КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

Михайлова Ірина Олександрівна

МАЙЖЕКІЛЬЦЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ

01.01.06 - математична логіка, алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1993

Робота виконана в Київському університеті ім. Тараса Шевченка

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор Кириченко Володимир Васильович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
доцент Курлаченко Леонід Андрійович;

кандидат фізико-математичних наук,
доцент Новіков Борис Володимирович.

Провідна установа: Львівський університет

Захист дисертації відбудеться "21" червня 1993 р.
в 14⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої ради К 068.18.II
при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою:
м.Київ, проспект акад. Глушкова, 6, механіко-математичний факультет Київського університету.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці університету.

Автореферат розповсюджено "14" травня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Сущанський В.І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми визначається зростанням інтересу до вивчення будови майжекілець перетворень груп. Простота таких майжекілець зумовлює труднощі, пов'язані з обмеженістю застосування у цьому випадку класичних факторизаційних методів. Багато робіт з теорії майжекілець, що виконані на протязі останнього десятиріччя (Meldrum, Heatherly, Ligh, Bestch та ін.), присвячені розробці нових методів (і, зокрема, матричних) структурної теорії майжекілець. Однак, поки що не вдається з достатньою глибиною врахувати нелінійні ефекти, що виникають при розгляді майжекілець і, зокрема, майжекілець перетворень. Деякі нові підходи до подолання згаданих труднощів сформувались в роботах Dašić'a, В.В.Кириченка і В.М.Усенка та деяких інших авторів. Ці підходи засновані на класифікації операторних властивостей перетворень груп. Їх застосування дає можливість виділити та вивчити нові класи майжекілець перетворень.

Мета роботи полягає у вивченні структури майжекілець перетворень груп за допомогою виділення деяких спеціальних класів підмайжекілець, а також за допомогою техніки адитивної факторизації майжекілець.

Наукова новизна роботи визначається тим, що в ній отримані такі нові результати:

- описані основні арифметичні та структурні властивості майжекілець редукованих та вербальних ендоморфізмів довільної групи;

- доведена редукційна теорема про будову майжекільця однорідних перетворень нескінченної циклічної групи;

- описана локальна структура майжекільця однорідних перетворень вільної абелевої групи скінченного рангу та деяких централізаторних підмайжекілець цього майжекільця.

Результати роботи мають теоретичний характер і знайдуть застосування в дослідженнях з теорії майжекілець та з теорії груп.

Загальна методика дослідження, використана в роботі, базується як на класичних загальноалгебраїчних методах, так і на деяких нових редукційних методах теорії майжекілець.

Апробація роботи здійснювалась на Міжнародних конференціях (Новосибірськ - 1989, Київ - 1992), на VI симпозиумі з теорії кілець, алгебр та модулів (Львів - 1990) та на алгебраїчних семінарах Київського Університету (1990 - 1993).

Публікації. Результати дисертації опубліковано в 6 роботах автора, перелік яких наведено в кінці реферату.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційну роботу викладено на 77 стор. машинопису. Робота складається з вступу, двох розділів, що містять загалом 8 параграфів, та переліку літератури, в якому налічується 51 назва робіт.

ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ містить загальні мотивування та огляд результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі роботи редукційними методами вивчаються майжекільця редукованих ендоморфізмів і вербальних перетворень груп.

В §I розділу I наводяться основні поняття теорії майжекілець. Разом з тим, детально вивчається поняття редукційної підгрупи майжекільця, що є основою редукційних методів теорії майжекілець.

Майжекільцем називається алгебра $(\mathcal{N}, *, \cdot)$ з двома бінарними операціями такими, що $A(\mathcal{N})=(\mathcal{N}, *)$ - група (A -група, або адитивна група майжекільця $\mathcal{N}$) , а $M(\mathcal{N})=(\mathcal{N}, \cdot)$ - напівгрупа (M-напівгрупа, або мультиплікативна напівгрупа майжекільця $\mathcal{N}$) , причому

$$t(u * v) = tu * tv$$

для всіх $t, u, v \in \mathcal{N}$. Через $\theta_{\mathcal{N}}$ позначається нейтральний елемент групи $A(\mathcal{N})$, а через $\overline{q}$ - елемент, протилежний елементу $q \in \mathcal{N}$ в групі $A(\mathcal{N})$. Нейтральний елемент (якщо він існує) напівгрупи $M(\mathcal{N})$ позначається через $\varepsilon_{\mathcal{N}}$.

Підгрупа $U \leq A(\mathcal{N})$ називається редукційною, якщо при будь-яких $x, y \in \mathcal{N}$, $u \in U$ виконується умова

$$\overline{xy} * (x * u)y \in U .$$

Будь-який ідеал довільного майжекільця за означенням є редукційною підгрупою в своєму майжекільці.

Якщо $(G, *)$ - довільна група, то через $\mathcal{NT}(G)$ позначається майжекільце всіх перетворень групи G відносно операцій суперпозиції та покомпонентного підсумовування перетворень. Майжекільце $\mathcal{NT}(G)$ називається симетричним майжекільцем на групі G.

В §2 вивчаються деякі майжекільця, що породжуються так званими редукованими ендоморфізмами груп, а також майжекільця, що породжуються вербальними ендоморфізмами груп.

Нехай G - група, Δ - нормальна підгрупа групи G. Перетворення $\varphi \in \mathcal{NT}(G)$ називається редукованим Δ-ендоморфізмом (або, коротше, R^{Δ}-ендоморфізмом) групи G, якщо

$$\overline{g\varphi} * (g * h)\varphi * \overline{h\varphi} \in \Delta$$

для всіх $g, h \in G$. Нехай $E_{\Delta}(G)$ - множина всіх R^{Δ}-ендоморфізмів групи G. Покладемо

$$\mathcal{N}E_{\Delta}(G) = \{ \varphi \in E_{\Delta}(G) \mid \Delta\varphi \subseteq \Delta \}.$$

Має місце

ТЕОРЕМА. Множина $\mathcal{N}E_{\Delta}(G)$ тоді й лише тоді є підмайжекільцем симетричного майжекільця $\mathcal{NT}(G)$, коли

$$[\, \overline{x\varphi} \,;\, y\psi \,] \in \Delta$$

для всіх $x, y \in G$, $\varphi, \psi \in \mathcal{N}E_{\Delta}(G)$. За цих умов множина

$\mathcal{J}=\{\varphi\in \mathcal{NE}_\Delta(G)\,|\,G\varphi\subseteq\Delta\}$ є ідеалом майжекільця $\mathcal{NE}_\Delta(G)$, а фактормайжекільце $\mathcal{NE}_\Delta(G)/\mathcal{J}$ є кільцем.

Ця теорема знаходить свій розвиток при розгляді так званих $\mathcal{D}_n$-ендоморфізмів груп. Через ν_m , m - ціле, позначимо перетворення групи G , яке визначимо рекурсивно: $g\nu_0=\theta_G$, $g\nu_{i+1}=g\nu_i\cdot g$, $g\nu_i=\bar{g}\cdot g\nu_{-i+1}$, $i\in\{0,1,2,\dots\}$. Перетворення $\varphi\in\mathcal{NT}(G)$ назвемо $\mathcal{D}_n$-ендоморфізмом групи G (n - ціле), якщо $\nu_n\varphi=\varphi\nu_n$. $\mathcal{D}_n$-комутатором елементів u,v групи G назвемо елемент $c_n(u,v)=\overline{u\nu_n}\cdot(u\cdot v)\nu_n\cdot\overline{v\nu_n}$, а $\mathcal{D}_n$-комутантом групи G - підгрупу $C_n(G)$, що породжується всіма $\mathcal{D}_n$-комутаторами $c_n(u;v)$, $u,v\in G$. $C_n(G)$ - нормальна в G , а $G/C_n(G)$ - $\mathcal{D}_n$-комутативна група (або n-абелева за термінологією Бера, що ввів це поняття). $\mathcal{D}_n$-комутативними є групи, в яких виконується тотожність $(g\cdot h)\nu_n=g\nu_n\cdot h\nu_n$ і тільки такі групи. $\mathcal{D}_n$-комутативні групи (під назвою n-абелевих) вивчались в роботах Л.А.Калужніна, Г.А.Карасьова, В.М.Котлова та інших авторів. Покладемо

$$TC_n(G)=\{\varphi\in\mathcal{NT}(G)\,|\,\forall g,x\in G\quad [g;x\varphi]\in C_n(G)\},$$

$$\mathcal{D}_n^0(G)=\{\varphi\in TC_n(G)\,|\,\forall u,v\in G\quad \overline{u\varphi}\cdot(u\cdot v)\varphi\cdot\overline{v\varphi}\in C_n(G)\},$$

$$\mathcal{D}_n'(G)=\{\varphi\in\mathcal{D}_n^0(G)\,|\,G\varphi\subseteq C_n(G)\}.$$

ТЕОРЕМА. $\mathcal{D}_n^0(G)$ є підмайжекільцем в $\mathcal{NT}(G)$, а $\mathcal{D}_n'(G)$ - ідеал в $\mathcal{D}_n^0(G)$. При цьому існує мономорфізм

$$\mu : \mathcal{D}_n^0(G)/\mathcal{D}_n'(G) \to \mathcal{D}_n(G/C_n(G)),$$

$\mathcal{D}_n$-ендоморфізми є частинним випадком поняття вербального ендоморфізму групи. А саме - нехай $w(x_1, \dots, x_m)$ - групове слово в абетці $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Перетворення $\varphi \in \mathcal{NT}(G)$ назвемо V_w-ендоморфізмом (вербальним w-ендоморфізмом), якщо $(w(x_1\sigma, \dots, x_m\sigma))\varphi = w(x_1\sigma\varphi, \dots, x_m\sigma\varphi)$ при будь-яких значеннях $x_i\sigma \in G$ змінних x_i в G. $\mathcal{D}_n$-ендоморфізми є, таким чином, $V_{S_n(x)}$-ендоморфізмами, де $S_n(x) = x\nu_n$.

В §3 розглядаються V_w-ендоморфізми груп для групового слова $w = x \cdot y \cdot z$. Такі вербальні ендоморфізми названі в роботі W_3^0-ендоморфізмами. Отримується описання майжекільця W_3^0-ендоморфізмів довільної абелевої групи у вигляді підмайжекільця майжекільця її аффінних перетворень.

Заключні §4, §5 розділу I містять результати, пов'язані з докладним вивченням майжекільця перетворень адитивної групи $\mathbb{Z}$ кільця цілих чисел. При цьому в §4 викладені необхідні поняття й результати редукційної теорії адитивної факторизації майжекілець. Головним при цьому, разом з поняттям редукційної підгрупи є поняття псевдотрансляції майжекільця. Адитивний ендоморфізм π майжекільця $\mathcal{N}$ називається його псевдотрансляцією, якщо

$$(x \cdot y)\pi = (x\pi \cdot y)\pi.$$

для всіх $x, y \in \mathcal{N}$. В §4 наведені результати, про розклад майжекілець з ідемпотентними псевдотрансляціями у майжекільцеву конструкцію типу напівпрямого добутку. Ця конструкція, названа $\mathcal{NR}$ -добутком, застосовується в §5 до вивчення майжекільця перетворень групи $\mathbb{Z}$. А саме: нехай $\mathcal{N}=\mathcal{NT}_0(\mathbb{Z})$ - майжекільце однорідних перетворень групи $\mathbb{Z}$, $(x)r$ - остача, а $(x)q$ - неповна частка від ділення $x\in\mathbb{Z}$ на $n>0$ (фіксоване ціле), $\mathbb{R}_n=\{0,1,\dots,n-1\}$. Покладемо

$$\mathcal{N}_n=\{\varphi\in\mathcal{N}\mid \forall x\in\mathbb{Z}\ \ x\varphi=(x)sg((|x|)r\varphi+(|x|)q\varphi\nu_n)\},$$

$$\mathcal{N}_{n,0}=\{\varphi\in\mathcal{N}\mid \mathbb{R}_n\varphi=0\},$$

де $(x)sg$ - знак числа $x\in\mathbb{Z}$. Елементи з $\mathcal{N}_n$ назвемо досконалими $\mathcal{D}_n$ -ендоморфізмами групи $\mathbb{Z}$, а елементи з $\mathcal{N}_{n,0}$ - ануляторами лишків за модулем n. $\mathcal{N}_n$ і $\mathcal{N}_{n,0}$ - підгрупи адитивної групи майжекільця $\mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА. Майжекільце $\mathcal{NT}_0(\mathbb{Z})$ однорідних перетворень групи $\mathbb{Z}$ є $\mathcal{NR}$ -добутком підгрупи досконалих $\mathcal{D}_n$ -ендоморфізмів і підгрупи ануляторів лишків за модулем n для кожного $n\in\mathbb{Z}$, $n>0$.

З цієї теореми випливає відповідний наслідок про розклад в $\mathcal{NR}$-добуток майжекільця $\mathcal{D}_n$ -ендоморфізмів групи $\mathbb{Z}$.

Основним об'єктом вивчення в другому розділі роботи є майжекільце однорідних перетворень вільної абелевої групи скінченного рангу. В §§1,2 розділу II будуються так звані $\mathcal{NR}$-сполуки - зовнішня майжекільцева конструкція, що дозволяє вивчати симетричні майжекільця на прямих добутках груп. При розгляді в §3 розділу II майжекільця $\mathcal{N}=\mathcal{NT}_0(\mathfrak{U}_n)$ однорідних перетворень групи $\mathfrak{U}_n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$ конструкція $\mathcal{NR}$-сполук дозволяє ототожнювати елементи $\tau \in \mathcal{N}$ з матрицями

$$\tau = \begin{pmatrix} [\tau_{ij}] \\ \langle \tau_j' \rangle \end{pmatrix},$$

де $\tau_{ij} = \pi_i \tau \pi_j$, π_κ - канонічна проекція групи $\mathfrak{U}_n$ на κ-ту пряму компоненту, $\tau_j' \in \mathcal{D}(\mathfrak{U}_n; \mathbb{Z}) = \{\varphi : \mathfrak{U}_n \to \mathbb{Z} \mid \forall \pi_i \ \pi_i \varphi = 0\}$, $i, j, \kappa \in I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. При цьому майжекільцеві операції виконуються за правилами

$$\begin{pmatrix} [\tau_{ij}] \\ \langle \tau_j' \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\sigma_{ij}] \\ \langle \sigma_j' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\tau_{ij} + \sigma_{ij}] \\ \langle \tau_j' + \sigma_j' \rangle \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} [\tau_{ij}] \\ \langle \tau_j' \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\sigma_{ij}] \\ \langle \sigma_j' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\tau_{i1}\sigma_{1j} + \ldots + \tau_{in}\sigma_{nj} + l_i^{\tau}\sigma_j'] \\ \langle (c_\tau^1 \sigma_{1j})\partial_j + \ldots + (c_\tau^n \sigma_{nj})\partial_j + (m_\tau \sigma_j')\partial_j \rangle \end{pmatrix},$$

де

$$l_i^{\tau} = \tau_{i1} \oplus \tau_{i2} \oplus \ldots \oplus \tau_{in},$$

$$c_\tau^i = \tau_{1i} + \tau_{2i} + \ldots + \tau_{ni} + \tau_i',$$

$$m_\tau = c_\tau^1 \oplus c_\tau^2 \oplus \ldots \oplus c_\tau^n,$$

$$\varphi\partial_j = -\pi_1\varphi\pi_j - \pi_2\varphi\pi_j - \ldots - \pi_n\varphi\pi_j + \varphi\pi_j, \quad \varphi \in \mathcal{N}, \quad i, j \in I_n.$$

Зображення майжекільця $\mathcal{N}$, що отримується при цьому, разом з результатами §5 розділу I утворюють описання локальної структури майжекільця $\mathcal{N}=\mathcal{NT}_0(\mathfrak{A}_n)$. Це описання в §3 розділу II застосовується до вивчення централізаторних підмайжекілець майжекільця $\mathcal{N}=\mathcal{NT}_0(\mathfrak{A}_n)$. Підмайжекільце R симетричного майжекільця $\mathcal{NT}(G)$ на групі G називається S -централізаторним (де S - піднапівгрупа напівгрупи $\mathcal{E}nd\, G$), коли $\varphi\alpha=\alpha\varphi$ для всіх $\varphi\in R, \alpha\in S$. Нехай

$$E = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 ; 0 ; \dots ; 0 \\ 0 ; \mathcal{E}_2 ; \dots ; 0 \\ \dots \\ 0 ; 0 ; \dots ; \mathcal{E}_n \end{bmatrix} \\ \langle 0 ; 0 ; \dots ; 0 \rangle \end{pmatrix}$$

Має місце

ТВЕРДЖЕННЯ. Якщо $S=\mathcal{E}nd\,\mathfrak{A}_n$, то S -централізаторне підмайжекільце майжекільця $\mathcal{N}=\mathcal{NT}_0(\mathfrak{A}_n)$ співпадає з множиною перетворень вигляду

$$\varphi = \begin{pmatrix} \nu_m E \\ \langle 0 \rangle \end{pmatrix}, \; m\in\mathbb{Z} .$$

Нехай G - група всіх мономіальних $n\times n$ -матриць, S_n - симетрична група степеня n ,

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \nu_m M \\ \langle 0 \rangle \end{pmatrix} \;\middle|\; M\in G,\; m\in\mathbb{Z} \right\}.$$

Множина $\mathfrak{M}$ є піднапівгрупою напівгрупи $\mathcal{E}nd\,\mathfrak{A}_n$. Через $\mathcal{N}\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_n)$ позначимо $\mathfrak{M}$ -централізаторне підмайжекільце майжекільця $\mathcal{N}\mathfrak{T}_0(\mathfrak{U}_n)$, а через ε_{ij} - природній ізоморфізм між i-ю та j-ю прямими компонентами групи $\mathfrak{U}_n$. Покладемо $P=[\varepsilon_{ij}]$,

$$\mathfrak{R}=\left\{\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{U}_n;\mathbb{Z})\mid\forall\sigma\in\mathfrak{M}\ \forall\gamma\in S_n\ (\pi_1\sigma\pi_{1\gamma}+\ldots+\pi_n\sigma\pi_{n\gamma})\varphi=\varphi\sigma\right\}.$$

Має місце

ТЕОРЕМА.

$$\mathcal{N}\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_n)=\left\{\begin{pmatrix}\nu_m P\\ \langle\tau\rangle\end{pmatrix}\;\middle|\; m\in\mathbb{Z},\ \tau\in\mathfrak{R}\right\}$$

РОБОТИ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Михайлова И.А. О полиномиальных почтикольцах// Сибирская школа по многообразиям алгебраических систем.: Тез. докл.- Барнаул, 1988.- с.48.

2. Михайлова И.А. Об аффинных полупочтикольцах// Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И.Мальцева: Тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей.- ИМ СО АН СССР.- Новосибирск, 1989.- с.89.

3. Кириченко В.В., Михайлова И.А. Предпрямые произведения почтиколец// VI Симпозиум по теории колец, алгебр и модулей: Тез. сообщ.- Львовский госуниверситет им. И.А.Франко, Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР.- Львов, 1990.-

с.65.

4. Михайлова И.А. О матричных почтикольцах// Международная конференция, посвященная памяти академика М.П.Кравчука (22 - 28 сентября 1992 г.): Тез. докл.- ИМ АН Украины.- Киев, 1992.- с.134.

5. Михайлова И.А., Усенко В.М. О вербальных преобразованиях/ Киев. ун-т.- Киев, 1993.- 19 с.- Деп. в УкрИНТЭИ 26.01.93, №59-Ук93.

6. Михайлова И.А. О почтикольцах редуцированных эндоморфизмов/ Киев. ун-т.- Киев, 1992.- II с.- Деп. в УкрИНТЭИ 22.12.92, №2025-Ук92.

Підп.до друку 26.04.93р. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Умов.друк.арк. 0,7 . Умов.фарб.-відб. 0,7 . Обл.-вид.арк. 0,6
Тираж 100 прим. Зам. 175 . Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3