речей (res), а не, скажімо, ситуацій (у цьому сенсі "це" онтологічно більш фундаментальне, ніж "це є таким-то"). В межах цієї онтології для пояснення факту модалізованності буття речі поділяються на первинні та

вторинні. До останніх відносяться точки зору, точки бачення, види (образи), форми первинних (звичайних) речей.

Таким чином сфера існуючого виходить за межі категоріальної області (області судження): точки зору, скажімо, неможливо стверджувати, чи заперечувати, але можливо поділяти (приєднуватись до них), чи ні.

4. Універсалія - це те, завдяки чому річ має даний звичайний вигляд. Центральне питання онтології - це питання існування та природи універсалій. Модальний реалізм є, по-третє, реалізмом, бо визнає існування універсалій in re. Він є модальним, по-друге, тому що стверджує модальну природу універсалій: універсалія існує як структура можливостей даної конкретної речі (скажімо, людяність - це - структура можливостей даної конкретної людини, а жовтість - це структура можливостей даної жовтої речі, звісно, що ця структура виявляється у процесі релевантних змін). Така теорія універсалій дозволяє розглянути дану конкретну річ у ролі універсалії, а саме, коли вона функціонує як взірець. У цьому випадку річ а необхідно має властивість P, коли (1) в є взірцем для а та (2) в має властивість P :

Необхідно, що P(a) = (в є взірцем для а & P(в)

5. Аристотелівська модальність - це модальність, яка виникає у попередньому прикладі, а саме необхідність тут визначається у зв"язку з відношенням до одиничного. Класична модальність, навпаки, визначає необхідність у зв"язку з відношенням до загального (напр. Кант). Аристотелева модальність - це модальність, яка функціонує, скажімо, у соціальних системах.

6. Теорія значення модального реалізму виходить з наступних тверджень: (1) слова мають значення, оскільки вони символізують універсалії, (2) речі мають значимість (цінність), оскільки вони репрезентують можливості. Таким чином проблема значення редукується до проблеми модальності.

7. Теорія дії - другий вихідний пункт модального реалізму, на якому базується теорія особи, етика, політична теорія та ін. Модальний реалізм є, по-четверте, реалізмом, бо виходить з факту фундаментальної онтологічної омонімії поняття річ :
- річ як предмет (це теза натуралізму),
- річ як справа (дія) (це теза анти-натуралізму),
("річ" це трансценденталія у термінах схоластичних).

8. Модальний реалізм є модальним, по-третє, оскільки

стверджує,що модальність є спосіб єдності речі (як предмету) та речі (як справи)(напр. річ це можливість справи).

9. Онтологічно це твердження відповідає тому,що види речей поділяються на натуральні та штучні.Справи належать до штучних видів речей.(Напр. для архітектора нагляд за будівництвом є справою,як для майстра - саме будівництво).

10.Теорія дії (теорія штучних процесів) модального реалізму засадничо неплатоністична: скажімо,процес будівництва будинку не є процесом втілення ідеї (проекту,плану та ін.) будинку, але є трансформацією однієї сутності (цього будинку у формі макету,скажімо) у іншу сутність (у цей реальний будинок),тобто форма будинку "переходить" з однієї матерії на іншу.

11.Тому модальний реалізм заперечує існування сфери Свідомості-з-великої-літери (сюди,скажімо,належить як трансцендентний світ ідей Платона,так і трансцендентальний світ Bewußtsein Канта),а також сфери Мови-з-великої-літери (сюди належить як концептуальна схема у філософії звичайної мови,так і трансцендентальна комунікація у екзистенціалізмі та дискурс у філософській герменевтиці).

12.Аналіз свідомості провадиться з огляду на брентанівську тезу інтенціональної природи свідомості.Звісно,що відкидається "німецька" теза операційної природи свідомості.Стверджується,що характерною формальною ознакою інтенціональних актів є їх диз"юнктивність (напр. A вірить,що p чи q ,тоді і тільки тоді ,коли A вірить,що p,чи A вірить, що q).Диз"юнктивність є характкрною рисою аристотелівської модальності.

13.Оскільки реалістична онтологія є областю евідентності, модальний реалізм користується методом систематичного подиву (to thaumadzein): подив ,на відміну від картезианського сумніву,не нищить евідентності,але як і сумнів має критичний потенціал. Феноменологічно подив пов"язаний з формою. У цьому сенсі модальний реалізм є формальною філософією.

14.Модальна онтологія та теорія дії - це дві точки зору на буття (висловлюючись традиційно,це буття з точки зору сутності та буття з точки зору існування).В цьому сенсі вони є спряженими, взаємозалежними.В цьому сенсі стверджується: нема сутності без існування та існування без сутності.

Системетичне руйнування евідентності у пост-картезианській філосоофії спричинилося до руйнування підстав теорії дії,а значить і етики. Цим пояснюється етична стерильність Теорії пізнання (та в цілому усієї риторичної- спертої не на речі, а на судження - філософії). Фейербах - це кінець не тільки "німецької класичної", але і усієї риторичної філософії: як і протестантська теологія, ця філософія завершується філософською антропологією (у широкому розумінні).

Оскільки логіка - органон модальної онтології, то руйнування останньої спричиняється до менталізації (суб"єктивізації) та ритуалізації першої, тобто до її антропологізації та риторизації.

15. Основна "драма" риторичної філософії розгортається в межах між річчю та ідеєю. Парадигматично ця "драма" знаходить розв"язок у "гісторії" (яка архитипічно пов"язана з ідеєю часу).

Основна "драма" реалістичної філософії розгортається в межах між дійсним та можливим (можливим та неможливим). Парадигматично вона знаходить розв"язок в "ойкономії" (яка архитипічно пов"язана з ідеєю модальності).

Аристотелівська модальність займає центральне місце як в онтології, так і теорії дії модального реалізму. Логічний аналіз аристотелівської модальності, що зводиться до аналізу зв"язку модальних операторів та кванторів, результується у наступних тезах, що автор виносить на захист:

1. Побудована модальна логіка ТМ (у генценовській формі) - логіка Т Фітча - фон Врігта з пам"яттю, синтаксична особливість якої - кінечні послідовности натуральних чисел ("пам"ять") індексують модальні ппф.

2. Доведена нормалізаційна теорема для логіки ТМ.

3. На основі узагальнення для секвенцій поняття дедуктивного ланцюга (Шютте К.) побудована семантика для логіки ТМ.

4. Доведена теорема повноти для логіки ТМ відносно цієї семантики.

5. Побудован переклад першопорядкової логіки предикатів у мову логіки ТМ, який є вкладенням.

6. Виявлено, що семантика Тарського для логіки ТМ базується на логіці Кліні.

7. Проаналізовано метафізичні наслідки цих результатів: можливість редукції суб"єкт-предикатного судження до модального.

8. Побудовано переклад мови логіки Т у мову логіки ТМ , який є вкладенням. Звідки зроблено висновок, що саме модальність логіки

Т фіксує поняття першопорядкового квантору.

9. Введено поняття дерева спряжень та проаналізована його структура. З"ясовано, що кванторна репрезентація модальних операторів є похідною від кон"югаційної репрезентації.

10. На основі цього отримана така класифікація існуючих репрезентацій:

- репрезентація Йонсона-Тарського (семантика можливих світів);
- репрезентація Говарда -Монтегю-Скота (околична семантика);
- репрезентація Кріпке (часткового порядку ,деревоподібна);
- репрезентація Саймонса-Есакія (топологічна,похідна Кантора).

2 та 3 репрезентації є проміжними між першо- та другопорядковою.

11. Аргументовано, що репрезентація Кріпке - це семантика "контекстів"(кінечних послідовностей можливих світів).

12. Введено поняття передтопологічного простору для аналізу репрезентації Саймонса-Есакія. Виявлено,що саме в цій репрезентації інтерпретується аристотелівська модальність, але в термінах другопорядкових кванторів.

13. З"ясовано, що аристотелівська модальність є конструктивною модальністю.

14. Дана оцінка складності модальних логік, що репрезентують аристотелівську модальність, в термінах введеного поняття спряженого перекладу.

15. З"ясовано, що серед класичних модальних логік тільки система Т внутрішньо вкладається в логіку К.

16. На основі понять індуктивної та проективної границь введено поняття зовнішнього вкладення - експотенціального та імпотенціального. З"ясовано,що логіка К4 зовнішньо вкладається в К.

17. З"ясовано, що найпростіша логіка аристотелівської модальності Т* ні внутрішньо , ні зовнішньо не вкладається в К.

18. Описані гратки початкових (m, n)-розширень логіки К.

19. Встановлено, що (1,1)-гратка це "скринька з кришкою", а (1,2)-гратка вкладається в (1,1)-гратку.

20. Для опису структури (2,1)-гратки, вводиться поняття модальної дуалізації та метод тривіальних вузлів.

21. З"ясовується, що логіки аристотелівської модальності є дуалізаціями класичних модальних логік. Разом з тим вони є доповнечнями до класичних модальних логік у відповідній гратці нормальних розширень логіки К.

22. З"ясовано,що модальність логіки Т* є мультиплікатором,

тобто гомоморфізмом та інтеріор-оператором одночасно.

23.З"ясовано,що аристотелівська модальність базується не на ідеї порядку (таксису), як класична, а на ідеї місця (топосу).

Теоретична та практична вартість дослідження визначається перш за все тими зробленими висновками та результатами, які можуть бути основою для подальшого аналізу модальних понять як в природничих, так і соціальних науках. Концепція модального реалізму в цілому може бути використана для аналізу актуальних проблем сучасної філософії . В викладацькій практиці зроблені висновки важливі для розробки курсів з метафізики, логіки , філософії науки , теорії дії.

Апробація роботи. Результати дослідження доповідались на семінарах Інституту філосолфії Ураїни,Інституту філософії Росії, у Міжнародному філософському колежі (Париж), а також на II та IУ Совєтсько-фінському колоквіумах з логіки та методології науки (Москва[1979],Телаві[1985]), Міжнародних конгресах з логіки , методології та філософії науки (Зальцбург[1983], Москва[1987],Упсала[1991]),Міжнародних конгресах ближнього зарубіжжя (Паланга[1982],Харків[1986],Мінськ[1990]), на конференціях "Етичні проблеми соціальних реформ"(Варшава[1986]), "Логічні проблеми квантової механіки"(Москва[1986]),"Сучасні проблеми логіки"(Санкт-Петербург[1990]),"Аристотелівські читання" (Мариуполь[1991]). Автор приймав участь у міжнародному проекті "Handbook of Metaphisics and Ontology "(München).

II.ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Розділ I. Логіка ТМ (логіка Т з пам"яттю).

Частина I.

Мова логіки ТМ (L_{TM}).

1.Пропозиційні змінні із нижніми індексами: $p_{i,\alpha}, p_{i,\beta}, \ldots q_{i,\alpha} \ldots$

2.Пропозиційна константа $\perp$ / хибність /.

3.Логічні константи : $\supset$ /імплікація /, $\Box$ /необхідність/.

4.Технічні знаки:/ /дужки/.

Правильно побудовані формули /ппф/:

i/ ппф першого роду /ппф-1/:

а/пропозиційна змінна з нижнім індексом $\in$ ппф-1,

б/ якщо A,B $\in$ ппф-1,то /$A \supset B$ /, / $\Box A$ / $\in$ ппф-1,

в/ $\perp$ $\in$ ппф-1.

ii/ ппф другого роду /ппф-2/ $\in$ ппф-1 із верхнім індексом: якщо A $\in$ ппф-1,то A^{*} $\in$ ппф-2.

Таким чином в середені ппф верхні індекси відсутні.

У метамові $A^{\varkappa}, B^{\varkappa}, C^{\varkappa}, \ldots$ є змінними по ппф. Якщо вказано нижній індекс, то це змінна по атомним ппф, напр. / A_α /$^{\varkappa}$.

Секвенційне представлення системи ТМ /GTM /.

Аксіоми: 1. $A_\alpha^{\varkappa} \to A_\beta^{\gamma}$, де $\varkappa/\alpha = \gamma/\beta \neq 0$.

2. $\bot^{\varkappa} \to$, $\varkappa \geq 0$.

Структурні правила:

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma, A^{\varkappa} \to \Delta} \ /\text{То} \to / \qquad \text{Тоншання} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to A^{\varkappa}, \Delta} \ / \to \text{То} /$$

$$\frac{\Gamma, A^{\varkappa}, A^{\varkappa} \to \Delta}{\Gamma, A^{\varkappa} \to \Delta} \ /\text{Ск} \to / \quad \text{Скорочення} \quad \frac{\Gamma \to A^{\varkappa}, A^{\varkappa}, \Delta}{\Gamma \to A^{\varkappa}, \Delta} \ / \to \text{Ск} /$$

$$\frac{\Gamma \to A^{\varkappa}, \Delta \qquad \Pi, A^{\varkappa} \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} \quad \text{Січення} \quad /\text{Сі}/$$

/ де $\varkappa \geq 0$ /

Логічні правила:

Атомні /О/ Неатомні

$$\frac{\Gamma \to A^{\varkappa}, \Delta \qquad \Gamma, B_{\beta_0}^{\lambda_0} \to \Delta}{\Gamma, / A \supset B_\beta /^{\varkappa} \to \Delta} \quad \text{Антецендентна імплікація /АІ/} \quad \frac{\Gamma \to A^{\varkappa}, \Delta \qquad \Gamma, B^{\varkappa} \to \Delta}{\Gamma, / A \supset B /^{\varkappa} \to \Delta}$$

/ $\supset \to$ / $\qquad$ / $\supset \to$ /

де $\varkappa/\beta = \lambda_0/\beta_0 \neq 0$ $\qquad$ $\varkappa \geq 0$

$$\frac{\Gamma \to A_{\beta_0}^{\lambda_0}, \Delta \qquad \Gamma, B^{\varkappa} \to \Delta}{\Gamma, / A_\beta \supset B /^{\varkappa} \to \Delta} \quad / \text{o}\supset\to /$$

/де $\varkappa/\beta = \lambda_0/\beta_0 \neq 0$ /

$$\frac{\Gamma, A^{\varkappa} \to B_{\beta_0}^{\lambda_0}, \Delta}{\Gamma \to / A \supset B_\beta /^{\varkappa}, \Delta} \quad \text{Консеквентна імплікація /КІ/} \quad \frac{\Gamma, A^{\varkappa} \to B^{\varkappa}, \Delta}{\Gamma \to / A \supset B /^{\varkappa}, \Delta}$$

/ $\to\supset$o / $\qquad$ / $\to\supset$ /

$$\frac{\Gamma, A_{\beta_0}^{\lambda_0} \to B^{\varkappa}, \Delta}{\Gamma \to / A_\beta \supset B /^{\varkappa}, \Delta} \qquad \varkappa \geq 0$$

/де $\varkappa/\beta = \lambda_0/\beta_0 \neq 0$ /

$$\frac{\Gamma, A_{\alpha_0}^{\varkappa_0} \to \Delta}{\Gamma, / \Box A_\alpha /^{\varkappa} \to \Delta} \quad \text{Рефлексивність} \quad /\text{Ре}/ \quad \frac{\Gamma, A^{\varkappa s} \to \Delta}{\Gamma, / \Box A /^{\varkappa} \to \Delta}$$

/ $\Box$o$\to$ / $\qquad$ / $\Box\to$ /

де $\varkappa_0/\alpha_0 = \varkappa s/\alpha \neq 0$, для декотрого s ; $\qquad$ $\varkappa \geq 0$

$$\frac{\Gamma \to A_{\alpha_0}^{\varkappa_0}, \Delta}{\Gamma \to / \Box A_\alpha /^{\varkappa}, \Delta} \quad \text{Дистрибутивність} \quad /\text{Dc}/ \quad \frac{\Gamma \to A^{\varkappa s}, \Delta}{\Gamma \to / \Box A /^{\varkappa}, \Delta}$$

/ $\to\Box$o / $\qquad$ / $\to\Box$ /

де $\varkappa_o/\alpha_o = \varkappa s/\alpha \neq 0$, для декоторого s ; де $s \notin \Gamma,\Delta,\varkappa$, такого що $s \notin \Gamma,\Delta,\varkappa$. $\varkappa \geq 0$

Загальні зауваження.

1.Визначення для секвенційного представлення стандартні(див. напр. Клини С.Математическая логика.М.1973).Ми ототожнюємо секвенції,що відрізняються тільки переставленням членів в антецеденті чи сукцеденті.Структурний предок входження формули в секвенцію це 1) дане входження формули, чи 2) входження її у списки формул Γ,Δ ,Λ,Π при застосуванні наведених приавил,чи 3) входження її як головної формули правила /Ск/. Крім того відношення "бути структурним предком" транзитивне.

2.Малі грецькі літери означають кінечні послідовності натуральних чисел.Малі латинські літери m,n,s ... -це змінні по натуральних числах.Якщо n входить у послідовність $\varkappa$,то пишемо $n \in \varkappa$.Якщо n входить у верхні індекси списка Γ,то пишемо $n \in \Gamma$ і тп.$|\alpha|$ — це довжина слова α .0 - це порожня послідовність.

3. $$\varkappa/\alpha = \begin{cases} (n_1,n_2,\ldots n_s)(k_1/1)(k_2/2)\ldots(k_m/m), \text{ якщо } n_i \leq m; \\ 0 \text{ (порожня послідовність), інакше.} \end{cases}$$

де $\alpha = (n_1,n_2,\ldots n_s)$, $\varkappa = (k_1,k_2,\ldots k_m)$,а (k/m) - це операція підстановки літери k замість усіх входжень літери m у данне слово.Таким чином $0/\alpha = 0$, $\varkappa/0 = 0$.

4.$A^{\lambda}(n/m)$ - це результат підстановки (n/m) у верхньому індексі λ формули A.Якщо $\Gamma = (A_1,A_2,\ldots A_s)$,то $\Gamma(n/m) = (A_1(n/m),A_2(n/m)\ldots$ $\ldots A_s(n/m))$. $(\Gamma \rightarrow \Delta)(n/m) = \Gamma(n/m) \rightarrow \Delta(n/m)$. Якщо D - це доведення, то $D(n/m)$ -це результат підстановки (n/m) у кожну секвенцію D.

5.Кажуть що /$\rightarrow\Box$/-правило має власне число s та власну формулу $A^{\varkappa s}$

6.Результатом множення $\Gamma \rightarrow \Delta$ (D) на $\Pi \rightarrow \Lambda$ (D^*) є $\Pi,\Gamma \rightarrow \Delta,\Lambda$ $(D \cup D^*)$ де $D(D^*)$- множина верхніх індексів даних секвенцій,їх область.

<u>Твердження</u> 1.

1.Якщо $\varkappa/\beta = \lambda/\alpha$,то $\varkappa(n/m)/\beta = \lambda(n/m)/\alpha$.

2.Якщо існує s таке,що $\varkappa_o/\alpha_o = \varkappa s/\alpha \neq 0$,то існує s таке,що $\varkappa_o(n/m)/\alpha_o = \varkappa(n/m)s/\alpha$.

3.Якщо існує s таке,що $\varkappa_o/\alpha_o = \varkappa s/\alpha \neq 0$,та $|\varkappa| = l, l+1 \in \alpha$, тоді для тільки одного i $s=k_i$,де $\varkappa_o=(k_1,k_2,\ldots k_p)$.

Доведення тривіальне.

<u>Лема 1</u>. Якщо D доведення,то $D(n/m)$ це теж доведення,де $n \notin D$.

Ідея доведення (ІД).Для аксіом,структурних правил та АІ-, СІ-,Ре- правил твердження очевидно.Для Dс-правила маємо:

$\varkappa_o(n/m)/\alpha_o = \varkappa(n/m)s(n/m)/\alpha$ (тв.1).Маємо наступні випадки:

1.1.Якщо $n \notin \alpha$,то $\varkappa_o/\alpha_o = \varkappa/\alpha$,при умові $|\varkappa| = n-1$.Тоді для всякого s $\varkappa/\alpha = \varkappa s/\alpha$.Виберемо s таким,що $s \notin \Gamma(n/m), \Delta(n/m), \varkappa(n/m)$ Тоді $\varkappa_o(n/m)/\alpha = \varkappa(n/m)s/\alpha$, тобто умова для Dc-правила виконана.

1.2.Якщо $n \in \alpha$,то для тільки одного i $k_i = s$ (тв.1.3),отже $n \neq s$:

1.2.1.Якщо $s \neq m$,то $\varkappa_o(n/m)/\alpha_o = \varkappa(n/m)s/\alpha$, $s \notin \Gamma(n/m), \Delta(n/m), \varkappa(n/m)$ тобто умова для Dc-правила виконана.

1.2.2.Якщо $s = m$,то $\varkappa_o(n/m)/\alpha_o = \varkappa n/\alpha$, $n \notin \Gamma, \Delta, \varkappa$, тобто умова для Dc-правила виконана.

Для правила /$\rightarrow\square$/ доведення аналогічне.

Визначення 1./$\rightarrow\square$/-правило не має власного числа,якщо $n \notin \alpha$; якщо $n \in \alpha$,то k_i (див.тв.1.3) є власним числом цього правила та $A_{\alpha o}{}^{\varkappa_o}$ є його власною формулою,якщо $\varkappa_o/\alpha_o = \varkappa k_i/\alpha \neq 0$, $k_i \notin \Gamma, \Delta, \varkappa$.

Визначення 2.Доведення секвенції S має чисті верхні індекси,якщо власне число s примінення Dc-правила входить тільки у верхні індекси тих секвенцій,які знаходяться вище секвенції ,яка включає відповідну власну формулу.

Лема 2 (про очищення верхніх індексів).Кожне доведення секвенції S може бути трансформрване у доведення з чистими верхніми індексами.

ІД (індукція по кількості примінення Dc-правил у доказі). Розглянемо секвецію ,нижче котрої у доведенні всі верхні індекси чисті,та яка є засновком Dc-правила:

1./$\rightarrow\square$/-првило.Якщо $n \notin \alpha$,то правило не має власного числа.Якщо $n \in \alpha$ та $k_i \in \varkappa_o$ є власним числом правила,то трансформуємо дане доведення підстановкою (n/k_i), де n нове число ,так що висновок правила не зміниться (лема 1).

2./$\square\rightarrow$/-правило розглядається аналогічно.

Визначення 3. Будемо казати ,що атомні формули $A_\alpha{}^{\varkappa}$ та $A_\beta{}^{\gamma}$ еквівалентні,якщо $\varkappa/\alpha = \gamma/\beta \neq 0$

Лема 3 (про підстановку еквівалентних атомних формул).Кожне доведення D секвенції $\Gamma \rightarrow A_\alpha{}^{\varkappa}, \Delta$ $(\Gamma, A_\alpha{}^{\varkappa} \rightarrow \Delta)$ може бути трансформоване у доведення секвенції $\Gamma \rightarrow A_\beta{}^{\gamma}, \Delta$ $(\Gamma, A_\beta{}^{\gamma} \rightarrow \Delta)$, де $\varkappa/\alpha = \gamma/\beta \neq 0$.

ІД.Очистимо доведення D таким чином,щоби його власні числа не належали до γ. Тоді замінимо всі структурні предки даного входження формули $A_\alpha{}^{\varkappa}$ на формулу $A_\beta{}^{\gamma}$.Ця трансформація зберігає структурні правила та не зачіпає логічні правила.

Наслідок. Доведення D секвенції S можна змінити у доведення D_1, замінивши деякі атомні формули на еквівалентні.

І Д. Продивись атомні логічні правила.

Нормалізаційна теорема для системи ВТМ доводиться аналогічно тому, як вона доводиться для логіки предикатів (див. напр. Г.Е.Минц Приложение.-В книзі: С.Клини Математическая логика, с.442-7). Необхідні визначення наступні:

Визначення 4. Складність формули $A^{\varkappa}$ у правилі /Ci/ називається ступінню січення. Якщо k – натуральне число, а F – список формул, то доведення із січенням у системі BTM_- назвемо (k, F)-доведення, якщо у ньому формули із січенням мають ступінь $\le$ k, а ті, котрі мають ступінь k належать до F / $(k,F) \vdash \Gamma \to \Delta$ /.

Лема 4 (обернення правил):

1. Якщо $(k,F) \vdash \Gamma \to (A \supset B)^{\varkappa}\, \Delta$, то $(k,F) \vdash \Gamma, A^{\varkappa} \to B^{\varkappa}, \Delta$

2. Якщо $(k,F) \vdash \Gamma \to (\Box A)^{\varkappa}, \Delta$, то $(k,F) \vdash \Gamma \to A^{\varkappa s}, \Delta$, для всіх s.

І Д. Розглянемо доведення D:

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{\Gamma_1, A^{\varkappa} \to \Delta_1, B_{\beta_1}^{\gamma_1}}{\Gamma_1 \to \Delta_1, (A \supset B_\beta)^{\varkappa}} & \dfrac{\Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_2 \to \Delta_2, (A \supset B_\beta)^{\varkappa}} & \dfrac{\Gamma_3 \to \Delta_3, (A \supset B_\beta)^{\varkappa}, (A \supset B_\beta)^{\varkappa}}{\Gamma_3 \to \Delta_3, (A \supset B_\beta)^{\varkappa}} \\
\searrow & \vdots & \swarrow \qquad \gamma_1/\beta_1 = \varkappa/\beta \ne 0. \\
 & \Gamma \to \Delta, (A \supset B_\beta)^{\varkappa} &
\end{array}
$$

Трансформуємо його у доведення D", замінивши $B_{\beta_1}^{\gamma_1}$ на B_β^{γ}. Далі замінимо всі структурні предки формули $(A \supset B_\beta)^{\varkappa}$ формулою $B_\beta^{\varkappa}$, одночасно дописуючи $A_\alpha^{\varkappa}$ у антецендент. Тоді всі структурні правила трансформуються у правила того ж виду. КІ-правила трансформуються у тривільні правила, якщо Δ_1, Δ_2 не містять відповідного предка, і вони трансформуються у /Ск/-правило в противному разі. Звісно, що ця трансформація не заторкує інших правил у доведенні D". Таким чином ми отримали доведення D^*:

$$
\begin{array}{c}
\Gamma_1, A^{\varkappa} \to B_\beta^{\varkappa}, \Delta_1' \\
\vdots \\
\Gamma, A^{\varkappa} \to B_\beta^{\varkappa}, \Delta
\end{array}
$$

У випадку, коли $\varkappa/\beta = 0$, у доведенні D (D") правило /$\to\supset_0$/ відсутнє. Неатомний випадок розглядається аналогічно.

Розглянемо доведення D (де D_1 відповідне піддоведення доведення D):

$$D_1$$

$$\dfrac{\Gamma_1 \to A_{\alpha_0}^{\varkappa_0}, \Delta_1}{\Gamma_1 \to (\Box A_\alpha)^{\varkappa}, \Delta_1} \qquad \dfrac{\Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_2 \to \Delta_2, (\Box A_\alpha)^{\varkappa}} \qquad \dfrac{\Gamma_3 \to \Delta_3, (\Box A_\alpha)^{\varkappa}, (\Box A_\alpha)^{\varkappa}}{\Gamma_3 \to \Delta_3, (\Box A_\alpha)^{\varkappa}}$$

$$\Gamma \to \Delta, (\Box A_\alpha)^{\varkappa}$$

$\varkappa s/\alpha = \varkappa_0/\alpha_0 \neq 0$
для деякого s
$s \notin \Gamma_1, \Delta_1, \varkappa$,
де $|\varkappa| = n-1$.

Трансформуємо D у D", вибравши релевантне s та замінивши $A_{\alpha_0}^{\varkappa_0}$ на $A_\alpha^{\varkappa s}$ (зауважа: якщо $n \notin \alpha$,то можна замінити ХІ на $A_\alpha^{\varkappa m}$ для всякого m ,тому покладемо $n \in \alpha$ та $s \in \varkappa_0$). Далі очистимо D" таким чином,щоби всі його власні числа були відмінні від m .Тепер замінимо всі структурні предки формули $(\Box A_\alpha)^{\varkappa}$ на формулу $A_\alpha^{\varkappa m}$.Ця трансформація переводить структурні правила у структурні та не зачіпає ті логічні правила,в котрих замінювана формула входить у Γ,Δ.Тепер замінимо D_1 на $D_1(m/s)$.Ця підстановка зберігає аксіоми, структурні правила та АІ-,КІ- ,Ре-правила.Розглянемо Dc-правила:

1.Якщо l власне число /$\to\Box$/-правила,то ,враховуючи очищення,$l \neq m, s$, також відповідне обмеження виконано. $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A_{\alpha_0}^{\varkappa_0}}{}$

2.Якщо l - це власне число /$\to\Box$/-правила: $\Gamma \to \Delta, (\Box A_\alpha)^{\varkappa}$, тоді $\varkappa_0/\alpha_0 = \varkappa l/\alpha$ та $l \in \varkappa_0$.Враховуючи очищення,$l \neq m, s$,так що $\varkappa_0(m/s)/\alpha_0 = \varkappa(m/s) l/\alpha$,$l \notin \Gamma(m/s), \Delta(m/s), \varkappa(m/s)$,тобто умова для цього правила виконана.

3.Якщо це правило не має власного числа,то $\varkappa_0/\alpha_0 = \varkappa l/\alpha$ для всякого l ,тобто умова для цього правила знову виконана.Таким чином результуюче доведення D* має форму:

$$D_1(m/s)$$

$$\Gamma_1 \to \Delta_1', A_\alpha^{\varkappa m} \qquad \dfrac{\Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_2 \to \Delta_2, A_\alpha^{\varkappa m}} \qquad \dfrac{\Gamma_3 \to \Delta_3, A_\alpha^{\varkappa m}\ A_\alpha^{\varkappa m}}{\Gamma_3 \to \Delta_3, A_\alpha^{\varkappa m}}$$

$$\Gamma \to \Delta, A_\alpha^{\varkappa m},$$

де Δ_1' - результат заміни $(\Box A_\alpha)^{\varkappa}$ на $A_\alpha^{\varkappa m}$.

<u>Лема 5</u>.Якщо $(0, F \cup A_\alpha^{\varkappa}) \vdash S$ то $(0, F) \vdash S$.

ІД(індукція по числу січень з формулою $A_\alpha^{\varkappa}$).Базис індукції - явний.Для обгрунтування індукційного переходу,виберемо найвище січення наступної форми :

$$
\begin{array}{ccccc}
\Gamma_1, A_\alpha^\varkappa \to \Delta_1, A_\delta^\nu & \Gamma_2, A_\alpha^\varkappa, B_\beta^\lambda \to \Delta_2, B_\gamma^\mu & \dfrac{\Gamma_3 \to \Delta_3}{\Gamma_3, A_\alpha^\varkappa \to \Delta_3} & \dfrac{A_\alpha^\varkappa, A_\alpha^\varkappa, \Gamma_4 \to \Delta_4}{A_\alpha^\varkappa, \Gamma_4 \to \Delta_4} \\
\searrow & | & \swarrow & \swarrow \\
\multicolumn{4}{c}{\dfrac{\Pi \to \Lambda, A_\alpha^\varkappa \qquad A_\alpha^\varkappa, \Gamma \to \Delta}{\Pi, \Gamma \to \Delta, \Lambda}}
\end{array}
$$

де $\varkappa/\alpha = \nu/\delta \neq 0, \lambda/\beta = \mu/\nu \neq 0$ (якщо $\varkappa/\alpha = 0$,то у доведенні відсутня крайня ліва секвенція).Без втрати загальності (лема 3) покладемо $\varkappa = \nu, \alpha = \delta$.Тепер викреслемо всі стуктурні предки $A_\alpha^\varkappa$ та домножимо відповідні секвенції на $\Pi \to \Lambda$.Результуюче доведення не матиме січення:

$$
\begin{array}{cccc}
\Pi \to \Lambda, A_\alpha^\varkappa & \Pi, \Gamma_2', B_\beta^\lambda \to \Delta_2, \Lambda, B_\gamma^\mu & \Pi, \Gamma_4' \to \Delta_4, \Lambda & \dfrac{\Pi^\circ, \Gamma_3' \to \Delta_3, \Lambda^\circ}{\Pi, \Gamma_3' \to \Delta_3, \Lambda} \\
\searrow & | & \swarrow & \swarrow \\
\multicolumn{4}{c}{\Pi, \Gamma \to \Delta, \Lambda}
\end{array}
$$

де Γ_i' – результат викреслення структурних предків $A_\alpha^\varkappa$ в Γ_i ;Π°, Λ° порожні, якщо $\Gamma_3 = \Gamma_3'$, інакше вони співпадають з Π, Λ.

<u>Лема 6</u>. Якщо $(k, F \cup \{C\}) \vdash S$,то $(k, F) \vdash S$, $(k>0)$.

I Д.1.С має форму $(A \supset B)^\varkappa$ ($\varkappa \geq 0$). Доведення має форму:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} D_0' & D_0^\varkappa \\ | & | \end{array} \\
 & \dfrac{\Gamma_1 \to A^\varkappa, \Delta_1 \qquad \Gamma_1, B^\varkappa \to \Delta_1}{\Gamma_1, (A \supset B)^\varkappa \to \Delta_1} \\
D_0 & | \\
| & \\
\multicolumn{2}{c}{\dfrac{\Pi \to \Lambda, (A \supset B)^\varkappa \qquad \Gamma, (A \supset B)^\varkappa \to \Delta}{\Gamma, \Pi \to \Lambda, \Delta}}
\end{array}
$$

Викреслимо в доведенні всі структурні предки антецедентного входження формули $(A \supset B)^\varkappa$, одночасно домноживши відповідні секвенції на $\Pi \to \Lambda$. В отриманому доведенні формула січення має меншу складність:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} |\,(\text{доведення з леми 1}) & D_1 \\ | & | \end{array} \\
D_2 & \Pi, A^\varkappa \to \Lambda, B^\varkappa \qquad \Pi^\circ, \Gamma_1', B^\varkappa \to \Delta_1, \Lambda^\circ \\
| & = = = = = = = = = = = = = = = \\
\multicolumn{2}{c}{\dfrac{\Gamma_1', \Pi^\circ \to \Lambda^\circ, \Delta_1, A^\varkappa \qquad \Pi, \Gamma_1', A^\varkappa \to \Lambda\ \Delta_1}{\Gamma_1', \Pi \to \Lambda, \Delta_1}} \\
\multicolumn{2}{c}{|} \\
\multicolumn{2}{c}{\Gamma, \Pi \to \Lambda, \Delta}
\end{array}
$$

(= – значить застосування правила /Ci/ та декілька разів правила

/Ск/).Γ_1' - це результат викреслення формули $(A \supset B)^*$ із Γ_1;Π°,Λ° порожні, якщо $\Gamma_1'=\Gamma_1$, та співпадають з Π,Λ в противному разі. Доведення $D_1(D_2)$ тотожні з D_0' (D_0''), якщо $\Gamma_1'=\Gamma_1$. Інакше $D_1(D_2)$ є результат застосування /Сі/-правила до D_0 та D_0' (D_0''), яке можна елімінувати зведенням до попереднього випадку (випадок, коли $A(B)$ є атомною формулою зводиться до попереднього (лема 3)).

2.С має форму $(\Box A)^*$. Доведення має форму:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Pi \to (\Box A)^*,\Lambda} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1, A^{*m} \to \Delta_1}}{(\Box A)^*,\Gamma_1 \to \Delta_1}}{\vdots \atop (\Box A)^*,\Gamma \to \Delta}}{}}{\Pi,\Gamma \to \Delta,\Lambda}$$

Викресливши структурні предки формули $(\Box A)^*$ та домноживши відповідні секвенції на $\Pi \to \Lambda$, отримаємо доведення :

$$\dfrac{\Pi \to \Lambda, A^{*m} \qquad \Gamma_1', \Pi^\circ, A^{*m} \to \Lambda^\circ, \Delta_1}{\dfrac{\Pi, \Gamma_1' \to \Delta_1, \Lambda}{\vdots \atop \Pi,\Gamma \to \Delta, \Lambda}} \quad \text{(позначення як в 1)}$$

<u>Теорема 1</u> (про усунення січення). Кожне доведення в системі GTM із застосуванням правила /Сі/ трансформується в доведення без застосування цього правила.

ІД (індукція по максимальній ступені /Сі/-правила у доведенні). Базис індукції $k=0$ засновується індукцією по кількості формул у списку F: якщо він пустий, то теорема справджується тривіально; якщо маємо n формул, то по лемі 6 теорема має місце. Індукційний перехід засновується такою ж індукцією: якщо $n = 0$, то $(k+1,F) \vdash S$ є доведенням $(k,G) \vdash S$ для деякого G, так що теорема вірна за індуктивною гіпотезою(ІГ); якщо $(k+1,F) \vdash S$ для $n=1$, тоді по лемі 6 $(k+1,G) \vdash S$ для $|G|=1-1$, так що теорема вірна за ІГ.

<u>Визначення 4</u>. Дедуктивний ланцюг (д.л.) для секвенції S це ланцюг секвенцій $S_1, S_2 \ldots S_n \ldots$ такий, що

D0.$S_0=S$.

D1.Якщо S_n має форму $\ldots A_\alpha^* \ldots \to \ldots A_\beta^\lambda \ldots$ $(\lambda/\beta = */\alpha \neq 0)$, або $\ldots \bot^* \ldots \to \ldots$, тоді S_n - це останній елемент д.л. і він має довжину n. У цьому випадку д.л. замкнений (S замкнена, якщо кожний її д.л. замкнений).

D2.Інакше S_{n+1} визначається так: існує цілковите упорядкування неатомних формул S_n та відповідний кінечний підланцюг $P_1, P_2 \ldots P_k$ такий що $P_0 = S_n * S_n$, $P_k = S_{n+1}$, $P_i = P_{i-1} * R(Q_i)$, де $*$- операція множення секвенція, Q_i – це секвенція $\to A_i$ чи $A_i \to$, де A_i – це i-та неатомна формула в S_n та $R_i = R(Q_i)$ (радикал від Q_i) визначається як

	Q_i	R_i	D_i
1)	$(A \supset B)^* \to$	$\to A^*$ чи $B^* \to$	$\emptyset$
2)	$\to (A \supset B)^*$	$A^* \to B^*$	$\emptyset$
3)	$(\Box A)^* \to$	$A^{*n_1}, A^{*n_2}, \ldots A^{*n_m} \to$	$\emptyset$
4)	$\to (\Box A)^*$	$\to A^{*e}$	(e)
		$(e \notin D_{n,i-1})$	(власне число R_i)

e – перше число, яке не належить $D_{n,i-1}$,

де D_n – це область S_n, D_i – це область R_i та $D_{n,i} = D_n \cup D_i$ – це область P_i. Будемо писати $R(A_i)$, якщо Q_i зрозуміле. Позначимо $S_{n,i}$ елемент P_i підланцюга в D2, тобто $S_{n+1} = S_{n+1,0} = S_{n,k}$. $T, T_1, T_2 \ldots$ – це змінні по ланцюгам секвенцій. $T^{(k)}$, $(T_{(k)})$ – це позначення для підланцюга $S_k, S_{k+1} \ldots$ ($S_1, S_2, \ldots S_k$) ланцюга T. Область T це $\bigcup_n D_n$. Для д.л. входження $R(A_i)$ є безпосереднім послідовником входження A_i, як і саме входження A_i у другу копію S_n в $P_0 = S_n * S_n$. Відношення "бути послідовником" для формул д.л. визначається як транзитивне та рефлексивне замкнення відношення "безпосередній послідовник".

<u>Визначення 5</u>. Секвенція $S^* : \Gamma^* \to \Delta^*$ (D^*) включає секвенцію S : $\Gamma \to \Delta$ (D) (пишемо $S^* \rangle S$), якщо $\Gamma^* \supseteq \Gamma$, $\Delta^* \supseteq \Delta$, $D^* \supseteq D$. Ланцюг T^* включає ланцюг T (пишемо $T^* \rangle T$), якщо для кожної $S_n \in T$ існує $S_m^* \in T^*$: $S_m^* \rangle S_n$.

Лема 7. Якщо T_1, T_2 – це д.л. та $S_k, S_{k+1} \in T_1$, $S_k, S'_{k+1} \in T_2$, тоді $D_{n+1} = D'_{n+1}$. Доведення очевидне($\blacksquare$).

<u>Лема 8</u>. Якщо T – це д.л., то $T^{(k)} \rangle T \rangle T_{(k)}$, для всякого k. T замкнений, якщо $T^{(k)}$ замкнений. $\blacksquare$

<u>Лема 9</u>. Якщо T – це д.л. для секвенції $S : \Gamma, A^* \to \Delta$ (D), тоді існує ланцюг T^* та 1-1-функція f з його області у натуральні числа така, що $T \rangle T^*$ та $f(T^*)$ є д.л. для секвенції $S^* : \Gamma \to \Delta$ (D^*).

Доведення. Визначимо f та T^* індукцією по довжині T^*.

Базис. Нехай 1 – це операція викреслення всіх наступників A^*, що входять в секвенцію. Покладемо $T_{f(0)} = S_{\delta} = 1(S)$ та визначимо f як тотожню функцію на області S_{δ}. Тоді $T_{(0)} \rangle T_{f(0)}$.

Індуктивна гіпотеза (ІГ). Нехай побудован ланцюг $T_{f(n)} : S_1^*, S_2^*, \ldots S_n^*$ та функція f такі, що $T_{(n)} \rangle T_{f(n)}$ таким чином, що $S_n^* = 321(S_n)$, де 2 – це операція викреслення всіх формул з власними числами наступників A^*, 3 – це операція викреслення всіх формул з $n \in \varkappa^0$ $(\varkappa^0 = \varkappa \setminus D^*)$ у верхньому індексі, та $f(T_{f(n)})$ є д.л. для S^*.

Розглянемо підланцюг $P_0, P_1, \ldots P_k$ для S_{n+1} і його 3!-образ, де $3! = 321$: $3KP_0$), $3KP_1$), $\ldots$ $3KP_k$). Доведемо "внутрішньою" індукціщо по i, що існує 1-1- розширення функції f таке, що

$(\#)\ f\exists KP_0),\ f\exists KP_1), \dots f\exists KP_k)$

є підланцюг для $f(S_{n+1}*)$ до i. (Заувага: цілковите упорядкування S_{i}^{*} визначається S_n, т.я. за IГ $S_n* \subset S_n$).

В. Базис. Враховуючи $f\exists K S_n * S_n) = f\exists K S_n) * f\exists K S_n)$, маємо $P_0^* = f\exists KP_0) = f(S_n*) * f(S_n*)$ та визначеність f на $\exists KP_0)$.

ВІГ. Нехай $(\#)$ є підланцюгом для $f(S_{n+1}*)$ відносно деякого розширення f, яке визначене до i-го елементу. Розглянемо i+1-й елемент в $S_{n+1} - F$.

I) $P_i : \Gamma \to \Delta, F$ та $F := (A \supset B)^*$.

1. $\exists!(F) = F$. Тоді $R(f\exists!(F)) = f\exists!(F)$, за визначенням R. Отже $f\exists!$-образи P_i, P_{i+1} будуть наступні:

$$\frac{P_i * : f\exists!(\Gamma) \to f\exists!(\Delta), f(F)}{P_{i+1} * : f\exists!(\Gamma), f(A^*) \to B^{f(k)},\ f\exists!(\Delta), f(F)}$$

що є правильним продовженням д.л. з тривіальним розширенням f.

2. $\exists!(F) = \emptyset$. Тоді $\exists!(R(F)) = \emptyset$ та $f\exists!(P_{i+1}) = P_i*$. Отже цю секвенцію ми викреслюємо.

II) Випадок $P_i : \Gamma, F \to \Delta$, та $F := (A \supset B)^*$ розглядається аналогічно.

III $P_i : \Gamma, F \to \Delta$, та $F := (\Box A)^*$:

$$\frac{P_i}{A^{*n_1}, A^{*n_2}, \dots A^{*n_m}, \Gamma, F \to \Delta \qquad n_i \in D_n.}$$

1. $\exists!(F) = F$. Так як $R(F)$ визначено для $n_i \in D_n$, $\exists R(F)$ визначено для $n_i \in D_n*$. Але $R(f(F))$, за визначенням д.л., визначено для $n_i \in f(D_n*)$. Отже $f\exists!$-образи P_i, P_{i+1} будуть наступні:

$$\frac{P_i * : f\exists!(F), f\exists!(\Gamma) \to f\exists!(\Delta)}{P_{i+1} * : f\exists!(\Gamma), f(F)\ A^{*n_1}, A^{*n_2}, \dots A^{*n_m} \to f\exists!(\Delta) \qquad n_i \in f(D_n*),}$$

що є правильним продовженням д.л. з тривіальним розширенням f. (Заувага: тут ми суттєво використали 1-1 властивість f, яка гарантує попарну відмінність усіх чисел у $f(D_n*)$, тобто $f(D_n*)$ є множиною).

2. Якщо $\exists!(F) = \emptyset$, тоді $\exists! R(F) = \emptyset$ та $f\exists!(P_{i+1}) = P_i*$.

УІ $P_i : \Gamma \to \Delta, F$ та $F := (\Box A)^*$.

1. $\exists!(F) = F$. Отже $\exists! R(F) = R(F)$. Маємо наступні продовження д.л.:

$$\frac{P_i(D_{n,i})}{P_{i+1} : \Gamma \to \Delta, F, A^{*s}(D_{n,i} \cup (s)) \quad s \notin D_{n,i}} \qquad \frac{P_i * : f\exists!(\Gamma) \to f\exists!(\Delta), f(F)(f(D_{n,i}*)}{P_{i+1} * : f\exists!(\Gamma) \to f\exists!(\Delta), f(F), A^{f(*)f(s)}(f(D^*_{n,i}) \cup f(s))}$$

Заувага: $D^*_{n,i+1} = D^*_{n,i} \cup (s)$, $s \notin D^*_{n,i}$ та f правильно визначена на $D^*_{n,i}$ за ВІГ. Визначимо розширення f для s: f(s) є перше число, що не належить до $f(D^*_{n,i})$.Очевидно,що це 1-1 розширення.Тому $P_{i+1}*$ є правильне продовження P_i* з нетривіальним розширенням f.

2.Якщо $3!(F)=\emptyset$,тоді $3!R(F)=\emptyset$ та $f3!(P_{i+1})=P_i*$.Отже ця секвенція викреслюється.

Як результат внутрішньої індукції ми отримали (#) як підланцюг для $f(S^*_{n+1})$,викреслюючи всі повторюючися секвенції.Також ми маємо $S_{n+1}\ )\ 3!(S_{n+1})=S^*_{n+1}$.Таким чином визначено ланцюг $T^*_{(n+1)}$: $S^*_1, S^*_2, \dots S^*_n, S^*_{n+1}$ та 1-1 функцію ,яка визначена на області $T_{(n+1)}$ таку,що $T_{(n+1)})T^*_{(n+1)}$ та $f(T^*_{(n+1)})$ є д.л. для $S*$.Отже ми маємо зростаючу послідовність множин: $D^*_0 \subseteq D^*_1 \subseteq \dots \subseteq D^*_i \subseteq \dots$,де f є 1-1 функцією на кожному D^*_i $(i \geq 0)$,тобто $f|_{D^*_i}$.Покладемо $f = \bigcup_i f|_{D^*_i}$. Очевидно,що це 1-1 функція на $\bigcup_n D_n$, що є областю для $T*$.■

Наслідок 1.Якщо секвенція $S*:\Gamma \to \Delta$ замкнена,то замкнена і секвенція $A^\varkappa, \Gamma \to \Delta$ $(\Gamma \to \Delta, A^\varkappa)$.

Доведення.Якщо $S*$ замкнена,то $f(T*)$ має довжину n,тобто $f(S^*_k)$ має форму: $\dots A_\alpha^{f(\varkappa)} \dots \to \dots A_\beta^{f(\lambda)} \dots$ $(f(\lambda)/\beta = f(\varkappa)/\alpha \neq 0)$.Враховуючи,що f є 1-1 функція,маємо $\lambda/\beta = \varkappa/\alpha \neq 0$.Але $T)T*$.Значить для деякого m S_m має форму $\dots A_\alpha^\varkappa \dots \to \dots A_\beta^\lambda \dots$ $(\lambda/\beta = \varkappa/\alpha \neq 0)$,яка і буде останньою секвенцією у T.

Наслідок 2.Якщо секвенція $A^\varkappa, A^\varkappa, \Gamma \to \Delta$ $(\Gamma \to \Delta, A^\varkappa, A^\varkappa)$ замкнена, то замкнена і секвенція $A^\varkappa, \Gamma \to \Delta$ $(\Gamma \to \Delta, A^\varkappa)$.

Доведення.Враховуючи,що S_1 для $A^\varkappa, \Gamma \to \Delta$ має форму $\Gamma^0, A^\varkappa, A^\varkappa, \Gamma \to \Delta, \Delta^0$, результат отримується з наслідка 1.■

<u>Лема 10</u>.Нехай мається секвенція $\Gamma \to \Delta$ (D) та атомні формули $A_\alpha^\varkappa$,A_β^λ $(\varkappa/\alpha = \lambda/\beta \neq 0)$.Нехай D^0 - це множина чисел спільна $\varkappa$ та λ,$K=\{k_1, k_2, \dots k_s\} = \varkappa \setminus D'$,$L=\{l_1, l_2, \dots l_n\} = \lambda \setminus D'$,$D' = D \cup D^0$, $k^* = \max K$, $l^* = \max L$.

Тоді для кожного д.л. $T*$ секвенції $S*:\Gamma \to \Delta, A_\beta^\lambda (D \cup L)$ існує д.л.T секвенції $S:\Gamma \to \Delta, A_\alpha^\varkappa$ $(D' \cup K)$ та 1-1 функція f, визначена на області ланцюга $\begin{cases} 21(T), \text{якщо } l^* (k^* & (A) \\ T, \text{якщо } l^*) k^* & (B) \end{cases}$ така ,що $T^*)w(T)$, де $w=\begin{cases} f21, \text{випадок } (A) \\ 21f, \text{випадок } (B) \end{cases}$,та 1 - це операція підстановки A_β^λ замість послідовників $A_\alpha^\varkappa$,2 - це операція одночасної підстановки

$$\begin{cases} (l_1/k_1, l_2/k_2, \dots l_n/k_n), \text{якщо } s=n; \\ (l_1/k_1, \dots l_n/k_n, l_1/k_{n+1} \dots l_n/k_{p.n} \dots l_r/k_s), \text{де } r \equiv s (\mathrm{mod}\ n), \text{якщо } s)n \end{cases}$$

Доведення.Випадок $s=n$.(Зауважа: випадок $s(n$ зводиться до цього випадку,розглядаючи секвенцію $\Gamma \to \Delta, A_\alpha^\varkappa, A_\alpha^{\varkappa_0}$,де $\varkappa_0 = \varkappa, k_{s+1}, \dots k_n$, $k_i \notin D^0$,тобто $\varkappa_0/\alpha = \varkappa/\alpha$: операція $2 \vDash 21$ не змінює кількости неатомних формул у секвенції).

Визначимо д.л. T та функцію f індуктивно.

Базис. $T_{(o)} = S_o = S$. f – це тотожня функція на $D'\cup L$ (випадок A), чи на $D'\cup K$ (випадок B). З цього визначення випливає, що $T*)w(T_{(o)})$ так, що $S_o^* = S* = w(S_o)$ та S_o, S_o^* мають однакове число неатомних формул, та D_o^*, D_o мають однакове число елементів.

ІГ. Покладемо, що д.л. побудован таким чином, що 1) $S_n^* = w(S_n)$; 2) існує 1-1 відповідність між D_n та D_n^*; 3) f визначена так $f(e_i) = e_i^*$, де e_i, e_i^* – це i-те власне число в $D_n (D_n*)$. Очевидно, що $D_n = E_n \cup D'\cup K$, $D_n* = E_n* \cup D'\cup L$, де $E_n (E_n^*)$ – це множина власних чисел з $D_n (D_n*)$. Таким чином за ІГ маємо $E_n = \{e_o, e_o+1, \ldots e_o+r\}$ та $E_n^* = \{e_o^*, e_o^*+1, e_o^*+r\}$, де $e_o = \max(D'\cup K)+1$, $e_o^* = \max(D'\cup L)+1$.

У випадку A f визначена на області секвенції $2KS_n$), тобто $2KD_n$). Враховуючи, що $l^*(k^*(e_o$, $2KD_n$) має форму $E_n \cup D'\cup L$, тобто за ІГ f визначена як 1-1 функція. У випадку B f визначена на області секвенції S_n. Її кообласть є $E_n^* \cup D'\cup K$. Враховуючи, що $k^*($ $(l^*(e_o^*$, f є 1-1 функцією.

Із ІГ випливає 1-1 відповідність між неатомними формулами S_n* та S_n таким чином, що для кожної $F* \in S_n*$ існує $F \in S_n$: $F* = w(F)$, тобто $F*$ та F мають однакову фолрму. Упорядкуємо S_n за допомогою S_n* : якщо неатомна формула $F*$ має номер i у S_n*, то цей же номер має F у S_n.

Тепер побудуємо ланцюг для S_{n+1}, тобто $P_0, P_1, \ldots P_k$, та для $S_{n+1}*$, тобто $P_0^*, P_1^*, \ldots P_k^*$. Тепер доведемо внутрішньою індукцією, що існує 1-1 розширення f на власні числа з тим самим порядковим номером у S_{n+1} та $S_{n+1}*$ таке, що маємо $P_i* = w(P_i)$ до i включно.

В. Базис. Так як $w(S_n*S_n) = w(S_n)*w(S_n)$, то $P_o* = w(P_o)$ за ІГ.

ВІГ. Покладемо, що існує 1-1 розширення f на власні числа з тим самим порядковим номером у S_{n+1} та $S_{n+1}*$ таке, що маємо $P_i* = w(P_i)$ до i включно. Розглянемо i+1-шу формулу $F*$ у S_n* (відп. F у S_n). За визначенням $F* = w(F)$ (*).

I) $P_i*: \Gamma* \to \Delta*, F*$ та $F* = (A \supset B)^{**}$.

$$\frac{P_i*}{P_{i+1}*: \Gamma*, A^{**} \to B^{**}, \Delta*, F*} \qquad \frac{P_i: \Gamma \to \Delta, (A \supset B)^*}{P_{i+1}: \Gamma, A^* \to B^* \Delta, F}$$

За ВІГ $\Gamma* = w(\Gamma)$ та $\Delta* = w(D)$, та за (*) $\varkappa* = w(\varkappa)$. Так як ні A^*, ні B^* не є послідовниками A_α^*, ми отримаємо $P_{i+1}* = w(P_{i+1})$.

II) Випадок $\Gamma*, F* \to \Delta*$ аналогічний до попереднього.

$$\frac{P_i*}{P_{i+1}*:\Gamma*,F*\ A^{**n_1},A^{**n_2},\dots A^{**n_s} \to \Delta*} \qquad \frac{P_i:\Gamma,F \to \Delta}{P_{i+1}:A^{*m_1},A^{*m_2},\dots A^{*m_s},\Gamma,F \to \Delta}$$

$n_i \in D_n*$, $m_i \in D_n$

A) Так як $2KD_n$)= $E_n \cup D' \cup L$,то $D_n* = f(E_n) \cup D' \cup L$.Тобто існує 1-1 відповідність між D_n та D_n* така, що для кожного n_i існує m_i : $n_i = w(m_i)$.Отже за ВІГ маємо $P_{i+1}* = w(P_{i+1})$.

В) Так як $f(D_n) = f(E_n) \cup D' \cup K$,то $2f(D_n) = D_n* = f(E_n) \cup D' \cup L$. Ми маємо випадок аналогічний до А.

УІ) $P_i*:\Gamma*, \to F*,\Delta*$ та $F* = (\square A)^{**}$.

$$\frac{P_i*\ (D_{n,i}*)}{P_{i+1}*:\Gamma* \to \Delta*,F*,A^{**s}\ (D \cup (s))} \qquad \frac{P_i:\Gamma \to \Delta,F\ (D_{n,i})}{P_{i+1}:\Gamma \to \Delta,F,A^{*r}(D_{n,i} \cup (r))}$$

За ВІГ маємо $w(D_{n,i}) = D_{n,i}*$,тобто $D_{n,i} = E_i \cup E_n \cup D' \cup K$,$D_{n,i}* = E_i* \cup E_n* \cup D' \cup L$, де E_i, E_i* можливо порожні множини нових власних чисел та $E_n* = f(E_n), E_i* = f(E_i)$.

Покладемо $f(r)=s$. Так як s - це перше число,яке не належить до $D_{n,i}*$,а r - це перше число ,яке не належить до $D_{n,i}$,то маємо 1-1 розширення f .Отже $P_{i+1}* = w(P_{i+1})$.

Як результат внутрішньої індукції маємо :1) існування 1-1 розширення f таке, що $S_{n+1}* = P_k* = w(P_k) = w(S_{n+1})$,2) 1-1 відповідність між власними числами D_{n+1} та $D_{n+1}*$.■

Наслідок 1.Якщо секвенція $S:\Gamma \to \Delta, A_\alpha^{*}$ замкнена,то замкнена і секвенція $S*:\Gamma \to \Delta, A_\beta^{\lambda}$ $(*/\alpha = \lambda/\beta \neq 0)$.

Доведення.Якщо S замкнена,то замкнена і $S'':\Gamma \to \Delta, A_\alpha^{*}, A_\alpha^{*o}$ (наслідок 1 лема 9).Нехай д.л. для S" закінчується секвенцією $\dots A_\gamma^{\mu} \dots \to \dots A_\delta^{\nu} \dots (\mu/\gamma = \nu/\delta)$. Так як $w(\mu)/\gamma = w(\nu)/\delta$, то відповідний ланцюг для S* замкнений.

Якщо д.л. для S закінчується $\dots A_\gamma^{\mu} \dots \to \dots A_\alpha^{*}, A_\alpha^{*o} \dots$,тоді $\mu/\gamma = */\alpha = *o/\alpha$ (за визначенням $*o$).Отже w-образ цієї секвенції є $\dots A_\gamma^{w(\mu)} \dots \to \dots A_\beta^{\lambda} \dots$.Але $\lambda/\beta = */\alpha = *o/\alpha$, $w(\mu)/\gamma = w*(\mu)/\gamma$ (т.я. A_γ^{μ} не є послідовником A_α^{*})$= w*(*o)/\alpha = *o/\alpha$ (т.я.$*o \cap D^o = \emptyset$).

Отже $w*(\mu)/\gamma = *o/\alpha = */\alpha$, де $w* = \begin{cases} f2 & \text{,випадок A} \\ 2f & \text{,випадок B} \end{cases}$.Таким чином

$w(\mu)/ = \lambda/\beta$ та д.л. для секвенції S* замкнений.

Випадок s)n .Визначимо д.л. та функцію f індуктивно.

Базис.$T_{(o)} = S_o = S$. f - це тотожня функція на $D' \cup L$ (випадок A) та на $D' \cup K$ (випадок B).Таким чином $w(S_o) \langle S_o*$.

ІГ.Нехай побудовано д.л. $T_{(n)}:S_1,S_2,\dots S_n,S_{n+1}$ таким чином,що для деякого $n*\geq n$:

1) $S_{\bar{n}}^{*} = w(S_n) \langle S_{\bar{n}*}^{*}$; 2) f - це монотонна ін"єкція власних чисел з D_n у власні числа з $D_{\bar{n}*}^{*}$.

З ІГ випливає, що $S_{\bar{n}*}^{*}$ має форму : $\Gamma^{o}\ \Gamma* \rightarrow \Delta^{o}\ \Delta*\ (D_{\bar{n}*}^{*})$, де $S_{\bar{n}}^{*}: \Gamma* \rightarrow \Delta*\ (D_{\bar{n}}^{*}), D_{\bar{n}}^{*} \leq D_{\bar{n}*}^{*}, D_n = E_n \cup D' \cup K$, $D_{\bar{n}*}^{*} = E_{\bar{n}*}^{*} \cup D' \cup L$. У випадку А область f - це $2K D_n) = E_n \cup D' \cup L$, а її кообласть є $f(E_n) \cup D' \cup K$,яку позначимо $w(D_n)$,тобто $D* = w(D_n)$.За ІГ $E_{\bar{n}}^{*} = (E_n \leq E_{\bar{n}*}^{*}$ таким чином,що якщо $e_1 \langle e_2$, то $f(e_1)=e_1* \langle f(e_2)=e_2*$ $(e_i \in E_n, e* \in E_{\bar{n}*}^{*})$. Отже f - це 1-1 функція. У випадку В f визначена на D_n та за ІГ її кообластю є $E_{\bar{n}}^{*} \cup D' \cup K$ (в цьому випадку $w(D_n)$ означає $2f(S_n) = D_{\bar{n}}^{*}$).Але $k*\langle l*\langle e_{\bar{o}}^{*}$ та f монотонна,отже $f(e) \geq e_{\bar{o}}^{*}$,$e \in E$. Таким чином f є 1-1 функція.

Так як $S_{\bar{n}}^{*} \langle S_{\bar{n}*}^{*}$ та існує 1-1 відповідність між неатомними формулами $S_{\bar{n}}^{*}$ та S_n, то можна впорядкувати S_n за допомогою $S_{\bar{n}}^{*}$, та побудувати підланцюг для S_{n+1},тобто $P_0, P_1, \ldots P_k$. Якщо $P_0^*, P_1^*, \ldots P_r^*$ $(r \geq k)$ - це підланцюг для $S_{\bar{n}*+1}^{*}$ та i-та неатомна формула у S_n має номер $\#i$ у $S_{\bar{n}*}^{*}$, тоді розглянемо ланцюг $P_0^*, P_{\#1}^*, \ldots P_{\#k}^*$ $(\#i \geq i)$.Доведемо внутрішньою індукцією,що існує 1-1 монотонне розширення f таке,що :1) $w(P_i) \langle S_{\bar{m}*}^{*}$,для деякого $m* \geq n*+1$,2) $w(D_{n,i}) \leq D_{\bar{n}*,\#i}^{*}$,де $w(D_{n,i})$ - це область $w(P_i)$.

В.Базис.Якщо $P_{\bar{o}}^{*} = S_{\bar{n}*}^{*} * S_{\bar{n}*}^{*}$, тоді $P_{\bar{o}}^{*} \rangle w(S_n)*w(S_n) = S_{\bar{n}}^{*} * S_{\bar{n}}^{*}$, за ІГ. Але $w(S_n)*w(S_n) = w(S_n*S_n)$.Тобто $w(P_o) \langle P_{\bar{o}}^{*} \langle S_{\bar{n}*+1}^{*}$, за лемою 8.Також маємо $D_{n,o} = D_n$,$D_{\bar{n}*,o}^{*} = D_{\bar{n}*}^{*}$ та за ІГ $w(D_{n,o}) = D_{\bar{n}*,o}^{*}$.

ВІГ.Припустимо,що існує 1-1 розширення f ,яке задовольняє умови 1),2).Нехай F є $i+1$ -ша неатомна формула у S_n.

I) $P_i: \Gamma \rightarrow \Delta, F$ та $F := (A \supset B)^{*}$. Тоді $P_{i+1}: \Gamma, A^{*} \rightarrow B^{*}, \Delta, F$. Але $w(F)$ - $\#(i+1)$- та формула у $S_{\bar{n}*}^{*}$.Отже $P_{\#(i+1)}^{*}$ має форму $\Gamma*, w(A^{*}) \rightarrow w(B^{*}), \Delta*, w(F)$, і за лемою 8 $S_{\bar{n}*+1}^{*}$ має форму $\Gamma^{o}, w(A^{*}) \rightarrow w(B^{*}), \Delta^{o}$. Далі за ВІГ та лемою 8 $S_{\bar{m}*}^{*}$ ($m* \geq n*+1$) має форму $\Gamma'', w(A^{*}), w(\Gamma) \rightarrow w(B^{*}), w(\Delta), \Delta''$.Отже $w(P_{i+1}) \langle S_{\bar{m}*}^{*}$. Нагадаю,що за визначенням $\Gamma* = w(\Gamma)$.

За ВІГ $w(D_{n,i}) \leq D_{\bar{n}*,\#i}^{*}$.Але $D_{n,i+1} = D_{n,i}$, $D_{\bar{n}*,\#i}^{*} \leq D_{\bar{n}*,\#(i+1)}^{*}$, тому $w(D_{n,i+1}) \leq D_{\bar{n}*,\#(i+1)}^{*}$.

II) Випадок із $(A \supset B)^{*}$ у антецеденті розглядається аналогічно.

III $P_i: \Gamma, F \rightarrow \Delta$ та $F = (\Box A)^{*}$.Тоді $P_{i+1}: \Gamma, F\ A^{*n_1}, A^{*n_2}, \ldots A^{*n_s} \rightarrow \Delta$ $n_i \in D_n$.Але $w(F)$ - $\#(i+1)$- та формула у $S_{\bar{n}*}^{*}$.Отже $P_{\#(i+1)}^{*}$ має форму $A^{w(*)m_1}, A^{w(*)m_2}, \ldots A^{w(*)m_r}, \Gamma*, F* \rightarrow \Delta*$, $m_i \in D_{\bar{n}*}^{*}$.Отже за лемою 8 $S_{\bar{n}*+1}^{*}$ має форму Γ^{o}, $A^{w(*)m_1}, A^{w(*)m_2}, \ldots A^{w(*)m_r} \rightarrow \Delta^{o}$,а за ВІГ $S_{\bar{m}*}^{*}$ має форму Γ'', $w(\Gamma), w(F), A^{w(*)m_1}, A^{w(*)m_2}, \ldots A^{w(*)m_r} \rightarrow \Delta'', w(\Delta)$,де $m_i \in D_{\bar{n}*}^{*}$. За ІГ $D_{\bar{n}}^{*} \leq D_{\bar{n}*}^{*}$.$D_{\bar{n}}^{*} = E_{\bar{n}}^{*} \cup D' \cup L = w(D_n)$ .w-образ P_{i+1} має форму $w(\Gamma), w(F)$ $A^{w(\varkappa)w(n_1)}, A^{w(\varkappa)w(n_2)}, \dots A^{w(\varkappa)w(n_s)} \to w(\Delta)$, де $w(k_i) = l_j$, якщо $i \equiv j \pmod n$ ($\varkappa = (k_1, k_2, \dots k_m)$). Таким чином $w(P_{i+1})$ включає p екземплярів $A^{w(\varkappa)} l_j$. Значить за лемою 8 $w(P_{i+1}) \subset S_{m^*+p}$. Так як $D_{n,i+1} = D_{n,i}$, то за ВІГ $w(D_{n,i+1}) \subseteq D_{n^*,\#(i+1)}$.

IУ $P_i : \Gamma \to F, \Delta$ та $F = (\Box A)^{\varkappa}$. Але $w(F)$ – $\#(i+1)$– та формула у S_{n^*}. Тоді

$$\frac{P_i : \Gamma \to \Delta, F \ (D_{n,i})}{P_{i+1} : \Gamma \to \Delta, F, A^{\varkappa e} (D_{n,i+1})} \qquad \frac{P_{\#(i+1)-1} : \Gamma \to \Delta, F \ (D_{n^*,\#(i+1)-1})}{P_{\#(i+1)} : \Gamma^* \to \Delta^*, w(F), A^{w(\varkappa)e^*} (D_{n^*,\#(i+1)})}$$

$D_{n,i+1} = D_{n,i} \cup \{e\}$, $D_{n^*,\#(i+1)} = D_{n^*,\#(i+1)-1} \cup \{e^*\}$. Тепер визначимо $f(e) = e^*$. Враховуючи властивості власних чисел, це є 1-1 розширення функції f.

За ВІГ $w(D_{n,i}) \subseteq D_{n^*,\#i}$. Так як $\#i \le \#(i+1)-1$, то $D_{n^*,\#i} \subseteq D_{n^*,\#(i+1)-1}$. Отже $w(D_{n,i}) \subseteq D_{n^*,\#i} \subseteq D_{n^*,\#(i+1)-1}$. Із леми 8 випливає, що S_{n^*+1} має форму $\Gamma^{\circ} \to \Delta^{\circ}, w(F), A^{w(\varkappa)}, w(e)$, а за ВІГ S_{m^*} має форму $\Gamma'' \to \Delta'', w(F), A^{w(\varkappa)}, w(e)$. Але це значить, що $w(P_{i+1}) \subset S_{m^*}$ для $m^* \ge n^{**}+1$. ■

В результаті внутрішньої індукції ми отримали: 1) $w(S_{n+1}) \subset S_{m^*}$, $m^* \ge n^{**}+1$; 2) $w(D_{n+1}) \subseteq D_{n^*+1}$. За ІГ $n \le n^*$, отже $n+1 \le n^{**}+1 \le m^*$. Оскільки 1-1 монотонне розширення монотонної ін"єкції є теж монотонною ін"єкцією, то f є монотонною ін"єкцією власних чисел з D_{n+1} у власні числа з D_{n^*+1}, а отже і у D_{m^*}.

У результаті індукції був побудований д.л. $T_{(n+1)}$ та відповідна функція f такі, що $w(T_{(n+1)}) \subset T^*$. ■

Наслідок 2. Якщо секвенція $S : \Gamma \to \Delta, A_{\alpha}^{\varkappa}$ замкнена, то замкнена і секвенція $S^* : \Gamma \to \Delta, A_{\beta}^{\lambda}$ ($\varkappa/\alpha = \lambda/\beta \neq 0$).

Доведення. Нехай д.л. для S закінчується секвенцією $\dots A_{\gamma}^{\mu} \dots \to \dots A_{\delta}^{\nu} \dots$ ($\mu/\gamma = \nu/\delta$). Так як $w(\mu)/\gamma = w(\nu)/\delta$, то відповідний ланцюг для S^* замкнений. Якщо д.л. для S закінчується секвенцією $\dots A_{\gamma}^{\mu} \dots \to \dots A_{\alpha}^{\varkappa} \dots$, тоді $\mu/\gamma = \varkappa/\alpha$. Її w-образ є $\dots A_{\gamma}^{w(\mu)} \dots \to \dots A_{\beta}^{\lambda} \dots$. Так як $w(\mu) = w^*(\mu)$ (A_{γ}^{μ} не є послідовником $A_{\alpha}^{\varkappa}$), та $w^*(\varkappa)/\alpha = \varkappa/\alpha$, $\varkappa/\alpha = \lambda/\beta$, то $w(\mu)/\gamma = w^*(\varkappa)/\alpha = \lambda/\beta$. ($w^*$ див. насл.1). Отже д.л. для S^* замкнений.

<u>Лема 11</u>. Для кожного д.л. T^* секвенції $S^* = (d/s)S$ існує д.л. T для секвенції $S : \Gamma \to \Delta, A^{\varkappa s}$, $s \notin \Gamma, \Delta, \varkappa$ та 1-1 функція f, яка визначена на області $\begin{cases} (d/s)T, \text{ якщо } d \le s \text{ (випадок A)} \\ T, \text{ якщо } d > s \text{ (випадок B)} \end{cases}$, та така, що $T^* \supset w(T)$, де $w = \begin{cases} f(d/s), & A \\ (d/s)f, & B \end{cases}$.

Доведення повністю аналогічне до другої частини леми 10.

Наслідок. Якщо секвенція $S: \Gamma \to \Delta, A^{*s}$, $s \notin \Gamma, \Delta, *$ замкнена, то замкнена і секвенція $S*: \Gamma \to \Delta, A^{*d}$ для всякого d.

Доведення. Якщо $S*$ не замкнена, то існує нескінчений д.л. $T*$ для $S*$. Розглянемо відповідний д.л. T для S , який закінчується $\ldots A_\gamma^\mu \ldots \to \ldots A_\delta^\nu \ldots$ ($\mu/\gamma = \nu/\delta$). Так як $w(\mu)/\gamma = w(\nu)/\delta$, то $T*$ замкнена. Отже $S*$ замкнена.

Лема 12. (слушність). Якщо секвенція S доводиться у системі GTM, то вона замкнена.

Доведення (індукція по кількості N правил у доведенні S).

Базис. Для аксіом д.л. кінечний за визначенням.

ІГ. Покладемо, що лема виконується для всіх секвенцій ,доведення яких має $\le n$ правил. Розглянемо S , доведення якої має $n+1$ правил. Останнє правило є :

1) /To/ чи /Cк/. За лемою 9 (насл.1,2) S замкнена.

2) AI чи KI. Для неатомних правил результат випливає з леми 9 та 8(2). Для атомних правил також з леми 10(насл.)

3) /□→/. Якщо $s \notin \Gamma, \Delta, *$, то результат випливає з лем 9, 8(2). Інакше використай ще лему 11(насл.).

4) /→□/. Результат випливає з лем 9, 11(насл.).

5) /□о→/. Якщо $\Gamma, A_{\alpha o}^{*o} \to \Delta$ замкнена, то і $\Gamma, A_\alpha^{*s} \to \Delta$ за лемою 10 (насл.). Якщо $s \notin \Gamma, \Delta, *$, тоді $\Gamma, (\Box A_\alpha)^* \to \Delta$ замкнена за лемою 9 та 8(2). Інакше використай ще лему 11(насл.).

6) /→о□/. Якщо $\Gamma \to \Delta, A_{\alpha o}^{*o}$ замкнена, то і $\Gamma \to \Delta, A_\alpha^{*s}$ ($s \notin \Gamma, \Delta, *$) за лемою 10(насл.). Результат випливає з лем 11, 9(насл.).■

Лема Кеніга. Якщо секвенція S має нескінченно багато д.л., то існує нескінченний д.л.

ІД. Нескінченний д.л. $S1, S2, \ldots Sn, Sn+1$ отримується так. $S_0 = S$. Покладемо, що вже визначен $S_1 S_2 \ldots S_n$, з якого починаються нескінченно багато д.л. А це значить; нескінченно багато кінечних підланцюгів починаються з $P_0 = S_n * S_n$. В свою чергу кожний підланцюг визначається деяким цілковитим упорядкуванням неатомних формул у S_n. Так як S_n кінечна, то кінечна кількість таких упорядкувань. Значить має бути цілковите упорядкування S_n , яке визначає нескінченну кількість підланцюгів. Нехай $P_0, P_1, \ldots P_k$ визначені так, що з них починається нескінченна кількість підланцюгів. Якщо $k+1$ -ша неатомна формула - це $(A \supset B)^*$ чи $(\Box A)^*$ в консеквенті, чи $(\Box A)^*$ в антецеденті, то нескінченна кількість підланцюгів починається з $P_0, P_1, \ldots P_k$, P_{k+1} . Якщо ж це $(A \supset B)^*$ в антеценденті, то нескінченна кількість підланцюгів починається

$P_0, P_1, \dots P_k$ $, P_k*(\to A^*)$ чи $P_0, P_1, \dots P_k$ $, P_k*(\to B^*)$. Так як довжина кожного такого підланцюга та ж сама – r наприклад, то P_r = S_{n+1}, тобто маємо нескінченну кількість підланцюгів тої ж самої форми $P_0, P_1, \dots P_r$, а значить нескінченна кількість д.л. починається з $S1, S2, \dots Sn, Sn+1$.■

Основна синтаксична лема. Якщо секвенція S замкнена, то вона має доведення в системі GTM.

Доведення. Так як кожний д.л. секвенції S кінечний, то за лемою Кеніга S має тільки кінечну кількість д.л. Нехай M – це довжина максимального д.л.. Лема доводиться індукцією по M–n для S_n.

Базис. n=M. S_M має доведення в GTM з аксіом за допомогою /To/-правил .

IГ. Покладемо, що секвенція S_{n+1} у любому д.л. для S має доведення у GTM. За визначенням 4 має існувати підланцюг $P_0, P_1, \dots P_k$ такий, що P_o = $S_n * S_n$ та P_k = S_{n+1}. Доведемо внутрішньою індукцією по k-i , що кожний P_i в кожному підланцюгу має доведення в GTM.

В. Базис спирається на IГ.

BIГ. Покладемо , що P_{i+1} має доведення у відповідному підланцюгу. Тоді за визначенням 4 $P_{i+1} = P_i * R(Q_i)$.

I) $R_i \in \to A^*$ або $B^* \to$. Тоді маємо доведення:

$$\frac{P_i * \to A^* \qquad P_i * B^* \to}{P_i}$$ / ⊃→ /, та можливо декілька /Ск →/

II) $R_i \in A^* \to B^*$: $$\frac{P_i * \ A^* \to B^*}{P_i}$$ / →⊃ /,/→ Ск/

III) $R_i \in A^{*m_1}, A^{*m_2}, \dots A^{*m_s} \to$;

$$\frac{P_i * A^{*m_1}, A^{*m_2}, \dots A^{*m_s} \to}{P_i}$$ / □→ / , / Ск → / (s разів)

IУ) $R_i \in A^{*m}$, $m \in D_{n,i}$: $$\frac{P_i * \ \to A^{*m}}{P_i}$$ / →□ /,/ → Ск /

Як результат внутрішньої індукції маємо: P_o = $S_n *$ S_n має доведення в GTM . Вживаючи правило /Ск/ , отримаємо доведення S_n .

Теорема повноти. Секвенція S має доведення в GTM тоді і тільки тоді, коли вона замкнена.

Доведення випливає з основної синтаксичної леми та леми 12.■

Заувага. Маючи на увазі стандартне генценовське формулювання G першопорядкової логіки предикатів (див. напр. Клини op.cit.), в якому розрізняються зв"язані та вільні індивідні змінні (ППФ :

,яка вільно містить зв"язані змінні , є квазиформула),можна довести mutatis mutandis теорему повноти відносно наступного визначення дедуктивного ланцюга : у визначенні 4 замінити в пункті D1 умови кінечності на 1) $\ldots A \ldots \to \ldots A \ldots$,де A - атомна формула,2) $\ldots \bot \ldots \to \ldots$;замінити таблицю радикалів на

	Q_i	R_i	D_i
1)	$(A \supset B) \to$	$\to A$ чи $B \to$	$\emptyset$
2)	$\to (A \supset B)$	$A \to B$	$\emptyset$
3)	$\forall x A(x) \to$	$A(c_1/x), A(c_2/x), \ldots A(c_n/x) \to$	$\emptyset$ $c_i \in D_n$
4)	$\to \forall x A(x)$	$\to A(c/x)$	$\{c\}$ $c \notin D_{n,i-1}$

c - перша вілна змінна, яка не належить $D_{n,i-1}$.

Семантика Тарського мови L_{TM}

Модель мови L_{TM} - це структура $M = \langle W, D_i^n, n, i \in N \rangle$, де W - це множина кінечних послідовностей натуральних чисел (≥ 1) ,включаючи порожню,а D_i^n - це i-та підмножина W послідовностей довжини n.Інтерпретація - це функція ,область якої множина ппф-2,а кообласть множина $\{1, 1/2, 0\}$, яка задовольняє наступним умовам:

$$1)\ \| p^{\varkappa}_{i,\alpha} \| = \begin{cases} 1, \varkappa/\alpha \neq 0,\ \varkappa/\alpha \in D_i^{|\alpha|} \\ 0, \varkappa/\alpha \neq 0,\ \varkappa/\alpha \notin D_i^{|\alpha|} \\ 1/2, \text{ інакше.} \end{cases} ,2)\ \| \bot^{\varkappa} \| = 0\ , \varkappa \in W$$

$$3)\ \| (A \supset B)^{\varkappa} \| = \begin{cases} 1, \| A^{\varkappa} \| = 0 \text{ або } \| B^{\varkappa} \| = 1. \\ 0, \| A^{\varkappa} \| = 1 \text{ та } \| B^{\varkappa} \| = 0. \\ 1/2, \text{ інакше.} \end{cases}$$

$$4)\ \| (\alpha A)^{\varkappa} \| = \begin{cases} 1, & \| A^{\varkappa n} \| = 1 \text{ , для всіх } n \in N. \\ 0, & \| A^{\varkappa n} \| = 0 \text{ ,для деяких } n \in N. \\ 1/2, & \text{інакше.} \end{cases}$$

$\Gamma \models \Delta$ тоді і тільки тоді,коли для всякої інтерпретації;

якщо $\| A \| = 1$ (для всіх $A \in \Gamma$) ,то $\| B \| = 1$ (для декотрого $B \in \Delta$).

Теорема повноти (семантична). $\vdash_{\alpha TM} \Gamma \to \Delta$ т.і.т.к. $\Gamma \models \Delta$.

ІД.Слушність семантики перевіряється безпосередньо.Повнота випливає з попередньої теореми повноти: якщо T - це незамкнений д.л. для $S: \Gamma \to \Delta$,тоді визначимо інтерпретацію (resp. модель),де фальсифікується S наступним чином: нехай $S_n: \Gamma_n \to \Delta_n \in T$,тоді покладемо:

$$1)\ \| \bot^{\varkappa} \| = \begin{cases} 0, \bot^{\varkappa} \in \Delta_n \\ 1, \bot^{\varkappa} \in \Gamma_n \end{cases} ,\ 2)\ D_i^k = \{\varkappa/\alpha : p^{\varkappa}_{i,\alpha} \in \Gamma_n\},\ k = |\alpha|,$$

3) $\| p^{*}_{i,\alpha} \| = \begin{cases} 1, *\!/\alpha \neq 0, & *\!/\alpha \in \Gamma_n \\ 0, *\!/\alpha \neq 0, & *\!/\alpha \in \Delta_n \\ 1/2, & *\!/\alpha = 0. \end{cases}$

Далі стандартним чином розширимо цю інтерпретацію на всі ппф.∎

Проблема. У ситемі GTM явно розділена логічна складність ппф (нижні індекси) та II дедуктивна складність (верхні індекси). Проблема розв"язання для логіки предикатів еквівалентна для системи GTM проблемі Поста для вільних напівгруп.

Частина II.

Визначення 1. $\#(A)[1/t_1, 2/t_2, \dots k/t_k]$ є перекладом з параметрами t_i $(i \le k)$ квазиформули A в мові логіки предикатів L в мову L_{TM}, якщо виконуються наступні умови:

1) $\#(\bot)[k/t] = \bot$, де $k = 1,2,\dots k$, $t = t_1, t_2, \dots t_k$;

2) $\#(A(a))[k/t] = \Box\, \#(A(a)[k+1/t, a]$, якщо a – це перша константа, яка не належить t;

3) $\#(A \supset B)[k/t] = \#(A)[k/t] \supset \#(B)[k/t]$, якщо всі терми $(A \supset B)$ є поміж t.

4) $\#(\forall x A(x))[k/t] = \Box\#(A)[k+1/t, x]$, якщо всі терми $\forall x A(x)$ є поміж t.

5) $\#(A^m_i(t^*_1, t^*_2, \dots t^*_s))[k/t] = p_{i,}(t^*_1, t^*_2, \dots t^*_s)(n_1/t^*_1)\dots(n_s/t^*_s)$, де $|(t^*_1, t^*_2, \dots t^*_s)| = m$, $(t^*_1, t^*_2, \dots t^*_s)$ – це слово у алфавіті $t^*_1, t^*_2, \dots t^*_s$, який є поміж t, $A^m_i(t^*_1, t^*_2, \dots t^*_s)$ – це атомна квазиформула.

6) # – це переклад формули A, якщо $\#(A) = \#(A)[\ ]$.

Лема 1. Для кожного д.л. T^M секвенції S^M : $\Rightarrow \#(A(a_1, a_2, \dots a_n))$ існує д.л. T для секвенції S: $\Rightarrow A(a_1, a_2, \dots a_n)$ та 1-1 функція f на області д.л. T така, що $+(T) \subset T^M$, де $A(a_1, a_2, \dots a_n)$ – це ппф з вільними змінними (індивідними параметрами) $a_1, a_2, \dots a_n$, $+(B(s_1, \dots s_q)) = B(t_1, \dots t_q))[n/a, n+1/v_1, \dots n+r/v_r]^{i_1, i_2 \dots i_{n+r}}$, для деяких $i_1, i_2 \dots i_{n+r}$ та $v_1, \dots v_r$ таких, що

a) $t_i = \begin{cases} a, \text{ якщо } s_i = a, \\ v, \text{ якщо } s_i = (c/v) \end{cases}$, b) $\{t_1, \dots t_q\} \subseteq \{a_1, \dots a_n, v_1 \dots v_r\}$,

c) якщо $s = (c/v_j)$, тоді $i_{n+j} = f(c)$; якщо $s = a_j$, то $i_j = f(a_j)$.

Доведення. T та f будуємо індуктивно.

Базис. $T_{(0)} = S_0 = S$. Враховуючи, що $\#(A(a_1, a_2, \dots a_n)) = \Box^n \#A(a_1, a_2, \dots a_n)[1/a_1, 2/a_2 \dots n/a_n]$ та що S^M_n включає секвенцію $\Rightarrow \#A(a_1, a_2, \dots a_n)[1/a_1, 2/a_2 \dots n/a_n]^{i_1, \dots i_n}$ для деяких $i_1, \dots i_n$, покладемо $f(a_k) = i_k$, що визначає 1-1 функцію, т.я. усі $\{i_k\}$

$(\{a_k\})$ різні. Отже $+(T_{(o)}) < T^M$.

ІГ. Покладемо, що д.л. $T_{(n)}$ $: S_1, S_2, \ldots S_n$ побудовано так, що $+(T_{(n)}) < T^M$. Це значить, що $+(S_n) < S^M_{n*}$ для деякого $n*$. Впорядкуємо S_n за допомогою $+(S_n)$. Це впорядкування визначить підланцюг $P_0, P_1, \ldots P_s$. Якщо F – це i-та формула у S_n, то нехай номер формули $+(F)$ у S^M_{n*} буде $+i$. Очевидно, що $i \le +i$. Якщо $P^M_0, P^M_1, \ldots P^M_r$ – це підланцюг для для S^M_{n*}, тоді розглянемо ланцюг $P^M_0, P^M_{+1}, \ldots P^M_{+s}$. Доведемо внутрішньою індукцією, що для кожного i існує 1-1 розширення функції f таке, що $+(P_i) < P^M_{+i}$ та $f(D_{n,i}) \subseteq D_{n*,+i}$.

В. Базис. $P_o = S_n * S_n, P^M_o = S^M_{n*} * S^M_{n*}$. По ІГ $+(S_n) < S^M_{n*}$, тобто $+(S_n) * +(S_n) < P^M_o$. Але $+(S_n * S_n) = +(S_n) * +(S_n)$, якщо ми використаємо образи з $+(S_n)$, а тим самим і f. Отже $+P_o < P^M_o$ та $f(D_{n,o}) = f(D_n) \le D^M_{n*}$ (за ІГ) $= D^M_{n*,0}$.

ВІГ. Покладемо, що існує 1-1 розширення f таке, що $+(P_i) < P^M_{+i}$ та $f(D_{n,i}) \le D^M_{n*,+i}$. Розглянемо $i+1$-шу формулу F у S_n. Тоді $P_{i+1} = P_i * R(F)$ та $P^M_{+(i+1)} = P^M_{+(i+1)-1} * R(+(F))$. За лемою @ (частина І) $P^M_{+(i)} < P^M_{+(i+1)-1}$. Отже $+(P_i) < P^M_{+(i+1)-1}$ та $f(D_{n,i}) \subseteq D^M_{n*,+(i+1)-1}$.

І). Нехай $F := (A \supset B)$ та $P_i : \Gamma \to \Delta, F$. Враховуючи визначення 1 та $+$-операції, $\#(A \supset B)(t_1, \ldots t_q)[\ldots] = \#(A)(t'_1, \ldots t'_q)[\ldots] \supset \#(B)(t''_1, \ldots t''_q)[\ldots]$, де терми $\{t'_i\}$ $(\{t''_i\})$ – це терми формул $A(B)$.

Отже
$$\frac{P_i}{P_{i+1} : \Gamma, A \to B, \Delta, F} \qquad \frac{P^M_{+(i+1)-1} : \Gamma^M \to \Delta^M, +(A \supset B)}{P^M_{+(i+1)} : \Gamma^M, +(A) \to +(B), \Delta^M, +(F).}$$

За ВІГ $+(\Gamma) \subseteq \Gamma^M$, $+(\Delta)$ Δ^M, отже $+(P_{i+1}) < P^M_{+(i+1)}$. Так як $D_{n,i+1} = D_{n,i}$ та $D^M_{n*,+(i+1)-1} = D^M_{n*,+(i+1)}$, то $f(D_{n,i+1}) \le D^M_{n*,+(i+1)}$.

ІІ). Випадок з $(A \supset B)$ у антецеденті є аналогічним.

ІІІ). Нехай $F := \forall x A(x, s_1, \ldots s_q)$ та $P_i : \Gamma, F \to \Delta$. Враховуючи визначення 1 та $+$-операції, $\#(\forall x A(x, t_1, \ldots t_q)[n/a, n+1/v_1 \ldots m/v_m] = \alpha\#(A(x, t_1, \ldots t_q))[n/a, \ldots m/v_m, m+1/x]$. Отже
$$\frac{P_i}{P_{i+1} : \Gamma, A(c_1/x, s), \ldots A(c_n/x, s) \to \Delta} \qquad \frac{P^M_{+(i+1)-1} : \Gamma^M, +F \to \Delta^M}{P^M_{+(i+1)} : \Gamma^M, +F, \{\#(A(x,t))[n/a, \ldots m/v_m, m+1/x]^{i,s}\}_{s \in D^M_{n*}} \to \Delta^M}$$, де $c_i \in D_n$

За ВІГ $+(\Gamma) \subseteq \Gamma^M$, $+(\Delta) \le \Delta^M$. За ІГ $f(c_i) \in D^M_{n*}$ та f є 1-1 функція. Так як $+(A(c_i/x, s)) = \#(A(x,t))[n/a \ldots m/v_m, m+1/x]^{i, f(c_i)}$, то маємо

$+(P_{i+1}) \langle P^M_{+(i+1)}$, а також $f(D_{n,i+1}) \subseteq D^M_{n*,+(i+1)}$.

VI). Нехай $F := \forall x A(x, s_1, \ldots s_q)$ та $P_i : \Gamma, \to \Delta, F$.

$$\frac{P_i \ (D_{n,i})}{P_{i+1} : \Gamma \to \Delta, F, A(c/x, s)(D_{n,i+1})} \qquad \frac{P^M_{+(i+1)-1} : \Gamma^M \to \Delta^M, +F \ (D^M_{n*,+(i+1)-1})}{P^M_{+(i+1)} : \Gamma^M \to \Delta^M, +F, \#(A(x,t))[n/a, \ldots m/v_m, m+1/x]^{i,e}(D^M_{n*,+(i+1)})}.$$

Покладемо $f(c)=e$. Враховуючи властивості c та e, маємо 1-1 розширення f. Так як $+(A(c/x, s))=\#(A(x,t))[n/a \ldots m/v_m, m+1/x]^{i,f(c)}$ то $+(P_{i+1}) \langle P^M_{+(i+1)}$. Також $D_{n,i+1} = D_{n,i} \cup \{c\}$, $D^M_{n*,+(i+1)} = D^M_{n*,+(i+1)-1} \cup \{e\}$. Отже $f(D_{n,i+1}) \subseteq D^M_{n*,+(i+1)}$.

Як результат внутрішньої індукції ми отримали 1-1 розширення функції f таке, що $+(S_{n+1}) \langle S^M_{n*+1}$. Отже ми побудували д.л. $T_{(n+1)}$: $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$ та визначили 1-1 функцію такі, що $+(T_{(n+1)}) \langle T^M$.■

Наслідок 1. Якщо секвенція S замкнена, то замкнена і S^M.

Доведення. Нехай д.л. T для секвенції S закінчується секвенцією

$\ldots A^m_i(s_1, s_2, \ldots s_q) \to A^m_i(s'_1, s'_2, \ldots s'_q)$, де A^m_i – предикатна змінна в L. Тоді д.л. T^M включає секвенцію:

$$\ldots \#(A^m_i(t_1, t_2, \ldots t_q))[n/a, n+1/v_1 \ldots n+r/v_r]^{i_1 \ldots i_{n+r}} \ldots \to \ldots$$
$$\ldots \#(A^m_i(t'_1, t'_2, \ldots t'_q))[n/a, n+1/w_1, \ldots n+k/w_k]^{j_1, \ldots j_{n+k}} \ldots$$

За визначенням $\{t_1, \ldots t_q\} \subseteq \{a, v\}$, $\{t'_1, \ldots t'_q\} \subseteq \{a, w\}$. Отже існують числа $n_1, \ldots n_q$ $(q \le n+r)$, $m_1 \ldots m_q$ $(q \le n+k)$, які відповідають $t_1, \ldots t_q$ та $t'_1, \ldots t'_q$. Як результат перекладу маємо:

$$\ldots P^{i_1, \ldots, i_{n+r}}_{i, (t_1, \ldots t_q)(n_1/t_1, \ldots n_q/t_q)} \ldots \to$$
$$\ldots P^{j_1 \ldots j_{n+k}}_{i, (t'_1, \ldots t'_q)(m_1/t'_1, \ldots m_q/t'_q)} \ldots$$

Позначимо цю секвенцію $P^i_{i,n} \to P^j_{i,m}$. Доведемо, що $i/n = j/m$. Це зачить, що треба довести $(t_1, \ldots t_q)(i_{n_1}/t_1, \ldots i_{n_q}/t_q) = (t'_1, \ldots t'_q)(j_{m_1}/t'_1, \ldots j_{m_q}/t'_q)$, що виконується т.і.т.т., коли $(s_1, \ldots s_q)(i_{n_1}/s_1, \ldots i_{n_q}/s_q) = (s'_1, \ldots s'_q)(j_{m_1}/s'_1, \ldots j_{m_q}/s'_q)$.

За визначенням д.л. $s_1 = s'_1, \ldots s_q = s'_q$. Розглянемо першу рівність. Можливі наступні випадки: a) $s_1 = a_p$, $s'_1 = a_u$, b) $s_1 = a_p$, $s'_1 = (c/x)$, c) $s_1 = (d/y)$, $s'_1 = (c/x)$. Випадок a). Враховуючи визначення +-операції та $a_p = a_u$, маємо $i_p = j_u$, $p = n_1 = m_1 = u$. Отже $(s_1, \ldots s_q)(i_{n_1}/s_1) = (s'_1, \ldots s'_q)(j_{m_1}/s'_1)$ (*), враховуючи $(s_1, \ldots s_q) = (s'_1, \ldots s'_q)$. Випадок b). Враховуючи визначення +-операції, $a_p = c$ та $j_{m_1} = f(c)$. Але $f(a_p) = f(c)$, т.я. f – це 1-1 функція. Отже $i_{n_1} = j_{m_1}$ та (*) виконується. Випадок c). Враховуючи визначення +-операції,

$d = c$ та $i_{n_1} = f(d), j_{m_1} = f(c)$. Оскільки $f(d) = f(c)$, то $i_{n_1} = j_{m_1}$. Отже (*) виконується. Загальний результат отримується індукцією по кількості підстановок у рівність $(s_1,\dots s_q)=(s'_1,\dots s'_q)$.■

Наслідок 2. Якщо секвенція S має доведення в системі G, то секвенція S^M має доведення у стистемі GTM.■

Визначення 2. Формула F у мові L_{TM} називається п(ерекладаючою)-формулою, якщо вона має форму $\#(A(t_1,\dots t_n))[k/t]^{i_1,\dots i_k}$ для деякої квазіформули $A(t_1,\dots t_n)$ (будемо казати, що вона є в F), деякого перекладу $\#(.)[k/t]$ та деяких верхніх індексів $i_1,\dots i_k$.

Визначення 3. @ є коперекладом множини П-формул F у мові L_{TM}, якщо виконуються наступні умови:

(0) існує злічення множина індивідних змінних $\{x_1, x_2,\dots x_n\dots\}$ та індивідних параметрів $\{a_1, a_2,\dots a_n\dots\}$, які не включають терми квазіформул з F.

(1) $@(\#(A)[k/t]^{i_1,\dots i_n}) = (@(\#(A)[k/t]))(a_{i_1}/x_1, a_{i_2}/x_2,\dots a_{i_n}/x_n)$

(2) $@(\#(A)[k/t] \supset \#(B)[k/t]) = @(\#(A)[k/t]) \supset @(\#(B)[k/t])$,

(3) $@(\Box\#(A)[k/t]) = \forall x_k @(\#(A)[k/t])$,

(4) $@\#(A_i(t'_1,\dots t'_s)[k/t]) = A(x_{n_1}, x_{n_2},\dots x_{n_s})$, де n_i – це номер t'_i.

(5) $@\#(\bot)[k/t] = \bot$.

Як випливає з визначення 1 та останньої зауваги ч.I, якщо $A(b_1,\dots b_n)$ – це формула у мові L, тоді $@\#(A(b_1,\dots b_n))$ має форму $\forall x_1\dots x_n @\#(A(b_1,\dots b_n))[1/b_1, 2/b_2,\dots n/b_n]$ (A*) та $@\#(A(b_1,\dots b_n))[n/b]$ – це нотаційний варіант $A(b_1,\dots b_n)$, отже у системі G має місце секвенція $A^* \to A(b_1,\dots b_n)$ (див. напр. Минц Г. Приложение // Математическая теоия логического вывода. М. 1967).

Лема 2. Якщо формула $\#(B)[k/t]^{\varkappa}$ є елементом д.л. для секвенції $S :\to \#(A(b_1,\dots b_n))$, тоді $|\varkappa| = |k|$.

Доведення (індукція по довжині д.л.).

Базис. $S_0 = S :\to \#(A(b_1,\dots b_n))$. Отже $|\varkappa| = |k| = 0$.

IГ. Покладемо, що лема виконується для S_n . Розглянемо підланцюг $P_0, P_1,\dots P_k$ для S_{n+1}. Доведемо внутрішньою індукцією по i , що лема виконується для кожного P_i .

В. Базис. $P_0 = S_n * S_n$, так що лема виконується за IГ.

ВIГ. Покладемо, що лема виконується для P_i. Нехай $F := \#(B)[k/t]^{\varkappa}$ є i+1-ша формула в S_n.

I) $B := B_1 \supset B_2$ та $P_i : \Gamma, F \to \Delta$. За визначеннями д.л. та #-перекладу P_{i+1} має форму $\Gamma, F, \#(B_2)[k/t]^{\varkappa} \to \Delta$, чи $\Gamma, F \to \Delta, \#(B_1)[k/t]^{\varkappa}$. За ВIГ лема виконується для P_i , а отже і для P_{i+1}.

II) $B := \forall x B_1(x)$, $P_i : \Gamma, F \to \Delta$. За визначенням $F := \alpha \# (B_1)[k+1/t, x]$ тоді P_{i+1} має форму $\Gamma, F, (\#(B)[k+1/t, x]^{*n_i}, n_i \in D_n) \to \Delta$, так що лема виконується для P_{i+1} за ВІГ.

Останні випадки розглядаються аналогічно. Як результат внутрішньої індукції маємо справдження леми для S_{n+1}. ■

<u>Лема 3</u>. Якщо секвенція $S :\to \#(A(b_1,..b_n))$ має доведення в GTM, то секвенція A^* має доведення в G.

Доведення. Якщо S має доведення в GTM, то за теоремою повноти S має кінечну кількість кінечних д.л.. Нехай M – це довжина максимального з них. Розглянемо їх копереклад. Доведемо індукцією по M–n, що $@S_n$ має доведення в G.

Базис. Нехай S_M має форму:

$$..\#(A_i^m(t_1',\ldots t_{s}'')[k/t]^{i_1,\ldots i_d}\ldots\to\ldots\#(A_j^n(t_1'',\ldots t_{s}''')[n/p]^{i_1,\ldots i_l}..$$

тобто

$$\ldots P^{i_1,\ldots i_d}_{i,(k_1',\ldots k_{s'}')}\ldots\to\ldots P^{j_1,\ldots j_d}_{j,(n_1'',\ldots n_{s''}'')}\ldots,$$

де k_u' – це номер t_u', $u \le s'$, та n_u'' – це номер t_u'', $u \le s''$. За визначенням д.л. маємо $i = j, m = n$, де $|(k_1',\ldots k_{s'}')| = m$, $|(n_1'',\ldots n_{s''}'')| = n$, та $i_1,\ldots i_d/(k_1',\ldots k_{s'}') = j_1,\ldots j_l/(n_1'',\ldots n_{s''}'')$. Отже $@S_M$ має форму: $\ldots A_i^m(a_{i_{k_1'}},\ldots a_{i_{k_{s'}'}})\ldots\to\ldots A_i^m(a_{j_{n_1''}},\ldots a_{j_{n_{s''}''}})\ldots$, де атомні формули антецендента та консеквента тотожні. Отже $@S_M$ має доведення в системі G з відповідних аксіом за правилом /ТО/.

ІГ. Покладемо, що $@S_{n+1}$ з довільного ланцюга секвенції S має доведення в G. За визначенням д.л. має бути підланцюг $P_0, P_1, \ldots P_k$ такий, що $P_0 = S_n * S_n$ та $P_k = S_{n+1}$. Доведемо внутрішньою індукцією по k–i, що кожний $@P_i$ в довільному підланцюгу має доведення в G.

В. Базис узасаднюється ІГ.

ВІГ. Покладемо, що $@P_{i+1}$ (у кожному відповідному ланцюгу) має доведення в G. Тоді $P_{i+1} = P_i * R(Q_i)$.

I) $R_i := \to \#(A)[k/t]^*$ чи $\to \#(B)[k/t]^*$. Тоді ми маємо доведення в G:

$$\frac{@\Gamma\to@\Delta, @\#(A)[k/t](a_{k_1}/x_1,.a_{k_n}/x_n) \quad @\Gamma, @\#(B)[k/t](a_{k_1}/x_1,.a_{k_n}/x_n)\to@\Delta}{@\Gamma, @\#(A)[k/t](a/x) \supset @\#(B)[k/t](a/x) \to @\Delta}$$

де $=$ – означає застосування правил /⊃→/, /Ск/. Але висновок є коперекладом секвенції $P_i : \Gamma, (\#A \supset \#B)^* \to \Delta$.

II) $R_i \in \#(A)[k/t]^{*n_1}, \ldots \#(A)[k/t]^{*n_s} \to$. Тоді маємо доведення в G (т.я. за лемою 2 $|k| = |*n_i| = k$):

$$\frac{@\Gamma, @\#(A)[k/t](a/x)(a_{n_1}/x_k), \ldots @\#(A)[k/t](a/x)(a_{n_s}/x_k) \to @\Delta}{@\Gamma, \forall x_k @\#(A)[k/t](a/x) \to @\Delta}$$

де $=$ - означає застосування правил /∀→/./Ск→/. Але висновок є копереkладом секвенції P_i :$\Gamma, (\square\#A[k/t])^{*} \to \Delta$.

III) R_i є $\to \#(A)[k/t]^{*e}$. Враховуючи лему 2, маємо доведення в G

$$\frac{@\Gamma \to @\Delta, @\#A[k/t](a/x)(a_e/x_k)}{@\Gamma \to @\Delta, \forall x_k @\#A[k/t](a/x)}$$

де $=$ - означає застосування правил /→∀/./→Ск/, та a_e - це новий параметер за визначенням #-перекладу. Так як $x_k \neq x$, то маємо $\forall x_k(@\#(A)[k/t](a/x)) \equiv (\forall x_k @\#(A)[k/t])(a/x)$, так що цей висновок є копереkладом секвенції P_i :$\Gamma \to \Delta, (\square\#A[k/t])^{*}$.

Як результат внутрішньої індукції ми маємо доведення $@P_o = @(S_n * S_n)$ в G. Але $@(S_n * S_n) = @(S_n) * @(S_n)$, так що $@S_n$ має доведення в G за /Ск/-правилами.■

Визначення 4. Логіка E_1 (у мові L_1) #-вкладається в логіку E_2(у мові L_2) ($E_1 \xrightarrow{\quad}_{\#} E_2$), якщо $E_1 \vdash A$ т.і.т., коли $E_2 \vdash \#(A)$, де # - це переклад мови L_1 у мову L_2.

Теорема 1. $G \xrightarrow{\quad}_{\#} GTM$.

Доведення випливає з лем 1(насл.2),3.■

Заувага: очевидно, що система GTM вкладається в систему G при слушному перекладі.

Визначення 5.1. $-переклад з параметрами мови модальної логіки T (L_T) у мову L_{TM} є переклад, що задовольняє наступним умовам:

1) ;$(A \supset B)(1,2,\ldots n) = \$(A)(1,2,\ldots n) \supset \$(B)(1,2,\ldots n)$,

2) $\$(\square A)(1,2,\ldots n) = \square\,\$(A)(1,2,\ldots n,n+1)$,

3) $\$(\perp) = \perp$,

$$4)\ \$(p_i)(1,2,\ldots k) = \begin{cases} p_{i,1,2\ldots n}, & \text{якщо модальна складність } p_i = n \\ p_{i,\underbrace{0,0,\ldots 0}_{n-k},1,\ldots k}, & \text{якщо м.с.} p_i = k < n. \end{cases}$$

де n - це максимальна модальна складність атомної ппф p_i у відповідній цілій формулі (для зручності покладемо $0 \in N$).

2. $-переклад формули A ($= \$(A)$) - це переклад $\$(A)()$, який має на початку знак $\square$.

Теорема 2. $T \xrightarrow{\quad}_{\$} TM$.

ІД. Як відомо (M.Fitting Tableau methods of proof for modal logic // NDJFL (1972) 2, p.237-47), система T має наступні модальні правила у репрезентації Фітча-Фіттінга (правила подаються у власне модальноі логіки (напр.D, S4).

2.Перехід від а.т. до д.л. для системи T втілює ідею "розплутування" для фреймів.

3. Статичну ідею репрезентаціі модальних операторів як просторових структур треба відрізняти від динамічноі ідеі модальності ,репрезентованоі процесуальними (= конструктивними) структурами (пам"ять).

4.Поряд із статичним розумінням модальності як різновиду квантора, існує динамічне іі розуміння,де квантор є різновидом модальності (= конструктивне розуміння модальності).

Розділ II.

I.Дерево спряжень.

Нехай B(□) - це бульова алгебра (б.а.) з модальними оператором □ ,що задовольняє умові: якщо a = b,то □a = □b (ця умова випливає із змісту поняття тотожності).B(□) може бути розглянута з двох точок зору: 1) B(□) як множина (матерія),2) B(□) як структура (форма).Таким чином мається дві можливості спряження B(□),а саме:1) відносно двоелементноі множини 2 ={0,1}, та 2) відносно двоелементноі б.а. B_2 = II.Відповідно маємо два спряжених до B(□) простори : 1) i = B^+ - це множина всіх функцій B(□) ⟶ 2 ,2) I = B* - це множина всіх гомоморфізмів B(□) ⟶ II.Отже I=B*=II^B, i=B*=2^B та I ⊆ i:

$$
\begin{array}{ccccl}
 & B & & & \text{—— 0-рівень} \\
 & {}^{*}\swarrow & \searrow^{+} & & \\
B^* & & B^+ & & \text{—— 1-рівень}
\end{array}
$$

Звісно, що простори B^+ та B* - це два крайні випадки,між якими існують проміжні,наприклад, B^*_n - це множина функцій,що є гомоморфізмами на поліномах складності ≤ n ,коли B(□) є атомною б.а..Образно кажучи,B^*_n фіксує схожість складності ≤ n,та "забуває" структуру складності > n (див.Ю.Гастев Модели и гомоморфизмы .М.1975).Отже $B^* \subseteq \ldots \subseteq B^*_{n-1} \subseteq B^*_n \subseteq \ldots \subseteq B^+$.

B^+ - це повна б.а.(п.б.а.).На відміну від цього,B* не допускає ніякоі внутрішньоі (=першопорядковоі) структури (тобто поелементних визначень в термінах операцій на B(□)).Але B* допускає зовнішню (=другопорядкову) структуралізацію ,а саме топологічну.Нехай ab ovo B* - це топологічний простір (т.п.) з топологією τ :(B*,τ).Розглянемо т.п. β = (2,{∅,{1},{0,1}}). Нехай спряження & визначається множиною всіх неперервних функцій (B*,τ) ⟶ β .Тоді $B^{\&} \simeq \tau$,тобто $B^{\&}$ - це множина характеристичних формі, адаптованій до д.л., коли аналітична таблиця (а.т.) представляється у формі секвенції):

$$\frac{P\Box X,\ \Gamma \to \Delta\ (F)}{PX, Q_1X, Q_2X, \ldots Q_nX, \Gamma \to \Delta}\ (\Box\to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, P\Box X\ (F)}{\Gamma \to \Delta, (P,n)X \quad n \notin F}\ (\to\Box)$$

де F -це множина префіксів (= кінечних послідовностей натуральних чисел) формул над рискою, $P \in F$, $(P, n_i) = Q_i \in F$. Аналітична таблиця замкнекна, коли має форму $\Gamma, PX \to \Delta, PX$.

Неважко бачити, що єдина відмінність між а.т.та д.л.зводиться до наступного: в той час як у правилі $(\Box\to)$ для а.т. префікс P засновку може повторюватись у висновку, у відповідному правилі для д.л.у висновку не молже повторюватись відповідний верхній індекс засновку. Визначимо відношення редукції на індексах: $\lambda \longrightarrow \varkappa$ т.і.т. коли $\lambda = (\varkappa, n)$ для $n \in \varkappa$. Очевидно, що правило $(\Box\to)$ для д.л. трансформується у правило:

$$\frac{P\Box X,\ \Gamma \to \Delta\ (F)}{PX, Q_1X, Q_2X, \ldots Q_n'X, Q_1'X, Q_2'X, \ldots Q_n'X, \Gamma \to \Delta}$$, де $Q_i' = (P, m_i), m_i \notin F$

для а.т., якщо редукувати верхні індекси та замінити їх відповідними префіксами.

Нехай тепер д.л. для секвенції $\to *(A)$ замкнений, тобто закінчується секвенцією: $\ldots p^{\varkappa}_{i,\alpha} \ldots \to \ldots p^{\lambda}_{i,\beta} \ldots$, де $\varkappa/\alpha = \lambda/\beta \neq 0$. Враховуючи визначення $*$-перекладу, маємо наступні випадки: A 1) $\alpha = 0,0,\ldots 0,1\ldots k$, $\beta = 0,0,\ldots 0,1\ldots r$ $(k \le r)$; 2) $\alpha = 1\ldots n$, $\beta = 0,0,..0,1..r$ $(r \le n)$ - якщо якась пропозиційна змінна має входження різної модальної складності. В 1) $\alpha = \beta = 1,2,\ldots n$, інакше.

A1). $\varkappa/\underbrace{0,0\ldots 0}_{l},1\ldots k = \lambda/\underbrace{0,0\ldots 0}_{s},1\ldots r$ $(l+k = r+s = n)$. Враховуючи, що $*$-переклад має форму $\Box A$, можна рахувати, що $\varkappa$ і λ починаються з 0. Отже вони мають таку стуктуру: $\lambda = 0,\mu$ та $\varkappa = \underbrace{0,0,..0}_{s-l},\mu$. Отже $\varkappa \longrightarrow \lambda$. Випадок A2 розглядається аналогічно.

B1). Так як $\alpha=\beta$, то $\varkappa=\lambda$.

Отже у всіх трьох випадках вказані верхні індекси заключної секвенції редукуються. Відкинувши із зазначеного д.л. ті елементи, які мають нередуковані верхні індекси, ми отримаємо замкнену а.т. для формули A. ■

Зауваги: 1. Виділивши в логіці предикатів репрезентативну (= статичну) частину, що представлена нижніми індексами, та дедуктивну (= динамічну) чистину, що представлена верхніми індексами, можна розглядати логіку предикатів як узагальнення модальної логіки T за рахунок ускладнення репрезентації. В той же час ускладнення дедукції (динаміки) системи T спричиняється до функцій відкритих множин топології τ. Відповідне спряження має структуру:

$$\begin{array}{ccc} & (B^*,\tau) & \text{——— 1-рівень} \\ \&\swarrow & & \searrow + \\ I^{\&} = B^{*\&} \simeq \tau & & I^{+} = B^{*+} \text{ ——— 2-рівень} \end{array}$$

($I^{\&} \leq I^{+}$, I^{+} може розглядатися як т.п. з дискретною топологією). В загальному випадку пара $(B(\Box),(I,\tau))$ може спрягатися відносно (II,β), чи $(II,2)$, чи $(2,2)$, чи $(2,\beta)$. Ускладнення кон"югації дозволяє врахувати не тільки внутрішню схожість (виходячи із структури), але і зовнішню (виходячи з подібності).

Таким чином випливаюче з ідеї спряження розрізнення, при аналізі системи $B(\Box)$, точки зору матерії (що відповідає +-спряженню) та форми (внутрішньої, що відповідає *-спряженню, та зовнішньої, що відповідає &-спряженню) призводить до наступного дерева спряжень:

$$\begin{array}{lcccccccc} 0 & & B & & & & (F+M) & & \\ & & */ \,..\, |*_n \, \searrow + & & & & F/ \,..\, | \,..\, \searrow M & & \\ 1 & I & & i & & (F+M) & & (F+M) & \\ & \&/ \,..\, | \,..\, \searrow + & & */ \,..\, | \,..\, \searrow + & & F/ \,..\, | \,..\, \searrow M & & F/ \,..\, | \,..\, \searrow M & \\ 2 & I^{\&} & I^{+} \; i^{*} & & i^{++} \; (F+M) & & (F+M) & (F+M) & (F+M) \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Це дерево представляє рівні градації форми та матерії (схожості та несхожості, тотожності та нетотожності і т.п.).

Ідея спряження є також фундаментальною ідеєю при репрезентації модального оператора $\Box$, а саме: він репрезентується спряженим оператором у відповідному просторі дерева спряжень:

$$(I,\Box a) = (N(I), a) \qquad (*),$$

де (x,y) значить $x(y)$, $I \in B^*, N(I) \in B^+$. Таким чином $\Box$ репрезентується оператором $N: B^* \longrightarrow B^+$. Модальність $\Box$ є власною, якщо $N(B^*) \cap B^* = \emptyset$. Тобто $N(B^*) \leq B^\wedge = B^+ \setminus B^*$.

Зауваги: 1. В аристотелевських термінах (див. Омельянчик [1991] гл. II) ідея спряження має наступний вигляд. Природньо ототожнити множини B^* та $B^\wedge$ з двома типами точок зору на одну й ту саму систему $(B(\Box))$, а саме B^* репрезентує т-ки зору дійсності (= актуальності, ті, що зберігають структуру, абстрагуючись від її елементів), а $B^\wedge$ репрезентує т-ки зору можливости (= потенціальности, ті, що абстрагуються від структури; при цьому B^*_n - це т-ки зору актуальності разом з потенціальністю, а $B^+ \setminus \bigcup_n B^*_n$ - це т-ки зору чистої потенціальності). Тоді принцип спряження (*) означає, що можливість з точки зору дійсности є теж саме, що дійсність з точки зору можливості. В цих термінах аристотелівський принцип несуперечності - це принцип, який дозволяє відрізнити множини B* та B^ : тільки т-ки зору актуальност мають бути несуперечними (I(a) ≠ I(~a), де ~ - бульове доповнення).

2. Дерево спряжень дозволяє пояснити яким чином мислення в термінах опозицій, які типологічно відповідають опозиції "форма - матерія", необхідно спричиняється до модальної онтології. Класична метафізика займалась аналізом саме такого роду опозицій (напр., буття-генеза, універсальна-партикулярне, субстанція-акциденція, тотожність-відмінність (див. Омельянчик [1989], с.138ff)). Тому модальність складає сутність метафізичного мислення. Метафізика sensu stricto необхідно є модальною метафізикою.

З огляду на це онтологія має ієрархічну структуру, що спирається на категоріальне протиставлення речі та її властивост. В межах семантичної теорії це відповідає фрегівському протиставленню функції та аргумента. Послідовна негація цього принципу призводить до редукції онтології (Омельянчик [1989], с.142ff, cf. хайдеггерівська деструкція онтології"), відповідно до конструктивної теорії (напр. теорія комбінаторів). Але і в останньому випадку можливі топологічні моделі.

Таким чином модальна метафізика може виступати основою діалогу дескриптивізму та помірного конструктивізму: з однієї сторони, маємо (розд. I) редукцію суб"єкт-предикатного дискурсу до модального, а з іншого - редукцію Тарського конструктивних теорій до модальних. Так що в межах модальної метафізики протиставлення "дескриптивний-конструктивний" не є фіксованим, а має градацію ступенів. Радикальний конструктивізм (деконструктивізм Деріда) - це відмова від мислення в опозиціях взагалі.

<u>II. Репрезентації.</u> Основна мета репрезентації - представити структуру оператора $N: B^* \longrightarrow B^+$.

1) Репрезентація Йонсона-Тарского (семантика "можливих світів")

Безпосередньо існує мало "природніх" вкладень $B^* \hookrightarrow B^+$, тобто таких, які б визначались в термінах операцій на B* і тим самим визначали б структуру N. Але існує досить "природніх" відображень $B^{*+} = I^+ \longrightarrow B^+$. Враховуючи, що B^{*+} - це п.б.а. Наприклад, $\wedge : I^+ \longrightarrow B^+$, яке визначається так: $(\wedge p)(a) = 1 \Leftrightarrow I(a) = 1$, для всіх $I \in p \in I^+$.

Репрезентація Йонсона-Тарского використовує простір $I^+ = B^{*+}$ як проміжну ланку представлення N:

$$(JT) \qquad \begin{tikzcd} & B^{*+} \arrow[dr, "\hat{}"] & \\ B^{*} \arrow[ur, "N^{+}"] \arrow[rr, dashed, "N"'] & & B^{+} \end{tikzcd}$$

тобто $N = \sim N^{+}$, де $N^{+}: B^{*} \longrightarrow 2^{B^{*}}$. Враховуючи стоунівське вкладення $B \hookrightarrow_{s} B^{*+}$, N^{+} визначається стандартною умовою :

$$N^{+}(I) = \{ J \mid I \in (\Box a)^{s} \to J \in (a)^{s}, \text{ для всіх } a \in B(\Box) \},$$

а $N(I)(.) = \forall J \in N^{+}(I).\, J \in (.)^{s}$. При цьому N^{+} однозначно визначає оператор $\Box$, що має властивости і) $\Box(a \cap b) = \Box a \cap \Box b$, іі) $\Box 1 = 1$

2). Репрезентація Говарда-Монтегю-Скота (околична семантика).

На відміну від попередньої репрезентації, ця репрезентація використовує не простір I^{+}, а простір $I^{++} = 2^{I^{+}}$. Враховуючи стоунівське вкладення $B \hookrightarrow_{s} B^{*+}$, маємо комутативну діаграму):

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, shift left, "s"] \arrow[dr, "i"'] & & I^{+} \arrow[ll, shift left, "s^{-1}"] \arrow[dl, "l"] \\ & 2 & \end{tikzcd}$$

, де $i \in B^{+}$, $l \in I^{++}$. Таким чином визначається оператор $T: I^{++} \longrightarrow B^{+}$ $(l \longrightarrow l \circ s)$, тобто $T = \circ s$ або у явній формі $T(l)(a) = 1 \leftrightarrow a^{s} \in l$.

Отже ми отримали репрезентацію:

$$(HMS) \qquad \begin{tikzcd} & I^{++} \arrow[dr, "T"] & \\ B^{*} \arrow[ur, "N^{+}"] \arrow[rr, dashed, "N"'] & & B^{+} \end{tikzcd}$$

тобто $N = N^{+} \circ s$. N^{+} визначається стандартною умовою :

$$N^{+}(I) = \{ a^{s} \mid I \in (\Box a)^{s}, a \in B(\Box) \},$$

а $N(I)(.) = N^{+}(I) \circ s(.)$. Для оператора $\Box$, задовольняючого умовам (і),(іі), як відомо, $N^{+}(I)$ є фільтром.

3). Репрезентація Кріпке (конструктивна, деревоподібна).

Ця репрезентація є проміжною між першопорядковою JT-репрезентацією та другопорядковою HMS-репрезентацією в наступному сенсі: якщо у першій відношення досяжності R -це відношення типу елемент-елемент, а у другій - це відношення типу елемент-множина, то у K-репрезентації - це відношення типу елемент-упорядкована множина.

Нехай a є поліном з $B(\Box)$. Нехай Γ - множина поліномів виду b чи $\sim b$, що входять в a. Нехай $I(\Gamma)$ - множина 0,1-гомоморфізмів, визначених на підмножинах Γ так, що кожна підмножина є праобразом б.а.II відносно відповідного гомоморфізму. Фіксуємо деяку нумерацію в $I(\Gamma)$. Якщо $\Delta, \Lambda \leq \Gamma$, то нехай $(\Delta, \Lambda)^{+}$ - це перший гомоморфізм із $I(\Gamma)$, в ядро якого входить Δ та не входить Λ. Нехай далі $\sim\Box a_{1}, \sim\Box a_{2}, \ldots \sim\Box a_{k}$ - всі підполіноми з a, що мають вигляд $\sim\Box$. Визначимо тепер множину $I^{\wedge}(\Gamma) \leq I(\Gamma)$ здефіновану на кінечнорозгалуженому дереві:

$$I_{()} = (a \mid)^{+},$$

$$I_{\alpha n} = \begin{cases} (a_n \mid \{d : I_\alpha(\alpha d)=1\})^+ , \text{ якщо } I_\alpha(\alpha a_n)=0, \\ \text{не визначено інакше.} \end{cases}$$

де $1 \le n \le k$. Неважко бачити, що для системи (i),(ii) будемо мати K - репрезентацію :

$$\text{(K)} \qquad I_\alpha(\alpha b) = 1 \leftrightarrow \forall n \in n(\alpha)\ I_{\alpha n}(b) = 1,$$

де $n(\alpha) = \{ i : I_\alpha(\alpha a_i) = 0 \}$, а b - підполіном в а. Таким чином у K-репрезентації "можливий світ"(м.с.) є кінечною послідовністю параметрів (натуральних чисел), як і в системі GTM , тобто це структурована сутність, на відміну від м.с. JT-репрезентації. Назвемо структурований м.с. контекстом. Наступні зауваги дозволяють розглядати контекст як послідовність м.с. JT-репрезентації:

1). Техніка Фітча-Фіттінга оперує не з оцінкою формул в різних м.с., а з оцінкою їх в актуальному світі, але в різних контекстах (= кінечних послідовностях м.с.).

2). Техніка розплутування для генерованих (= зв"язаних) K(ріпке)-фреймів призводить до подібного результату. Нагадаю. Фрейм $\langle W,R \rangle$ є зв"язаним, якщо існує $w_0 \in W$ таке, що для будь-якого $w \in W$ існує n : $w_0 R^n w$. Розглянемо фрейм $\langle W^*, R^* \rangle$, де W^* - це множина кінечних послідовностей елементів із W. R^* визначається як $\langle w_0, w_1, \ldots w_m \rangle\ R^*\ \langle w_0, w_1, \ldots w_n \rangle$ т. і. т. т., коли $\langle w_0, w_1, \ldots w_n \rangle = \langle w_0, w_1, \ldots w_m \rangle * \langle w_n \rangle$. Для атомних змінних оцінка визначається як $V^*(p, \langle w_0, w_1 \ldots w_n \rangle) = V(p, w_n)$. Легко бачити, що фрейми $\langle W,R \rangle$ та $\langle W^*, R^* \rangle$ визначають тотожні оцінки. для всіх ппф.(Техніка розплутування може бути застосована тільки відносно фінітно-модельних систем, тобто систем, що допускають фільтрацію).

На відміну від глобального характеру JT-репрезентації, де гомоморфізми визначені на всій $B(\alpha)$, K-репрезентація є локальною, відносною до даного полінома, на підполіномах котрого визначаються гомоморфізми. Звісно, що тут суттєво використовується його структура, яка задає логічний простір sui generis (місце в якому визначається модальною глибиною). Це спричиняється до того, що областю визначення гомоморфізмів є не поліноми , а входження поліномів, тобто суто феноменологічні сутност (в семантичних термінах: в моделі оцінюються не ппф, а входження ппф): один й той самий поліном може мати входження різної модальної глибини, так що відповідний гомоморфізм I_α буде визначений для нього не просто, а як для полінома-даної-модальної-глибини, що визначається числом $|\alpha|$.

невизначеність гомоморфізму свідчить про відсутність відповідного входження.

Таким чином контекст фіксує 1) місце в логічному просторі ($|\alpha|$), та 2) структуру логічного часу (що відповідає характеру послідовності елементів із α). Це ж саме відноситься до верхніх індексів системи GTM, так що вираз $p^{\alpha}_{(\beta)}$ природньо інтерпретується як ствердження пропозиції $p_{(\beta)}$ в контексті (= логічному просторі-часі) α. А це значить, що неконструктивне (тобто sub species aeternitatis) суб"єкт-предикатне твердження $P(a)$ має свій конструктивний еквівалент, а саме: твердження деякої пропозиції $p_{(\beta)}$ в точці α логічного простору-часу.

Зауваrа.У цьому сенсі неореалізм початку XX ст., що мав справу з такими феноменологічними сутностями, як презентація, репрезентація, явлення т.ін. був конструктивним реалізмом: для нього простір-час - це conditio sine qua non існування феноменів. В цьому сенсі феноменологія була послідовницею радикального конструктивізму Канта (напр.,недивно ,що в герменевтичній феноменології Хайдеггера ігнорується фундаментальний факт інкорпорованості людини).

4). Репрезентація Саймонса-Есакія (топологічна,на базі похідної Кантора).

ВК-репрезентація відкриває шлях до інтерпретації аристотелівської модальності. Дійсно, маючи кінечно розгалужене дерево T , можна визначити відповідний квазіпорядок $\leq$,а далі стандартним чином ввести топологічну структуру : 1) порядкову топологію на T ,що має базою систему множин $[\beta] = \{ \alpha:\alpha \leq \beta\}, \beta\in T$, чи 2) перейти до відповідного простору Бера, тобто множини всіх шляхів через T - T^{ω} (= множини функцій із натуральних чисел до множини індексів, кількість яких відповідає ступені розгалуженості T), де базою топології виступає система множин $[\alpha] = \{ P \in T^{\omega} : \alpha = \langle P(0),...P(n)\rangle$ для деякого n $\}$,$\alpha \in T$.

Враховуючи, що квазіпорядок на T є частковим видом спрямованості (див.Келли Дж.Общая топология.М.1968,с.95 ff), можна використати ідею конвергенції за Муром-Смітом.Тоді дуал $\square$ - $\sim \square \sim$ - природньо репрезентується похідною Кантора (тобто операцією, що співставляє довільній множині в топологічному просторі множину її граничних точок):

$$1)\ I_{\alpha}(\sim \square \sim a) = 1 \leftrightarrow \forall O(\alpha\in O)\exists\beta\in O.\ I_{\beta}(a) = 1,$$

(S E)

$$2)\ I_{\alpha}(\Box a) = 1 \Leftrightarrow \exists O(\alpha \in O)\forall \beta \in O.\ I_{\beta}(a) = 1,$$

де O - це змінна по відкритим множинам відповідного топологічного простору.

Таким чином саме в SE - репрезентації з оператором необхідності (можливості) асоціюється квантор існування (загальності).

Існує тісний зв"язок між SE-репрезентацією в топологічному просторі T^{ω} та конструктивною логікою. А саме: покладемо: $I_P(a) = 1$ $\Leftrightarrow$ існує $\alpha \in P$ $I_{\alpha}(a) = 1$, тобто оцінка елементу a на всьому шляху $P \in T^{\omega}$ є 1, якщо знайдеться точка на P, де оцінка a є 1. Враховуючи, що у відкриту околицю P в топології T^{ω} входять такі $Q \in T^{\omega}$, що $P*(n) = Q*(n)$ для деякого n (де $P*(n) = \langle P(0),\ldots P(n)\rangle$), ми отримаємо SE -репрезентацію у формі:

$$I_{\alpha}(\Box a) = 1 \Leftrightarrow \exists B_{\alpha}\forall \beta \in B_{\alpha}.\ I_{\beta}(a) = 1,$$

де B_{α} - це загорожа (bar) для α (= множина елементів із T, яку "перетинає" кожний шлях P, що йде через α). Іншими словами ми отримали умову спонукання (forsing) для атомних формул інтуїціоністської логіки.

Заувага. Деякі аспекти логіки доведення вивчав в топологічних термінах Саймонс (Simmons H. Topological aspects of sutable theories // Proc. Edinb. math. soc. (1975), p.383-91), зокрема ним введено поняття псевдо-топологічного простору : б.а. з операцією "похідної" d :(0) $d0 = 0$, (1) $d(a \cup b) = da \cup db$, (2) $dda \leq da$ (оператор замкнення визначається як $c(a) = da \cap a$). Тоді оператор d відповідає дуалу оператора доведення Pr в пеановській арифметиці, який , нагадаю, має тип Σ_1^0 , тобто $Pr(p) = \exists x Prf(x, p)$.

Ідея використання похідної Кантора та топологічної інтерпретації логіки доведення належить Л.Есакія (див. "Диагональные конструкции, формула Леба и разреженные пространства Кантора"// Логико-семантические исследования. Тбилиси.1981, с.128-43).

Виникає питання про співвідношення HMS- та SE- репрезентацій, оскільки обидві вони другопорядкові. Для характеризації системи (i),(ii) (= мінімальної нормальної модальної логіки K) введемо поняття передтопологічного простору (п.т.п.). Нагадаю, простір (I, f) є топологічним простором, якщо кожному елементу $I \in I$ функція f ставить у відповідність фільтр околиць $f(I)$ елемента I так, що

1) $I \in X$ для всякого $X \in f(I)$,

2) для кожного $X \in f(I)$ існує $Y \in f(I)$ таке, що $X \in f(J)$ для всякого $J \in Y$ (інтуїтивно ця умова відповідає умові (2) для псевдо-топологічного простору, тобто умові транзитивності).

Визначення 1. Простір (I, f) називається передтопологічним простором, якщо виконується умова (1).

Визначення 2. Передтопологічний простір (I, f) називається недискретним, якщо для кожного $I \in I$ та $X, Y \in f(I)$ $X \cap Y \neq \{I\}$. (Для топологічних просторів ця умова гаратує відсутність дискретної топології, де кожна множина є відкритою).

Для кожного фільтра $f(I)$ нехай $f^+(I) = \{ X \cup \{I\}: X \in f(I) \}$. Неважко бачити, що $f^+(I)$ є фільтром (якщо $f(I)$ тривіальний фільтр, тобто $\emptyset \in f(I)$, тоді $f^+(I) = [I] = \{X \subseteq I : I \in X\}$). Розглянемо далі множину $B = \{ X \setminus \{I\}: X \in f(I) \}$. Якщо для всіх $X, Y \in f(I)$ $X \cap Y \neq \{I\}$, то $X\setminus\{I\} \cap Y\setminus\{I\} = (X\cap Y)\setminus\{I\} \neq \emptyset$, тобто B визначає базу деякого фільтра, який ми позначимо $f^-(I)$ (якщо попередня умова не виконана, то нехай $f^-(I)$ є тривіальним фільтром). Очевидно, що 1) $f^+(I) \subseteq f(I) \subseteq f^-(I)$,2) $I \in \cap f^+(I)$, 3) для недискретного п.т.п. (I, f) f^- визначає нетривіальні фільтри.

Як було відмічено вище, для HMS-репрезентації системи (i), (ii) (=K) $N^+(I)$ є фільтром для кожного $I \in I$ (далі N^+ позначимо як f): 1) $I(\Box a) = 1 \leftrightarrow a^s \in f(I)$, або в семантичних термінах 1a) $|\Box A|_I = 1 \leftrightarrow \{ J: |A|_J = 1 \} \in f(I)$. Що еквівалентно 1b) $I(\Box a)=1 \leftrightarrow \exists X \in f(I). X=a^s$. Для SE-репрезентації маємо :

$$2)\ I(\Box a) = 1 \leftrightarrow \exists X \in f(I). X\setminus\{I\} \subseteq a^s$$

або в семантичних термінах:

$$2a)\ |\Box A|_I = \exists X \in f(I)\ \forall J \in X\setminus\{I\}. |A|_J = 1.$$

Як видно ,на відміну від (1b), $\exists$-квантор входить в (2a) суттєво.

Кожна HMS-репрезентація визначає простір (I, f), якому однозначно відповідає п.т.п. (I, f^+) таким чином, що

$$a^s \in f(I) \leftrightarrow \exists X \in f^+(I). X\setminus\{I\} \subseteq a^s.$$

Далі, для кожного недискретного п.т.п. (I, f) SE-репрезентації однозначно відповідає простір (I, f^-) таким чином, що

$$a^s \in f^-(I) \leftrightarrow \exists X \in f(I). X\setminus\{I\} \subseteq a^s.$$

Отже нами доведена

Теорема 1. Система (i),(ii) (= K) SE-репрезентується класом недискретних п.т.п.■ (В класі всіх п.т.п. фальсифікується принцип агрегації $\Box a \cap \Box b \leq \Box(a \cap b)$, тобто відповідна логіка буде слабшою, ніж K).

Заувага. SE-репрезентація природньо виникає при 1) аналізі логіки здатності (див. M.Brown On the logic of ability (abstract) // The journal of symbolic logic (1987),N3, де семантичний аналіз оператора здатності має форму:

$$|\text{able } A|_v = 1 \Leftrightarrow \exists S\ vRS\ \forall w \in S\ .\ |A|_w = 1,$$

2) аналізі логіки інференції (див.P.Schotch,R.Jennings Inference and necessity // Journal of philosophical logic (1980),p.327-40, де оператор необхідності аналізується як:

$$|\Box A|_v = 1 \Leftrightarrow \forall w_1, \ldots w_n.\ vRw_1, \ldots w_n\ .\ |A|_{w_1} = 1\ ,\ \ldots, \text{чи } |A|_{w_n} = 1.$$

Неважко бачити, що в термінах кінечно розгалуженого дерева ця умова може бути отримана так: нехай P^n - шлях довжини n через α, тоді відповідна умова має вигляд: $\forall P^n \in \alpha\ \exists \beta \in P^n.\ |A|_\beta = 1$. (Характерно, що як у випадку (1), так і у випадку (2) відповідні умови визначають оператори дуальні у порівнянні з операторами SE-репрезентації).

Вище було встановлено суттєвий зв"язок аристотелівської модальності та конструктивної логіки : аристотелівська модальність - це по суті конструктивна модальність. Ця аналогія може бути продовжена в наступному напрямі: якщо врахувати властивість диз"юнктивності конструктивної логіки, то для відповідного оператора доведення буде виконнана умова :

$$(D)\qquad \Box A \vee \Box B \Leftrightarrow \Box(A \vee B),$$

тобто він буде себе поводити як $\exists$-квантор,або як звичайний оператор можливості. Що умову природньо розглядати як сильне уточнення змісту аристотелівської модальності.

Заувага. Природню модель аристотелівської модальності дає, наприклад, гейтингова алгебра вікритих множин топологічного простору. Операція взяття внутрішності I (замкнення C) поводить себе як класична необхідність (можливість):

I1. $Ix \leq x$. C1. $x \leq Cx$.

I2. $Ix = IIx$. C2. $Cx = CCx$.

I3. $I(x.y) = Ix.Iy$. C3. $C(x \cup y) = Cx \cup Cy$

I4. $I0 = 0$. C4. $C1 = 1$.

Операція регуляризації $Rx = I{\sim}I{\sim}x$, що відповідає операції подвійного псевдодоповнення, а в логічних термінах - подвійній інтуіціоністській негації, поводить себе як аристотелівська можливість, відповідно $D = {\sim}R{\sim}$ - як аристотелівська необхідність:

R1. $x \leq Rx$. D1. $Dx \leq x$.

R2. $Rx = RRx$. D2. $Dx = DDx$.

R3. $R(x.y) = Rx.Ry$. D3. $D(x \cup y) = Dx \cup Dy$.

R4. $R1 = 1$. D4. $D0 = 0$.

Цікаво відмітити, що (R3) не доводиться прямо з аксіом гейтінговської алгебри , а тільки a contrario.

Розділ III.

Подальше вивчення аристотелівської модальності пов"язане з встановленням аналогів теореми Гливенко , тобто співвідношення класичної (Cl) та інтуїціоністської (Int) логіки: $Cl \longrightarrow \sim\sim Int \subseteq Cl$ (де ~~ - це стандартний переклад подвійної негації).

Нехай $\mathfrak{F} = \langle W, R, U \rangle$ фрейм (де U - це множина "нормальних" м.с., $U \subseteq W$), а M - модель для мови логіки K, так що відношення істинності відносно можливого світу $v \in W$ в моделі M для ппф A - $(v, M) \models A$ - визначається стандартним чином. Тоді нехай $\mathfrak{F} \models A$ значить $(v, M) \models A$ для всіх M та $v \in W$. Нехай FR - це множина фреймів, нормальних або ненормальних.

<u>Визначення 1</u>. Нехай $\mathfrak{G}, \mathfrak{F} \in FR$, μ - це морфізм $\mathfrak{F} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{G}$, $Th(\mathfrak{F}) = \{ A : \mathfrak{F} \models A \}$, m - це переклад мови логіки $L = Th(\mathfrak{G})$ в мову логіки $N = Th(\mathfrak{F})$. Тоді m-переклад репрезентує μ-морфізм (m-переклад є спряженим до μ-морфізму), якщо наступна діаграма комутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{G} \\ {\scriptstyle Th}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Th} \\ N & \xleftarrow[m]{} & L \end{array}$$

<u>Визначення 2</u>. Гомофонний переклад мови логіки K (= переклад в ту саму мову) називається :

1) n-перекладом, якщо виконані наступні умови: i) $n(A_0) = A_0$, де A_0 - атомна ппф, ii) $n(\sim A) = \sim n(A)$, iii) $n(A * B) = n(A) * n(B)$, де $* = \langle \vee, \wedge \rangle$, iv) $n(\Box A) = \Box T \supset \Box n(A)$,

2) d-перекладом, якщо виконані умови (i-iii) та умова iv) $d(\Box A) = \sim\Box\sim T \wedge \Box d(A)$,

3) r- перекладом, якщо виконані умови (i-iii) та умова iv) $r(\Box A) = r(A) \wedge \Box r(A)$.

<u>Визначення 3.1)</u>. Нехай $\mathfrak{F} = \langle W, R, U \rangle$ ненормальний фрейм. Тоді ν є морфізм нормалізації, якщо $\mathfrak{F} = \langle W, R, U \rangle \xrightarrow{\nu} \nu\mathfrak{F} = \langle U^{\infty}, R \rangle$, де $U^{\infty} = \bigcup_n R^n(U)$, $R(U) = \{ v : wRv,$ для деякого $w \in U \}$.2). Нехай $\mathfrak{F} = \langle W, R, \rangle$ нормальний фрейм. Тоді δ є морфізм деонтизації, якщо $\mathfrak{F} = \langle W, R, \rangle \xrightarrow{\delta} \delta\mathfrak{F} = \langle W, R, U \rangle$, де $U = \{ w : \exists v.\ wRv \}$.3). Нехай $\mathfrak{F} = \langle W, R, \rangle$ нормальний фрейм. Тоді ρ є морфізм рефлексії, якщо

$\mathfrak{F} = \langle W, R, \rangle \xrightarrow{\rho} \rho\mathfrak{F} = \langle W, R \cup \Delta \rangle$, де Δ – це діагональ.

Нагадаю.C2 – це мінімальна ненормальна модальна логіка ($\Box(A \wedge B) = \Box A \wedge \Box B$, $A \supset B \,/\, \Box A \supset \Box B$), $K = C2 + \Box T$, $D2 = C2 + {\sim}\Box{\sim}T$, $E2 = C2 + \Box A \supset A$, $T = K + \Box A \supset A$, $C4 = C2 + \Box A \supset \Box\Box A$, $C5 = C2 + {\sim}\Box{\sim}A \supset \Box{\sim}\Box{\sim}A$, $D = K + {\sim}\Box{\sim}T$.

<u>Теорема 1.</u> 1). Нормалізаційний морфізм ν репрезентується n-перекладом, а отже $K \longrightarrow_n C2 \leq K$. 2). Морфізм деонтизації δ репрезентується d-перекладом, а отже $D2 \longrightarrow_d K \leq D$ та $D2 \longrightarrow_d C2 \leq D2$. 3). Морфізм рефлексії ρ репрезентується r-перекладом, а отже $T \longrightarrow_r K \leq T$.

ІД.(індукція по складности ппф).

1). Нехай M – це модель, визначена ненормальним фреймом $\mathfrak{F}$, а nM – це модель, визначена нормальним фреймом $\nu\mathfrak{F}$. Зберігаючи загальність, для моделі M можна покласти, що $\mathfrak{F}$ є очищеним, тобто для нього виконується умова $vRw \rightarrow v \in U$. Отже маємо $(v, M) \models A \leftrightarrow (v, M^*) \models A$, де M^* – це модель, визначена відносно очищеного фрейму $\mathfrak{F}^*$. Далі можна покласти, що фрейм $\mathfrak{F}$ є зв"язаним, тобто має форму $\mathfrak{F}^\infty = \langle U^\infty, R, U \rangle$. Отже маємо $(v, M) \models A \leftrightarrow (v, M^\infty) \models A$, де M^∞ – це модель, визначена відносно зв"язаного фрейму $\mathfrak{F}^\infty$ (див.Е.Леммон Алгебраическая семантика для модальных логик II.// Семантика модальных и интенсиональных логик.М.1981.С.127-8). Тоді для атомної ппф A_0 за визначенням моделі маємо:$(w, M) \models A_0 \leftrightarrow (w, nM) \models A_0$ (для всіх $w \in U^\infty$).

Нехай доведено $(w, M) \models n(A) \leftrightarrow (w, nM) \models A$ для всіх $w \in U^\infty$ (#). Тоді $(w, M) \models {\sim}n(A) \leftrightarrow (w, nM) \models {\sim}A$. Але ${\sim}n(A) = n({\sim}A)$. Отже $(w, M) \models n({\sim}A) \leftrightarrow (w, nM) \models {\sim}A$. Аналогічно доводиться, що $(w, M) \models n(A*B) \leftrightarrow (w, nM) \models A*B$, де $* = \langle \vee, \wedge \rangle$.

Нехай $(w, M) \models n(\Box A)$. Без втрати загальності можемо рахувати фрейм очищеним, тобто $w \in U$. За визначенням n-перекладу $(w, M) \models \Box T \supset \Box n(A)$. За визначення моделі це значить : якщо $(w, M) \models \Box T$, то $(w, M) \models \Box n(A)$. Але $(w, M) \models \Box T$ виконується т.і.т..коли $w \in U$, а $(w, M) \models \Box n(A)$ виконується т.і.т..коли $\forall v(wRv \supset (v, M) \models n(A))$ & $w \in U$. Отже, враховуючи (#), маємо $(w, nM) \models \Box A$.

Нехай $(w, nM) \models \Box A$. Тоді $\forall v \in U^\infty (wRv \supset (v, nM) \models A)$, де $w \in U^\infty$. Нехай $w \in U$. Тоді $(w, M^\infty) \models \Box A$, а значить і $(w, M^\infty) \models \Box T \supset \Box A$. Отже $(w, M) \models n(\Box A)$. Нехай $w \notin U$. Тоді $(w, M^\infty) \not\models \Box A$, а значить $(w, M^\infty) \models \Box T \supset \Box A$. Отже $(w, M) \models n(\Box A)$. Тобто (#) виконується для всіх ппф.■

2). Нехай M – це модель, визначена нормальним фреймом $\mathfrak{F}$, а dM – фреймом $\delta\mathfrak{F}$. Нехай доведено, що $(w, M) \models d(A) \leftrightarrow (w, dM) \models A$, $w \in W$, для ппф складності $\leq k$. Розглянемо тільки випадок $(w, M) \models d(\Box A)$. За визначенням d-перекладу маємо $(w,M) \vdash \Box d(A).\sim\Box\sim T$. Але $(w,M) \vdash \sim\Box\sim T \Leftrightarrow \exists v(wRv) \Leftrightarrow w \in U$, $(w,M) \vdash \Box d(A) \Leftrightarrow \forall v(wRv \supset (v,M) \vdash d(A))$. Враховуючи наше припущення, маємо $\forall v(wRv \supset (v,dM) \vdash A)$. Але $w \in U$. Отже за визначенням $(w,dM) \vdash \Box A$. Таким чином $(w,M) \vdash d(A) \Leftrightarrow (w,dM) \vdash A$, $w \in W$, для ппф будь-якої складності .■

3). Нехай M – це модель, визначена нормальним фреймом $\mathfrak{F}$, а rM – фреймом $\rho\mathfrak{F}$. Нехай доведено, що $(w,M) \vdash r(A) \Leftrightarrow (w,rM) \vdash A$, $w \in W$ (#), для ппф складности $\leq k$. Розглянемо тільки випадок $(w,M) \vdash r(\Box A)$. За визначенням r-перекдладу маємо $(w,M) \vdash r(A)$ & $\Box r(A)$. Але $(w,M) \vdash \Box r(A) \Leftrightarrow \forall v(wRv \supset (v,M) \vdash r(A))$. Враховуючи наше припущення, маємо $\forall v(wRv \supset (v,rM) \vdash A)$ (*). Тепер врахуємо екстенсиональність нашої теорії моделей, тобто $(w,M) \vdash r(A) \Leftrightarrow \forall v(v=w \supset (v,M) \vdash r(A))$, $(w,rM) \vdash A \Leftrightarrow \forall v(v=w \supset (v,rM) \vdash A)$. Враховуючи (#), маємо $\forall v(v=w \supset (v,rM) \vdash A)$(**). З (*) та (**) маємо $\forall v(v=w \vee wRv \supset (v,rM) \vdash A) \Leftrightarrow (w,rM) \vdash \Box A$. Отже (#) має місце для всіх ппф.■

Визначення 3. Логіка $L=C2+A$ є нормалізуємою, якщо $L \vdash n(A)$. (В цьому випадку маємо $nL \longrightarrow_n L \leq nL$, де $nL=K+A$).

Теорема 2. Нехай A – це ппф модальної складності не більше 1. Тоді C2+A нормалізуєма т.і.т., коли $A = \Box A_0 \vee B$.

Доведення. Нехай ДНФ формули A має вигляд $\bigvee_i \Box A_i.\sim\Box\sim B_{1i},\sim\Box\sim B_{2i} \ldots\sim\Box\sim B_{ki} \vee \Box A_0 \vee C$, де A_i, B_{ij}, C – немодальні ппф. Тоді $n(A)=\Box T$. $(\bigvee_i \Box A_i.\sim\Box\sim B_{1i},\sim\Box\sim B_{2i}\ldots\sim\Box\sim B_{ki}) \vee \sim\Box T \vee \Box A_0 \vee C = A \vee \sim\Box T$. Отже $A \supset n(A)$ – це тавтологія. Якщо в A диз"юнкт $\Box A_0$ відсутній, то маємо $n(A) \supset A$ тавтологією.■

Заувага. Отже класичні системи D2 та E2 не нормалізуються, але нормалізуються системи $D2^{**}=C2+\sim\Box\sim A \supset \Box A$, $E2^{**}=C2+A \supset \Box A$, що характеризують аристотелівську модальність. З огляду на це властивість нормалізуватися деяким чином характеризує системи аристотелівської модальності.

Розглянуту вище репрезентацію різних логік відносно логіки K (C2) можна назвати внутрішньою , оскільки відповідні переклади формулюються в термінах мови логіки K . Одначе логіка K володіє зовнішньою репрезентацією , якщо врахувати , образно кажучи , можливість її замкнення: так замкнення множини раціональних чисел дає множину дійсних чисел. Для цього природньо скористатись ідеєю індуктивної або проективної границі (див.Бурбаки Н. Теория множеств.М.1965,с.388). Найбільш просто це робиться так.

Визначення 4. Нехай мається індуктивна система фреймів $(\mathfrak{F}_i, e_i)$, $i \in N$, тобто діаграма:

$\mathfrak{F}_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathfrak{F}_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} \ldots \xrightarrow{\varepsilon_{n-1}} \mathfrak{F}_n \xrightarrow{\varepsilon_n} \ldots$, де ε_i – відповідні морфізми, e_i – відповідні переклади.

$\mathrm{Th}\downarrow \quad \mathrm{Th}\downarrow \ldots \quad \ldots \mathrm{Th}\downarrow \ldots$

$L_1 \xleftarrow{e_1} L_2$

$L_1 \xleftarrow{\quad e_{n-1} \quad} L_n \ldots \ldots$

$\ldots$

Нехай $L^* = \langle A\colon \mathfrak{F}^* \models A \rangle$, де $\mathfrak{F}^* = \varinjlim \mathfrak{F}_n$ – індуктивна границя. Індуктивна система є експотенціальною, якщо $\varepsilon = \varepsilon_i$, $i \in N$. Система $\langle e_i \rangle$ експотенціально репрезентує систему $\langle \varepsilon_i \rangle$, а логіка L^* експотенціально вкладається в логіку L ($L^* \xrightarrow{\quad}_{exp} L$), якщо $L = L_i$, $i \in N$.

<u>Теорема 3</u>. $K4 \xrightarrow{\quad}_{exp} K \subseteq K4$.

ІД. Розглянемо індуктивну систему фреймів $\mathfrak{F}_i = \langle W, R_i \rangle$, де $R_i = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^i$. Тоді $\varepsilon_i(.) = \varepsilon(.) = R \cup R(.)$. За визначенням $\mathfrak{F}^* = \langle \bigcup\limits_i \langle W, i \rangle , \bigcup\limits_i \langle R_i, i \rangle \rangle = \langle W^*, R^* \rangle$, де $\langle W, i \rangle = \{ \langle w, i \rangle : w \in W \}$, а відношення $\langle R_i, i \rangle$ визначається як $\langle v, i \rangle \langle R_i, i \rangle \langle w, i \rangle \Leftrightarrow vR_i w$.

Далі маємо $\langle v, i \rangle R^* \langle w, j \rangle \Leftrightarrow \exists n (n = i = j \wedge vR_n w)$, $\langle v, i \rangle (R^*)^2 \langle w, j \rangle \Leftrightarrow \exists k (k = i = j \wedge v(R^2 \cup \ldots \cup R^{2k}) w)$. Отже $(R^*)^2 \subseteq R^*$, тобто R^* є транзитивним. Але транзитивний фрейм характеризує логіку $K4$.

Нехай e_n – це переклад L_n в $L_1 (=K)$, $n \in N$, такий , що він відрізняється від n-перекладу пунктом iv) $e_n(\Box A) = \Box e_n(A) \ldots \Box^n e_n(A)$. Якщо M^1 та M^n – це моделі , що відповідають фреймам $\mathfrak{F}_1$ та $\mathfrak{F}_n$, то нехай вже доведено для ппф складності $\leq k$, що $(w, M^1) \models e_n(A) \Leftrightarrow (w, M^n) \models A$ (*). Розглянемо тільки випадок $(w, M^1) \models e_n(\Box A)$. За визначенням e_n-перекладу маємо $(w, M^1) \models \Box e_n(A) \ldots \Box^n e_n(A)$. За визначення моделі це має місце т.і.т., коли $(w, M^1) \models \forall v (wR^r v \supset (v, M^1) \models e_n(A)$, для $1 \leq r \leq n$. Враховуючи припущення (*) та визначення оператора $\Box$ в M^n, маємо $(w, M^n) \models \Box A$.

Тепер покажимо, що $L_2 = K$. Неважко перевірити, що $K \subseteq L_2$. Для доведення зворотнього включення достатньо довести, що по кожній моделі M логіки K, де ппф A фальсифікується, можна побудувати модель N логіки K, де ппф $e_2(A)$ фальсифікується. Враховуючи те, що для K виконується умова кінечності моделей, можемо рахувати, що M визначена на кінечному та зв"язаному фреймі, тобто на кінечній деревоподібній структурі $\mathfrak{F}(v_0)$, де v_0 – корінь дерева. Скажимо, що фрейм $\mathfrak{G}$ є кінцевим розширенням $\mathfrak{F}(v_0)$, якщо $\mathfrak{G}$ отримано з $\mathfrak{F}(v_0)$ достроюванням до його кінцевих вузлів кінечних дерев ($\mathfrak{F}(v_0) \subset \mathfrak{G}$). Очевидно, що $\mathfrak{G}$ входить в клас фреймів, на яких визначені моделі логіки К.

Стратифікуємо множину підформул ппф А ($F(A)$) наступним чином: F_0 - підформули модальної складності 0, які не мають входжень типу $\Box^n B$. F_1 - підформули типу $\Box^n B$, $B \in F_0$. F_2 - підформули типу $\Box^n B(A_1,\ldots,A_n)$, де $B(A_1,\ldots,A_n)$ - бульова комбінація $A_1,\ldots,A_n$, $A_i \in F_0 \cup F_1$. F_n - підформули типу $B(A_1,\ldots,A_n)$, $A_i \in F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$.

Очевидно, що 1) $e_2(F_0) \subseteq F(e_2(A))$, 2) якщо $\Box^n B \in F_1$, то $\Box^n B$, $\ldots \Box^{2n} B \in F(e_2(A))$, 3) якщо $\Box^m B \in F_n$, то $\Box^m e_2(B),\ldots,\Box^{2m} e_2(B) \in F(e_2(A))$. Нехай тепер модель М, що фальсифікує ппф А, визначена на $\mathfrak{F}(v_0)$. Для підформул з F_1 робимо наступне: якщо $\Box^n B \in F_1$ в якомусь вузлі дерева має оцінку 1, то туж саму оцінку 1 приписуємо всім $\Box^k B$, $n+1 \leq k \leq 2n$ (це значить, що оцінка $\Box^n B$ та $e_2(\Box^n B)$ в цьому вузлі співпадає), а далі, рухаючись до кінцевих вузлів по нашому дереву, приписуємо оцінки всім підформулам ппф $\Box^k B$, $n+1 \leq k \leq 2n$, згідно стандартних модельних визначень.

При цьому можливі два варіанти: 1) в кінцевому вузлі оцінка ппф $\Box^k B$ є 1, тоді дерево залишається без змін, оскільки істинність В в кінцевому вузлі гарантує істинність там $\Box^k B$ для всякого r, 2) в кінцевому вузлі оцінка ппф $\Box^k B$ є 0, тоді добудовуємо послідовність вузлів, в кожному з яких відповідна підформула ппф $\Box^k B$ має оцінку 0. Таке розширення N моделі М будемо називати кінцевим ($M < N$).

Неважко бачити, що після закінчення цієї процедури для множини F_1, ми отримаємо деяке кінцеве розширення $\mathfrak{G}$ фрейму $\mathfrak{F}(v_0)$ таке, що $(w,M) \models B \Leftrightarrow (w,M_1) \models e_2(B)$, $B \in F_0 \cup F_1, w \in \mathfrak{F}(v_0), M < M_1$, де M_1 - модель на $\mathfrak{G}$. продовжуючи індуктивно цей процес, ми отримаємо $(v_0,M) \models A \Leftrightarrow (v_0,M_n) \models e_2(A)$, де $M_n > M$. Оскільки по нашому припущенню $(v_0,M) \not\models A$, то і $(v_0,M_n) \not\models e_2(A)$. Отже $L_2=K$. Ідея доведення $L_n=K$ аналогічна.■

Наслідок. $S4 \longrightarrow_{r,exp} K \subseteq S4$. (Таким чином система К це насправді система S4. З іншого боку, можна сказати, що в системі S4 об"єднано ідею екстенсіональності теорії моделей для системи К та ідею нармалізації теорії доведення для системи К).

<u>Визначення 4.</u> Нехай мається проективна система фреймів $(\mathfrak{F}_i, \varepsilon_i)$, $i \in N$, тобто діаграма:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\varepsilon_n"] & \mathfrak{F}_n \arrow[r, "\cdots\ \varepsilon_2"] \arrow[d, "th"] & \mathfrak{F}_2 \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "th"] & \mathfrak{F}_1 \arrow[d, "th"] \\
L & L_n \arrow[l, "e_n"'] & \cdots\cdots & \\
L & & & L_1 \arrow[lll, "e_1"']
\end{tikzcd}$$

, де ε_i – відповідні морфізми, а e_i – це відповідні переклади.

Нехай $L_* = \{A : \mathfrak{F}_* \models A\}$, де $\mathfrak{F}_* = \varprojlim \mathfrak{F}_n$ – проективна границя нашої системи. Проективна система імпотенціальна, якщо $\varepsilon = \varepsilon_i$, $i \in N$. Система $\{e_i\}$ імпотенціально репрезентує систему $\{\varepsilon_i\}$, а логіка L_* імпотенціально вкладається в L ($L_* \longrightarrow_{imp} L$) , якщо $L = L_i$, $i \in N$.

Теорема 4. $C4 \longrightarrow_{imp} C2 \le C4$.

ІД. Розглянемо проективну систему фреймів $\mathfrak{F}_i = \langle W, R, U_i \rangle$, де $U_i = \{ v : U_1(v).U_2(v)\ldots U_i(v) \}$,а $U_1(v) = \forall w(vR^2w \supset vRw)$, $U_{n+1}(v) = \varepsilon U_n(v)$, де $\varepsilon U(v) = \forall w(vRw \supset U(w/v))$. За визначенням $\mathfrak{F}_* = \langle W_*, R_*, U_* \rangle$, де $W_* = \{ \mathbf{v} \in W^N : \mathbf{v} = \langle v, v, \ldots v \ldots \rangle,\ v \in W \}$, а R_* визначається так: $\mathbf{v}R_*\mathbf{w} \Leftrightarrow vRw$. $U_* = \prod_i U_i$, тобто $\mathbf{v} \in U_* \Leftrightarrow \forall n U_n(v)$. Переклад e_n визначається як у попередній теоремі.

Неважко перевірити, що з семантичної умови $|\Box A|_{\mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow \forall \mathbf{w}(\mathbf{v}R_*\mathbf{w} \supset |A|_{\mathbf{w}} = 1)$ & $\mathbf{v} \in U_*$ випливає умова $|\Box\Box A|_{\mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow \forall \mathbf{w}(\mathbf{v}(R_*)^2\mathbf{w} \supset |A|_{\mathbf{w}} = 1)$ & $\mathbf{v} \in U_*$ & $(\forall \mathbf{w}(\mathbf{v}R_*\mathbf{w} \supset \mathbf{w} \in U_*))$, тобто ппф $\Box A \supset \Box\Box A$ є тавтологією. Отже фрейм $\mathfrak{F}_*$ визначає логіку $C2$. Доведення того, що $C2 = L_n$, $n \in N$, таке ж , як і у попередній теоремі.■

Наслідок. Існує функтор нормалізації $\mathfrak{N}$ такий, що $\mathfrak{N}(imp) = exp$.

Визначення $\mathfrak{N}$ видно із наступної діаграми:

$$\begin{tikzcd}
C4 \arrow[r, "{}_{imp}"'] \arrow[d, "n"'] & C2 \le C4 \arrow[d, "n"'] \\
K4 \arrow[r, "{}_{exp}"'] & K \le K4
\end{tikzcd}$$

, де n – це морфізм нормалізації.

Заувага. 1).Дуже проста система аристотелівської модальності $T* = K + A \supset \Box A$, яка семантично визначається нормальними фреймами з умовою $\forall v w(vRw \supset w=v)$ ні внутрішньо, ні зовнішньо не репрезентується в K, оскільки відношення рівності = визначається, взагалі кажучи, тільки у другопорядковій логіці.2). Логіка нестабільності (див.Омельянчик[1989]) є недистрибутивною , але модулярною. Ортологіка , яка є немодулярною, може бути отримана, як проективна границя логік нестабільності. Це дає змогу реалістичної інтерпретації квантової механіки.

Визначення 5. Формула A логіки K називається (m, n)-формулою, якщо вона має модальну складність m та n пропозиційних змінних.

Визначення 6. Логіка L є (m, n)-розширенням логіки K, якщо вона є нормальне розширення за рахунок (m, n)-формул.

<u>Теорема 5.1).</u>Гратка $(1,1)$- розширень логіки K має форму "скринька з кришкою":

де вказані системи визначаються наступними ппф: $D: {\sim}\Box{\sim}T$; $D^*: {\sim}\Box{\sim}A \supset \Box A$; D-TRIV: ${\sim}\Box{\sim}A \equiv \Box A$; $W: \Box A . {\sim}\Box{\sim}A \supset A,\ A \supset \Box A \vee {\sim}\Box{\sim}A$; TRIV: $A \equiv \Box A$; $V: \Box\bot$; $1: A . {\sim}A$.

2) $(1,2)$-розширення включаються в $(1,1)$-розширення.

Доведення. Безпосередня перевірка.∎

<u>Зауваrа</u>. "Скринька" ізоморфна гратці відкритих та замкнених підмножин топологічного простору $(\{1,2,3\}, \tau=\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\})$. В цьому сенсі система D^* (T^*), що репрезентує аристолтелівську модальність, є псевдодоповненням системі D (T).

Гратка $(2,1)$- розширень має принципово складнішу структуру, для аналізу якої скористаємось методом тривіальних вузлів.

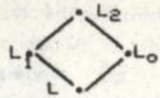
<u>Визначення 6</u>. Модально дуальною формулою до ппф A є ппф A^*, яка отримана з A заміною всіх входжень оператора $\Box$ на ${\sim}\Box{\sim}$.

<u>Визначення 7.</u> Нормальна логіка $L^* = K+A^*$ є модально дуальною до логіки $L=K+A$.

<u>Зауваrа</u>.1) неважко бачити, що логіки аристотелівських модальностей є модальними дуалами класичних модальних логік; 2) взагалі кажучи, поняття модального дуала залежить від форми аксиоматизації данної логіки, тобто це інтенсиональне поняття (напр. $D_1 = K+{\sim}\Box{\sim}T = D_2 = \Box A \supset {\sim}\Box{\sim}A$, але $D_1^* = K \neq D_2^*$).

За аналогією з аксиомою TRIV, яка редукує модальність, можна розглядати інші редукції модальностей. Відповідні аксиоми будемо називати тривіалізуючими, а відповідні нормальні розширення K - тривіальними вузлами (у відповідній гратці нормальних розширень K). Нехай 5-TRIV: $\Box{\sim}\Box{\sim}A \equiv {\sim}\Box{\sim}A$; 4-TRIV: $\Box A \equiv \Box\Box A$, Br-TRIV: $A \equiv \Box{\sim}\Box{\sim}A$, Br: $A \supset \Box{\sim}\Box{\sim}A$; Br*: $A \supset {\sim}\Box{\sim}\Box A$.

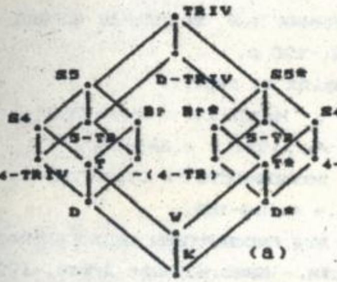
<u>Лема апроксимації.</u> Нехай L - логіка, що є розширенням класичної логіки пропозицій. Нехай $L_1 = L + A \equiv B$ та $L_2 = L_1 + B \equiv C$, Тоді $L_0 = L + \{ A . B \supset C,\ C \supset A \vee B \}$ є бульовим доповненням L_1 у

наступній гратці: 

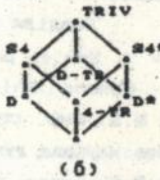
, де $L_o = -L_1$ є бульове доповнення.

ІД. Очевидно, що $L_2 \leq L_1 \cup L_o$. Але $L_o \leq L_2$ та за умовою $L_1 \leq L_2$. Отже $L_2 = L_1 \cup L_o$. Нехай далі $X \in L_1 \cap L_o$, тобто $A \equiv B \vdash_L X \leftrightarrow A, B \vdash_L X$, $\sim A, \sim B \vdash_L X$, та $A.B \supset C$, $C \supset A \vee B \vdash_L X \leftrightarrow A, \sim B \vdash_L X$, $\sim A, B \vdash_L X$, $A, C \vdash_L X$, $\sim A, \sim C \vdash_L X$, $\sim C, \sim B \vdash_L X$, $B, C \vdash_L X$. Звідки випливає $\vdash_L X$. Отже $L = L_o \cap L_1$

<u>Теорема 6</u>. Гратка (2,1)- розширень включає наступний фрагмент:



(а)



(б)

Доведення випливає з апроксимаційної леми. Як видно , гратка (2,1)- розширень має принципово складнішу структуру, ніж (1,1) - гратка за рахунок того, що множина тривіальних вузлів сама є граткою. Тим не менш метод тривіальних вузлів, що базується на лемі апроксимації, дає можливість описати любий фрагмент (2,1)-гратки (це відноситься і до (m,n)-гратки)(пор.(а) та (б)).

Із сказанного випливає, що логіки аристотелівської модальності є доповненнями до класичних логік в межах відповідної гратки. Іншими словами, аристотелівська модальність - це модальність, яка тривіалізує, в якомусь сенсі, класичну модальність. Модальна дуалізація - це один із способів вказаної тривіалізації, яка ,одначе, не призводить до тривіалізації моделей. І це є специфікою саме модальної логіки на відміну від кванторної: кванторна дуалізація, тобто заміна $\forall$ на $\exists$, першопорядкової тавтології призводить, як відомо,- до тривіалізації моделей.

<u>Заувага</u>. 1).Оператор $\sim\alpha\sim = \mu$ найбільш простої системи аристотелівської модальності T* є мультиплікатором, тобто для нього виконується умова $\mu(A \wedge B) = \mu(A) \wedge B$, а це значить , що він

одночасно є гратковим гомоморфізмом та топологічним інтеріор-оператором (див. W.Cornish The Multiplier Extensions of a Distributiv Lattice // Journal of Algebra 32 (1974),p.339-55). Відповідно неважко бачити, що множина відкрито-замкнених підмножин передтопологічного простору є моделлю для T*.

2). Класичний оператор істини T є аристотелівською модальністю, що репрезентується системою T*.

Зміст проведеного дослідження викладено в основних роботах:

Монографії:

1.Омельянчик В.И. Возможность, структура, действие (введение в модальный реализм).- Киев:Наукова думка,1991.-210 с.

2.Павлов В.Т.,Ишмуратов А.Т.,Омельянчик В.И. Модальная логика (учебное пособие).- Киев:КДУ,1982.-120 с.

Розділи в монографіях та статті:

3.Omelyanchik V. Soviet philosophy // Handbook of Metaphysics and Ontology .- München:Philosophia Vg.,1991.- p.848-850.

4.Омельянчик В.И. Мир, структура , возможность // Структура и смысл.- Киев:Наукова думка.-1989.- с.108-155.

5.Омельянчик В.И. Logos и Ratio - две перспективы рациональности // Логика и проблема рациональности.- Киев:Наукова думка.-1993.

6.Омельянчик В.И. Случайность, нелинейность, интенсиональность // Идея гармонии в научной картине мира .- Киев:Наукова думка.-1989.- с.49-66.

7.Омельянчик В.И. Каузальная атрибуция, интенциональность, немонотонные рассуждения // Рациональность и семиотика поведения.- Киев.-1988.- с.24-25.

8.Омельянчик В.И. Речь , истинность и парадокс лжеца // Доказательство и понимание.- Киев:Наукова думка. -1986.-с.185-215.

9.Омельянчик В.И. Диалогическая традиция в логике // Рациональность, рассуждение,коммуникация.- Киев:Наукова думка.-1987.-с.58-73.

10.Омельянчик В.И. Співвідношення істинності і логічної форми судження: проблема пресуппозиції.- Філософська думка,1984,N1. с.35-45.

12.Омельянчик В.И. Понимание и семантика классической и модальной логик.//Понимание как логико-гносеологическая проблема.- Киев: Наукова думка,1982.- с.259-269.

Киев тип.ФПУ Зак.1383-100.