АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

АМЕРОВА Олена Іванівна

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОВИМІРНОГО НЕСТАЦІОНАРНОГО ОПЕРАТОРА ДІРАКА

01.01.02- диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ-1993

Роботу виконано у ві[...] Інституту математики АН [...]

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор НИЖНИК Л.П.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, МИХАЙЛЕЦЬ В.А., кандидат фізико-математичних наук, доцент ТАРАСОВ В.Г.

Провідна установа: Київський державний університет ім. Т.Г.Шевченка.

Захист відбудеться "22" червня 1993р.,о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ 4, МСП, вул. Терещенківська 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано "19" травня 1993р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних
наук ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Спектральна теорія операторів є важливим і досить розвиненим розділом сучасного функціонального аналізу. Свої витоки вона бере в праць Ш.Ерміта і М.Жордана (для скінченновимірного простору), Ж.Штурма і Ж.Ліувілля (для звичайних диференціальн х рівнянь II порядку), Е.Фредгольма і Е.Шмідта (для інтеграл них рівнянь). Фундамент абстрактної спектральної теорії був закладений видатними математиками XX століття: Г.Вейлем, Д.Гільбертом, Д.Нейманом, Ф.Рісом. Суттєвий вклад в побудову спектральної теорії операторів внесли Ю.М.Березанський, М.Ш.Бірман, І.М.Гельфанд, М.Данфорд, Т.Като, М.Г.Крейн, А.Г.Костюченко, Б.М.Левітан, В.О.Марченко, Ф.Реллікс, М.Стоун, Л.Д.Фаддеєв, К.Фрідріхс.

Важливим і найбільш розвиненим розділом спектральної теорії є спектральний аналіз диференціальних операторів. Спектральна теорія для звичайних диференціальних рівнянь детально вивчена завдяки працям Дж.Біркгофа, М.Г.Гасимова, І.М.Глазмана, М.В.Келдиша, Б.М.Левітана, З.Л.Лейбензона, В.Е.Лянце, В.О.Марченка, М.А.Наймарка, Е.Тітчмарша.

Спектральна теорія для диференціальних рівнянь в частинних похідних почала інтенсивно розвиватися лише в другій половині XX століття. Першим основним об'єктом досліджень був багатовимірний оператор Шредінгера. Найбільш глибокі результати для нього одержані Ю.М.Березанським, А.Я.Повзнером, Л.Д.Фаддеєвим. Побудовано спектральну теорію для загальних еліптичних рівнянь. Зокрема Ю.М.Березанським доведено розклад за узагальненими власними функціями. Для неeліптичних диференціальних операторів питання їх самоспряженості і структура спектра в рамках теорії збурень досліджувались в роботах Л.П.Нижника і М.Шехтера.

Слід відзначити, що вагомий внесок в розвиток спектральної теорії зробили вчені України. Тут сформувались Харківська школа (В.О.Марченко, І.М.Глазман, Ф.С.Рофе-Бекетов) Одеська школа (М.Г.Крейн, В.М. Адамян, Д.З.Аров, Л.А.Сахнович) і Київська школа (Ю.М.Березанський, В.В.Барковський, М.Л.Горбачук, В.І.Горбачук, Ю.Г.Кондратьєв, А.Н.Кочубей, В.Д.Кошманенко, В.А.Михайлець, Л.П.Нижник, Г.В.Радзієвський, Ю.С.Самойленко).

В останні десятиріччя поряд з дослідженнями з спектральної теорії загального характеру, велика увага стала приділятися спектральному аналізу конкретних операторів. Зокрема це викликано широким застосуванням методу оберненої задачі розсіяння для інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь. Для інтегрування рівняння Деві-Стюартсона використовується двовимірний нестаціонарний оператор Дірака. У зв'язку з цим проведення детального спектрального аналізу двовимірного нестаціонарного оператора Дірака є досить актуальним.

Мета роботи. Провести детальний спектральний аналіз двовимірного нестаціонарного оператора Дірака: виявити умови самоспряженості, вивчити характер спектра, визначити структуру резольвенти, вивчити і співставити різні підходи до задачі розсіяння, побудувати узагальнені власні функції для оператора Дірака як розв'язки задачі розсіяння і встановити спектральний розклад за цими функціями.

Методика досліджень. В роботі використані методи теорії операторів, теорії інтегральних рівнянь, нестаціонарний, стаціонарний і підхід Лакса-Філліпса в теорії розсіяння, теорія узагальнених функцій.

Наукова новизна. Всі основні результати дисертаційної роботи є новими.

-Доведена самоспряженість симетричного двовимірного нестаціонарного оператора Дірака. при умові локальної інтегрованості з квадратом потенціалу. При цьому його спектр є абсолютно неперервним і займає всю дійсну вісь.

-Доведено, що умова інтегрованості з квадратом потенціалу приводить до Гільберта-Шмідтівського збурення резольвенти.

-Побудовані оператори розсіяння на основі нестаціонарного, стаціонарного і методу Лакса-Філліпса і співставлені з оператором розсіяння для двовимірної системи Дірака, дослідженим Л.П.Нижником.

-Встановлено спектральний розклад за розв'язками задачі розсіяння як узагальненими власними функціями оператора Дірака

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на семінарі відділу функціонального аналізу Інституту математики АН України, на семінарі кафедри математичної фізики і конференції молодих вчених Київського державного університету, семінарах виконавців проекту за № 1/238, фінансованого Фондом фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки та технологій.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 3 роботах, наведених наприкінці автореферату.

Структура та об'єм роботи. Дисертація об'ємом 85 сторінок машинопису складається із вступу, трьох глав і списку цитованої літератури, що містить в собі 70 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми, наводиться стислий огляд робіт по даній тематиці, формулюються основні положення дисертаційної роботи.

В першій главі досліджується самоспряженість і вивчається структура спектра двовимірного нестаціонарного оператора

Дірака в характеристичних змінних вигляду

$$L = \begin{pmatrix} -i\frac{\partial}{\partial x} & v_1(x,y) \\ v_2(x,y) & -i\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

у просторі $L_2(E^2,E^2)$ - двохкомпонентних вектор-функцій, сумованих з квадратом по двох змінних.

Оператор L можна представити у вигляді суми незбуреного оператора

$$L_0 = diag\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial y}\right); \qquad (2)$$

і потенціалу

$$V = \begin{pmatrix} 0 & v_1(x,y) \\ v_2(x,y) & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Замикання в просторі $L_2(E^2,E^2)$ незбуреного оператора з множини неперервно диференційованих фінітних функцій $C_0^\infty(E^2,E^2)$ є самоспряженим оператором з абсолютно неперервним спектром.

В теоремах 1.2.1. і 1.2.2. доводиться, що при умові $v_1(x,y)=\overline{v_2(x,y)} \in L_{2,loc}(E^2)$ замикання в $L_2(E^2,E^2)$ оператора L із $C_0^\infty(E^2,E^2)$ є самоспряженим оператором з абсолютно неперервним спектром, що займає всю вісь.

В дисертації дається два різних доведення наведеного результату. Перший, більш специфічний, оснований на тому простому факті, що для довільного $a \in R$ оператор $L+aI$

є унітарно еквівалентним до оператора L. Причому унітарну еквівалентність здійснює оператор множення.

Другий підхід грунтується на відсутності нетривіальних розв'язків із $L_2(E^2, E^2)$ в тотожності

$$i\frac{\partial}{\partial x}|\psi_1|^2 + i\frac{\partial}{\partial y}|\psi_2|^2 + 2i\,\mathrm{Im}\,z\,(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)=0,$$

що виконується на розв'язках рівняння $L^*\psi = z\psi$ і означає рівність нулю дефектних чисел. Цей підхід дозволяє розглядати більш загальні ситуації, і в дисертації він застосовується до загальних матричних симетричних диференціальних операторів в частинних похідних першого порядку вигляду

$$L=\sum_{k=1}^{n} A_k\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)+V(x). \qquad (4)$$

Такий метод дав можливість довести самоспряженість оператора вигляду (4) з умовою $V(x)\in L_{2,loc}$ на потенціал (теорема 1.3.1). В теоремі 1.3.2 при додатковій умові на сукупність коефіцієнтів A_k доводиться відсутність дискретного спектра у оператора (4). Ця умова полягає в тому, щоб з рівності $(A_l\xi,\xi)=0$ для довільного $l=1,2,\dots,n$ випливало, що вектор $\xi=0$.

Всюди далі в дисертації припускається, що потенціал (3) задовольняє умову

$$v_1,\ v_2\in L_2(E^2). \qquad (5)$$

Ця умова приводить до Гільберта-Шмідтівського (Г.-Ш.) збурення резольвенти R_z оператора L (теорема 1.4.1):

$$R_z = R_z^0 + H_z , \qquad (6)$$

де H_z – оператор Г.-Ш. у просторі $L_2(E^2, E^2)$, що аналітично залежить від z у верхній і нижній комплексних півплощинах z. Резольвента R_z^0 незбуреного оператора L_0 (2) задається явною формулою $R_z^0 f = g$, де

$$g_1(x,y) = i \int_{\mp\infty}^{x} e^{iz(x-\xi)} f_1(\xi, y)\, d\xi ,$$

$$g_2(x,y) = i \int_{\mp\infty}^{y} e^{iz(y-\eta)} f_2(x, \eta)\, d\eta ,$$

(знак $-\infty$ та $+\infty$ на нижній межі інтегрування відповідає півплощинам $\operatorname{Im} z > 0$ та $\operatorname{Im} z < 0$). Доведення представлення (6) базується на вольтерровості однозначно розв'язного р'вняння для резольвенти

$$R_z = R_z^0 - R_z^0 V R_z .$$

Як наслідок із цієї теореми випливає твердження про відсутність комплексних власних значень у оператора Дірака при довільному (навіть несиметричному) потенціалі з умовою (5). Крім того, для симетричних потенціалів з умовою (5) звідси випливає рівність нулю індексів дефекту, тобто самоспряженість оператора (1) .Такий підхід до доведення самоспряженості диференціальних операторів, що випливає з вольтерровості творідних інтегральних рівнянь для функцій із ядра спряженого оператора, можна застосувати і для загальних гіперболічних рівнянь. Вперше такий підхід був використаний для рівняння струни Л.П.Нижником ще в 1963 році.

В другій главі для двовимірного оператора Дірака (1) побудовано оператор розсіяння на основі нестаціонарного, стаціонарного та підходу Лакса-Філліпса.

Для вивчення задачі розсіяння в нестаціонарному підході розглянуто задачу Коші для еволюційного рівняння

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = L\psi, \qquad \psi(0) = \psi_0 ; \tag{7}$$

з оператором L вигляду (1). Еволюційний оператор $\mathcal{U}(t)=e^{-iLt}$ співставляє початковим умовам розв'язок задачі Коші (7) в момент часу t :

$$\psi(t) = \mathcal{U}(t)\psi_0 . \tag{8}$$

В нестаціонарній теорії розсіяння важливу роль відіграють хвильові оператори W_+ і W_- , які для задачі (7) визначаються таким чином. Нехай $\psi^+(x,y,t)$ (або $\psi^-(x,y,t)$) -розв'язок незбуреної задачі Коші (7) (при $V\equiv 0$) з початковими умовами $\varphi^+(x,y)$(відповідно $\varphi^-(x,y)$) такий, що при $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ прямує до розв'язку збуреної задачі з початковими умовами $\psi_0(x,y)$. Тоді хвильові оператори визначатимуться рівністю

$$W_\pm\, \varphi^\pm = \psi_0 .$$

В роботі отримано інтегральне представлення для хвильових операторів, яке має вигляд

$$\left(W_{\pm}\varphi^{\pm}\right)(x,y)=$$

$$=\begin{pmatrix} \varphi_1^{\pm}(x,y)+\int\limits_y^{\pm\infty}A_{11}(x,y,\xi)\varphi_1^{\pm}(x+y-\xi,\xi)d\xi+\int\limits_x^{\pm\infty}A_{12}(x,y,\xi)\varphi_2^{\pm}(\xi,x+y-\xi)d\xi \\ \varphi_2^{\pm}(x,y)+\int\limits_y^{\pm\infty}A_{21}(x,y,\xi)\varphi_1^{\pm}(x+y-\xi,\xi)d\xi+\int\limits_x^{\pm\infty}A_{22}(x,y,\xi)\varphi_2^{\pm}(\xi,x+y-\xi)d\xi \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Вираз (9) можна представити в операторній формі:

$$W_{\pm}=R_0^{-1}\left(I+A_{\pm}(\tau)\right)R_0,$$

де $A_{\pm}(\tau)$ - операторна функція, що при фіксованому τ діє по першій змінній як інтегральний оператор, R_0 - унітарний оператор в $L_2(E^2,E^2)$:

$$\left(R_0\varphi\right)(s,\tau)\equiv\begin{pmatrix}\varphi_1(\tau-s,s)\\ \varphi_2(s,\tau-s)\end{pmatrix}. \qquad (10)$$

В нестаціонарній теорії оператор S_H, що переводить φ^- в φ^+, називається оператором розсіяння. Він пов'язаний із хвильовими операторами рівністю

$$S_H=W_+^{-1}W_-.$$

Для задачі (7) отримано представлення цього оператора

$$S_H=R_0^{-1}\left(I+A_+(\tau)\right)^{-1}\left(I+A_-(\tau)\right)R_0. \qquad (11)$$

Згідно з методом Лакса-Філліпса, за групою $\mathcal{U}(t)$ еволюційних операторів (8) у просторі $L_2(E^2,E^2)$ виділяються два підпростори D_- – прихідний і D_+ – відхідний. У випадку рівняння (7) підпростір D_+ складається з функцій $\psi(x,y) \in L_2(E^2,E^2)$, що рівні нулю при $x+y<0$; а підпростір D_- складається з функцій $\psi(x,y) \in L_2(E^2,E^2)$, що рівні нулю при $x+y>0$. Виділеним підпросторам $D_\pm$ відповідає трансляційне представлення групи $\mathcal{U}(t)$, при якому вихідний простір $L_2(E^2,E^2)$ унітарно відображується на $L_2(E^1,\mathcal{N})$, де $\mathcal{N}=L_2(E^1,E^2)$ – допоміжний гільбертовий простір, причому D_- (D_+) відображується на $L_2((-\infty,0),\mathcal{N})$ (відповідно $L_2((0,+\infty),\mathcal{N})$), а дія групи $\mathcal{U}(t)$ перетворюється в правий зсув на t одиниць. Оператори R_+ і R_-, які співставляють елементу вихідного гільбертового простору відповідні йому трансляційні представники k_+ і k_-, називаються операторами трансляційного представлення.

Теорема 2.3.2. Нехай $\psi_0(x,y)$ -довільний елемент вихідного простору $L_2(E^2,E^2)$, який будемо розглядати як початкові умови розв'язку $\psi(x,y,t)$ задачі Коші (7), $a^\pm(s,\tau)$ -асимптотики цього розв'язку:

$$\begin{aligned} a_1^\pm(s,\tau) &= \lim_{x\to\pm\infty} \psi_1(x,s,x+s-\tau), \\ a_2^\pm(s,\tau) &= \lim_{y\to\pm\infty} \psi_2(s,y,y+s-\tau). \end{aligned} \tag{12}$$

Тоді оператори $R_\pm \psi_0 = a^\pm$ визначають трансляційні представлення групи $\mathcal{U}(t)$.

В підході Лакса-Філліпса оператор

$$S_\Lambda = R_+ R_-^{-1}$$

встановлює відповідність між трансляційними представниками k_- і k_+ одного й того ж елемента вихідного гільбертового простору і називається абстрактним оператором розсіяння. У випадку задачі (7) трансляційними представниками є асимптотики (12) a^- і a^+ розв'язку задачі Коші (7), тому

$$a^+(s,\tau) = \mathcal{S}_\Lambda\, a^-(s,\tau).$$

В роботі реалізовано стаціонарний підхід в теорії розсіяння. Згідно з ним здійснюється діагоналізація оператора L_0 (2) відображенням $T_\lambda = \mathcal{F}_2 R_0$, де $\mathcal{F}_2$ – перетворення Фур'є по другій змінній, R_0 – унітарний оператор (10). Така діагоналізація приводить до розкладу вихідного гільбертового простору $L_2(E^2, E^2)$ в прямий інтеграл підпросторів

$$L_2(E^2, E^2) \xrightarrow{T_\lambda} \int \oplus\, \mathcal{H}_\lambda\, d\lambda,$$

де $\mathcal{H}_\lambda = L_2(E^1, E^2)$. При цьому оператор S_H (11) переходить в операторну функцію:

$$T_\lambda S_H T_\lambda^{-1} = S(\lambda).$$

Отриманий таким чином оператор $S(\lambda)$ відіграє роль оператора розсіяння в стаціонарній теорії і називається субоператором розсіяння або матрицею розсіяння. При фіксованому λ оператор $S(\lambda)$ діє в просторі $L_2(E^1, E^2)$.

Оператори розсіяння S_H, $\mathcal{S}_\Lambda$, $S(\lambda)$ співставлені з оператором розсіяння в підході Л.П.Нижника до вивчення задачі розсіяння для системи рівнянь

$$L\psi = 0. \qquad (13)$$

В цьому підході для допустимих розв'язків $\psi=(\psi_1,\psi_2)$ системи (13) $(\psi_1(x,\cdot),\psi_2(\cdot,y)\in L_2(E^1))$ доводиться існування в L_2 границь $\psi_1(\pm\infty,y)=a_1^{\pm}(y)$, $\psi_2(x,\pm\infty)=a_2^{\pm}(x)$. При цьому розв'зки системи (13) однозначно визначаються парою асимптотик $a^-=(a_1^-,a_2^-)$ - падаючих хвиль або $a^+=(a_1^+,a_2^+)$ - розсіяних хвиль через оператори перетворення. Оператор S, що переводить падаючі хвилі a^- у розсіяні a^+, називається оператором розсіяння

$$a^+(s)=S\,a^-(s) \tag{14}$$

В роботі доведено, що для двовимірного оператора Дірака (1) субоператор розсіяння співпадає з оператором (14):

$$S(\lambda)=S(0)=S.$$

Абстрактний оператор розсіяння Лакса-Філліпса по першій змінній діє як оператор (14), а по другій змінній- як тотожний оператор:

$$S_\Lambda=S\otimes I.$$

Встановлено також зв'язок оператора розсіяння в нестаціонарній теорії з оператором (14), який має вигляд:

$$S_H=R_0^{-1}(S\otimes I)R_0\,.$$

Третя глава присвячена побудові розкладу за узагальненими власними функціями оператора Дірака (1). Для незбуреного оператора (2) розглядаються два базиси узагальнених власних функцій:

$$1).\ \varphi^{(1)}(x,y,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\pi}e^{i\lambda(x+y)}e^{i\mu y}\\ 0\end{pmatrix};\ \varphi^{(2)}(x,y,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2\pi}e^{i\lambda(x+y)}e^{i\mu x}\end{pmatrix};\quad(15)$$

$$2).\ \varphi^{(1)}(x,y,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\lambda(x+y)}\delta(y-\mu)\\ 0\end{pmatrix};\ \varphi^{(2)}(x,y,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\lambda(x+y)}\delta(x-\mu)\end{pmatrix}.\quad(16)$$

Розклад довільної функції $f\in L_2(E^2,E^2)$ за узагальненими власними функціями оператора (2) вигляду (15) або (16) зводиться до перетворення Фур'є відповідно по двох або по одній змінній і має вигляд

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{pmatrix}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}<\varphi^{(1)}(x,y,\lambda,\cdot),\mathcal{F}(\lambda,\cdot)>_{L_2(E^1,E^2)}\\ <\varphi^{(2)}(x,y,\lambda,\cdot),\mathcal{F}(\lambda,\cdot)>_{L_2(E^1,E^2)}\end{pmatrix}d\lambda,$$

де

$$\mathcal{F}(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}\mathcal{F}_1(\lambda,\mu)\\ \mathcal{F}_2(\lambda,\mu)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}<f(\cdot,\cdot),\varphi^{(1)}(\cdot,\cdot,\lambda,\mu)>_{L_2(E^2,E^2)}\\ <f(\cdot,\cdot),\varphi^{(2)}(\cdot,\cdot,\lambda,\mu)>_{L_2(E^2,E^2)}\end{pmatrix}$$

Відповідні (16) узагальнені власні функції для збуреного оператора Дірака мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}^{\pm} \\ \varphi_{21}^{\pm} \end{pmatrix}(x,y,\lambda,\mu) = \frac{i e^{i\lambda(s+\mu)}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11}(x,y,s,\mu;\lambda \mp i0) \\ \mathcal{R}_{21}(x,y,s,\mu;\lambda \mp i0) \end{pmatrix}_{s=\pm\infty};$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{12}^{\pm} \\ \varphi_{22}^{\pm} \end{pmatrix}(x,y,\lambda,\mu) = \frac{i e^{i\lambda(s+\mu)}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{12}(x,y,\mu,s;\lambda \mp i0) \\ \mathcal{R}_{22}(x,y,\mu,s;\lambda \mp i0) \end{pmatrix}_{s=\pm\infty};\tag{17}$$

де $\mathcal{R}(x,y,\xi,\eta;\lambda \pm i0)$ - ядро граничноі резольвенти оператора (1).

Узагальнені власні функції (17) оператора L є розв'язками задачі розсіяння для системи рівнянь

$$L\varphi = \lambda\varphi. \tag{18}$$

Вони утворюють повну систему узагальнених власних функцій оператора Дірака (теорема 3.1.1). Справедливий спектральний розклад за узагальненими власними функціями і справедлива рівність Парсеваля

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \iiint_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,y,\lambda,\mu)\,\Psi^{*}(\xi,\eta,\lambda,\mu)\,d\mu\, f(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta.$$

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові Л.П.Нижнику за постійну увагу до виконання роботи.

Основні результати дисер[...] опубліковані в таких роботах

1. Амерова Е.И. Разложение по решениям задачи рассеяния для двумерного оператора Дирака // Применение методов функционального анализа в математической физике.- Киев.: Ин-т математики АН УССР, 1989.-С.4-11.
2. Amerova H.I. Scattering Problem for Two-Component Nonstationary Dirac Operator // Methods of functional analysis in problems of mathematical physics. -Kiev: Acad.Sci.Ukraine. Inst. Mathematics, 1992,-p.4 2.
3. Амерова Э.И.,Нижник Л.П. Спектральный анализ двумерного оператора Дирака // Граничные задачи для дифференциальных уравнений.- Киев.: Ин-т математики АН УССР, 1988.-С.4-5.

Підп. до друку 10.05.93. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс.друк. Ум. друк.арк. 0.93. Ум. фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 0,7. Тираж 100 пр. Зам. 188 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ, МСП, вул. Терещенківська, 3