МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

Рябухо Олена Миколаївна

АФІННІ МАЙЖЕКІЛЬЦЯ ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ

01.01.06 - математична логіка, алгебра та теорія чисел

А в т о р е ф е р а т
Дисертації на здобуття вченого ступеню
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993

ота виконана в Київському університеті ім. Тараса Шевченка

кові керівники: доктор фізико-математичних наук,
професор Кириченко Володимир Васильович

кандидат фізико-математичних наук,
доцент Усенко Віталій Михайлович

ційні опоненти: член-кореспондент АН Молдови,
доктор фізико-математичних наук,
професор Рябухін Юрій Михайлович

кандидат фізико-математичних наук,
доцент Сліпенко Анатолій Костянтинович

Провідна установа: Львівський університет ім. І.Я.Франка.

Захист дисертації відбудеться "21" червня 1993 р.
в 14 год. на засіданні Спеціалізованої ради К068.18.11
при Київському університеті ім. Тараса шевченка за адресою:
м. Київ, проспект акад. Глушкова, механіко-математичний
факультет Київського університету

з дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці університету

Автореферат розповсюджено "19" травня 1993 р.

Вчений секретар
Спеціалізованої ради Сушанський В.І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Використання алгебраїчних властивостей дистрибутивних дефектів - один з найбільш адекватних підходів до проблеми класифікації майжекілець. Це один з шляхів, на якому слід сподіватися виникнення нових, суто майжекільцевих, методів класифікації й пов'язаних з ними понять та конструкцій, позаяк поняттю дистрибутивного дефекту нема прямих аналогій в найближчих до теорії майжекілець розділах алгебри - в теорії кілець та в теорії груп, з боку яких теорія майжекілець зазнавала і зазнає найбільшого впливу.

За властивостями дистрибутивного дефекту найбільш просто влаштованими (за виключенням кілець) є майжекільця афінних перетворень лінійного простору. З вивченням цих майжекілець (Блекет) пов'язане виникнення класу абстрактних афінних майжекілець (Гоншор), будову яких свого часу було докладно вивчено (Вольфсон, Дашич, Натарайян, Клей, Хетерлі, Б'юмонт та інші). Однак до останнього часу дуже мало уваги приділялось розширенню цього класу майжекілець за рахунок ускладнення будови дистрибутивного дефекту та послаблення обмежень на адитивну групу майжекільця. Лише за останнє десятиріччя у цьому напрямку отримано результати (Дашич, Земмер, Фейгелсток, Вукович, Кіртадзе Л.В.), що дозволяють говорити про утворення відповідного напрямку в дослідженнях з теорії майжекілець.

За цих передумов пошук та вивчення нових узагальнень поняття афінного майжекільця є однією з актуальних задач теорії майжекілець. Дисертаційну роботу виконано саме в цьому напрямку, а це й зумовлює актуальність її теми.

Мета роботи. Метою роботи є розширення класу афінних майжекілець за рахунок розвитку властивостей дистрибутивного дефекту, а також вивчення властивостей та симетричних зображень майжекілець, що при цьому виникають.

Наукова новизна. В роботі отримано такі нові результати

- визначено три класи майжекілець, що попарно не співпадають, кожен з яких містить клас абстрактних афінних майжекілець; вивчено загальні властивості майжекілець, що при цьому виникають;

- для майжекілець з кожного класу описано їх симетричні зображення.

Результати роботи мають теоретичний характер і їх буде використано в подальших дослідженнях з теорії майжекілець.

Загальна методика дослідження. В роботі застосовано загальноалгебраїчні факторизаційні методи та деякі спеціальні методи, що базуються на редукційних методах теорії майжекілець (Кириченко В.В., Усенко В.М.).

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на Симпозіумі з теорії кілець, алгебр та модулів (Львів, 1990), на Міжнародній конференції пам'яті академіка М.П.Кравчука (Київ, 1992), на Сибірській школі з многовидів алгебраїчних систем (Барнаул, 1988) та на алгебраїчних семінарах Київського університету (1988 - 1993).

Публікації. Результати роботи опубліковано в 5 роботах.

Будова та обсяг роботи. Дисертаційну роботу викладено на 74 стор. машинописного тексту. Робота складається з вступу, дев'яти параграфів та переліку літератури, що містить 48 робіт.

ЗМІСТ РОБОТИ.

Вступ містить деякі загальні мотивування до постанови основних задач роботи, а також стислий огляд результатів, що їх в роботі отримано.

Перші два параграфи роботи мають загальний характ р і містять основні відомості з еорії майжекілець та огляд робіт, в яких йдеться про афінні майжекільця.

Майжекільцем називається а.гебра N з двома бінарними асоціативними операціями $(u;v)\mapsto u*v$, $(u;v)\mapsto uv$, $u,v\in N$ такими, що $A(N)=(N,*)$ – група (адитивна група майжекільця N), а $M(N)=(N,\cdot)$ – напівгрупа (мультиплікативна напівгрупа майжекільця N). При цьому виконується тотожність $t(u*v)=tu*tv$, $t,u,v\in N$. Нейтральний елемент групи $A(N)$ позначатимемо через θ_N, а елемент, протилежний елементу $x\in A(N)$, – через $\overline{x}$. Як і звичайно, $[u;v]=u*v*\overline{u}*\overline{v}$ – комутатор елементів $u,v\in N$, $[G]$ – комутант групи G. Будемо використовувати також позначення i_g, $g\in G$, вважаючи $xi_g=\overline{g}*x*g$ для будь-яких елементів групи G.

Якщо N – майжекільце, то нейтральний елемент напівгрупи $M(N)$ (у разі його існування) позначимо через ε_N.

Ідеалом майжекільця N називається така його нормальна підгрупа $U\trianglelefteq A(N)$, для якої виконуються умови:

$$\forall t\in N\quad tU\subseteq U,$$

$$\forall u\in U\quad \forall x,y\in N\quad \overline{xy}*(x*u)y\in U.$$

Один з найважливіших класів майжекілець утворюють майжекільця перетворень груп. Якщо G - довільна група, $\mathcal{T}(G)$ - напівгрупа перетворень множини G, то поклавши

$$g(\varphi * \psi) = g\psi, \quad g \in G, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{T}(G),$$

отримуємо майжекільце, яке називається повним майжекільцем перетворень групи G, або симетричним майжекільцем на групі G.

Гомоморфізм довільного майжекільця $\mathcal{N}$ в симетричне майжекільце $\mathcal{N}\mathcal{T}(G)$ на деякій групі G називається зображенням майжекільця $\mathcal{N}$ над групою G. Зображення називається точним, якщо воно ін'єктивне. Будь-яке майжекільце володіє точним зображенням над відповідною групою.

Якщо $\mathcal{N}$ - довільне майжекільце, то підмножини

$$\mathcal{U}(\mathcal{N}) = \{t \in \mathcal{N} \mid \theta_{\mathcal{N}} t = \theta_{\mathcal{N}}\},$$

$$C(\mathcal{N}) = \{t \in \mathcal{N} \mid \theta_{\mathcal{N}} t = t\}$$

утворюють в $\mathcal{N}$ підмайжекільця, перше з яких зветься однорідною, а друге - константною частинами майжекільця $\mathcal{N}$. Форму $(u;v)d_t = \overline{ut} * (u*v)t * \overline{vt}$, $u, v, t \in \mathcal{N}$ назвемо дистрибутивним дефектом майжекільця $\mathcal{N}$.

Інший важливий клас майжекілець утворюють майжекільця афінних перетворень лінійних просторів. Абстрактна характеризація цього класу майжекілець призвела до виникнення класу абстрактних афінних майжекілець (Блекет, Гоншор та ін.). Виявилось (Дашич, Натарайян), що майжекільце $\mathcal{N}$ тоді і тільки тоді є абстрактним афінним майжекільцем, коли воно абельове (тобто абельовою є група $A(\mathcal{N})$) і $(u;v)d_t = \overline{\theta_{\mathcal{N}} t}$ при будь-яких $t, u, v \in \mathcal{N}$.

В § 3 - 6 вивчаються деякі властивості симетричних майжекілець, а також визначається і вивчається перше узагальнення поняття афінного майжекільця - майжекільця, названі в роботі афіннотипними.

Майжекільце N назвемо афіннотипним, якщо для всіх $t, u, v \in N$ виконується умова

$$\theta_N t * (u;v)d_t \in K_c(N),$$

де $K_c(N)$ - комутант адитивної групи константної частини $C(N)$ майжекільця N. До класу афіннотипних майжекілець належать усі майжекільця (не обов'язково абельові), що задовольняють тотожності $(u;v)d_t = \overline{\theta_N t}$. Головним результатом цієї частини роботи є описання симетричних зображень майжекілець. Нехай G - довільна група. Покладемо

$$\mathcal{X}(G) = \{\varphi \in N\mathcal{T}(G) \mid \theta_G \varphi = \theta_G;\ \overline{u\varphi} * (u*v)\varphi * \overline{v\varphi} \in [G]\},$$

і для всіх $\varphi \in \mathcal{X}(G)$, $g \in G$ визначимо перетворення $\tau_{\varphi,g}$ групи G за правилом $x\tau_{\varphi,g} = x\varphi * g$. Нехай

$$\mathcal{A}\mathcal{X}(G) = \{\tau_{\varphi,g} \mid \varphi \in \mathcal{X}(G),\ g \in G\}.$$

Доведено, що $\mathcal{A}\mathcal{X}(G)$ - афіннотипне майжекільце. Майжекільце $\mathcal{A}\mathcal{X}(G)$ називатимемо симетричним афіннотипним майжекільцем на групі G.

Будемо говорити, що майжекільце N володіє зображенням в майжекільці $N' \subseteq N\mathcal{T}(G)$, якщо існує симетричне зображення $\rho: N \to N\mathcal{T}(G)$ з $\mathcal{I}m\rho \subseteq N'$. Має місце

ТЕОРЕМА. Будь-яке афіннотипне майжекільце N володіє зображенням в симетричному афіннотипному майжекільці $\mathcal{A}\mathcal{X}(G)$ на адитивній групі $G = A(C(N))$ своєї константної частини.

Характеристикою множини $\mathcal{K}(G)$, за допомогою якої будуються симетричні афіннотипні майжекільця, є

ТЕОРЕМА. $\mathcal{K}(G)$ є підмайжекільцем симетричного майжекільця $\mathcal{N}\mathcal{S}(G)$. Множина

$$\mathcal{K}_0(G)=\{\varphi\in\mathcal{K}(G)\mid G\varphi\subseteq[G]\}$$

є ідеалом майжекільця $\mathcal{K}(G)$. При цьому $\Lambda=\mathcal{K}(G)/\mathcal{K}_0(G)$ - кільце, для якого існує гомоморфізм $\Lambda\to End(G/[G])$ в кільце эндоморфізмів абельової групи $G/[G]$.

У цій частині роботи вивчається також один частинний випадок афіннотипних майжекілець, описуються його симетричні зображення, ідемпотенти та однобічні одиниці.

У другій частині роботи (§ 7 - 9) визначаються та вивчаються ще два узагальнення поняття афінного майжекільця. Ці узагальнення визначаються, виходячи з деяких узагальнень поняття дистрибутивного майжекільця (Кириченко В.В., Усенко В.М.). А саме: нехай $n\geq 2$ - фіксоване натуральне число; майжекільце $\mathcal{N}$ назвемо медіально n-дистрибутивним (або, коротше, M_n-дистрибутивним), якщо

$$(xu_1 * xu_2 * \ldots * xu_n)t = xu_1t * xu_2t * \ldots * xu_nt$$

для всіх $x, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, t\in\mathcal{N}$. Для визначення другого узагальнення дистрибутивності введемо позначення: якщо G - група, $g\in G$, то

$$g\nu_0=\theta_G,\quad g\nu_{k+1}=g\nu_k * g,\quad g\nu_{k-1}=g\nu_k * \overline{g},$$

де k - цілі числа. Майжекільце $\mathcal{N}$ називається D_n-дистрибутивним, якщо $(u\nu_n)t=(ut)\nu_n$ для всіх $u, t\in\mathcal{N}$ (n - фіксоване ціле, $n\notin\{-1, 1, 2\}$).

Відповідно з цими узагальненнями дистрибутивності виникають такі узагальнення афінних майжекілець (в обох випадках вважатимемо, що n - фіксоване натуральне число, $n \geq 2$).

Майжекільце $\mathcal{N}$ назвемо D_n-афінним, якщо

$$(uv_n)t = (ut)v_n * \theta_{\mathcal{N}} t.$$

Адитивна будова D_n-афінних майжекілець з'ясовується за допомогою n-абельових груп (Леві, Калужнін Л.А.) спеціального типу. А саме: n-абельову групу G назвемо майжебернсайдовою показника n, якщо G розкладається в напівпрямий добуток $\mathcal{U} \times_{\alpha} H$ n-абельової групи $\mathcal{U}$ та бернсайдової групи H показника n. Характеризацією майжебернсайдових груп показника n є

ТВЕРДЖЕННЯ. Нехай $G = \mathcal{U} \times_{\alpha} H$ - напівпрямий добуток n-абельової групи $\mathcal{U}$ та бернсайдової групи H показника n. Група G тоді і тільки тоді буде n-абельовою, коли для всіх $u \in \mathcal{U}$, $h \in H$ виконується умова

$$u * u\alpha_h * u\alpha_{hv_2} * \ldots * u\alpha_{hv_{n-1}} = uv_n .$$

Для будь-якого майжекільця $\mathcal{N}$ покладемо $R_0(\mathcal{N}) = \{t \in \mathcal{N} \mid \mathcal{N}t = \theta_{\mathcal{N}}\}$ - R-анулятор майжекільця. R-анулятор будь-якого майжекільця завжди є його ідеалом.

Характеристикою адитивної будови D_n-афінного майжекільця є

ТЕОРЕМА. Якщо $\mathcal{N}$ - D_n-афінне майжекільце, то адитивна група фактормайжекільця $\mathcal{N}/R_0(\mathcal{N})$ є майжебернсайдовою групою показника n.

Для описання симетричних зображень D_n-афінних майжекілець в роботі будуються відповідні майжекільця перетворень. А саме: нехай $G = \mathcal{U} \times_\alpha H$ - майжебернсайдова група показника n, $\mathcal{Z} = \mathcal{U} \nu_n$.

$$\mathcal{E}D_n(G) = \{\varphi \in \mathcal{N}\mathcal{T}(G) \mid \theta_G \varphi = \theta_G,\ \nu_n \varphi = \varphi \nu_n,\ \forall x \in \mathcal{Z},\ \forall h \in H$$

$$(x;h)\varphi = (x;\theta_H)\varphi * (\theta_\mathcal{U};h)\varphi,\ \mathcal{Z}\varphi \subseteq \mathcal{Z},\ H\varphi \subseteq H\},$$

$$\mathcal{A}\mathcal{E}D_n(G) = \{T_{\varphi,g} \mid \varphi \in \mathcal{E}D_n(G),\ g \in H\}.$$

Визначимо дію елементів $T_{\varphi,g}$ з $\mathcal{A}\mathcal{E}D_n(G)$ на G за правилом:

$$x T_{\varphi,g} = x\varphi * (\theta_\mathcal{U}; g), \quad x \in G.$$

На $\mathcal{A}\mathcal{E}D_n(G)$ при цьому у звичайний спосіб визнаються композиція та сума елементів, відносно яких $\mathcal{A}\mathcal{E}D_n(G)$ є D_n-афінним майжекільцем, що ізоморфно занурюється в симетричне майжекільце $\mathcal{N}\mathcal{T}(G)$. Майжекільце $\mathcal{A}\mathcal{E}D_n(G)$ назвемо симетричним D_n-афінним майжекільцем на групі G. Має місце

ТЕОРЕМА. Будь-яке D_n-афінне майжекільце $\mathcal{N}$ володіє зображенням в симетричному D_n-афінному майжекільці на групі $G = A(\mathcal{N}/R_0(\mathcal{N}))$.

Виходячи з поняття M_n-дистрибутивного майжекільця, отримуємо ще одне узагальнення афінних майжекілець. Майжекільце $\mathcal{N}$ назвемо M_n-афінним, якщо

$$(xu_1 * xu_2 * \ldots * xu_n)t = xu_1 t * xu_2 t * \ldots * xu_n t * \theta t.$$

Для характеризації M_n-дистрибутивних майжекілець використовується конструкція напівпрямих добутків майжекілець (Усенко В.М.) у застосуванні до однорідних (тобто таких, що $\mathcal{N}=\mathcal{U}(\mathcal{N})$) та константних ($\mathcal{N}=C(\mathcal{N})$) майжекілець. Нехай $\mathcal{N}$ - довільне однорідне, а K - довільне константне майжекільця, для яких визначено антигомоморфізм

$$\alpha : A(K) \to \mathrm{Aut}\, A(\mathcal{N}) : x \mapsto \alpha_x ,$$

та відображення

$$\lambda : K \to \mathrm{Hom}\,(A(\mathcal{N}), A(K)) : x \mapsto \lambda_x ,$$

$$\partial : \mathcal{N} \to \mathrm{Map}(\mathcal{N}\times K, \mathcal{N}) : t \mapsto \partial_t ,$$

де $\mathrm{Map}(\mathcal{N}\times K, \mathcal{N})$ - група відображень адитивної групи $\mathcal{N}\times K$ в адитивну групу $A(\mathcal{N})$. Вимагатимемо виконання слідуючих умов:

$$(t;c)\partial_{u*v} = (t;c)\partial_u * (t;c)\partial_v\, u\lambda_c , \qquad t,u,v\in\mathcal{N},\ c\in K,$$

$$((u_1;c_1)\partial_{u_2}; u_2\lambda_{c_1} * c_2)\partial_{u_3} = (u_1;c_1)\partial_{(u_2;c_2)\partial_{u_3}} , \quad u_1,u_2,u_3\in\mathcal{N},\ c_1,c_2\in K,$$

$$(u_1;c_1)\partial_{u_3\alpha_{c_2}}\alpha_{u_2\lambda_{c_1}} = (u_1;c_1)\partial_{u_3}\alpha_{u_2\lambda_{c_1} * c_2} , \quad u_1,u_2,u_3\in\mathcal{N},\ c_1,c_2\in K,$$

$$u_1\lambda_{u_2\lambda_{c_1} * c_2} = ((u_2;c_2)\partial_{u_1})\lambda_{c_1} * u_1\lambda_{c_2} , \qquad u_1,u_2\in\mathcal{N},\ c_1,c_2\in K,$$

:

$$c_1 * u\lambda_{c_2} = (u\alpha_{c_1})\lambda_{c_2} * c_1 , \qquad u\in\mathcal{N},\ c_1,c_2\in K.$$

Множина $\mathcal{N}\times K$ при цьому відносно операції

$$(u_1;c_1) * (u_2;c_2) = (u_1 * u_2\alpha_{c_1}; c_1 * c_2),$$

$$(u_1;c_1)(u_2;c_2)=((u_1;c_1)\partial_{u_2};u_2\lambda_{c_1}*c_2),$$

де $u_1,u_2\in N$, $c_1,c_2\in K$, є майжекільцем, яке і називається напівпрямим добутком майжекілець N і K .

Якщо G - адитивна група, то поклавши $xy=y$ отримуємо так зване константне майжекільце (або майжекільце правих нулів) на групі G .

M_2-дистрибутивні майжекільця називаються слабко дистрибутивними.

Будову $M\mathcal{D}_n$-афінних майжекілець характеризує

ТВЕРДЖЕННЯ. Будь-яке M_n-афінне майжекільце є напівпрямим добутком слабко дистрибутивного майжекільця та константного майжекільця на бернсайдовій групі показника n .

РОБОТИ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ.

1. Рябухо Е.Н. О константно определенных почтикольцах// Сибирская школа по многообразиям алгебраических систем. Тезисы сообщ. Ин-т матем. СО АН СССР.- Барнаул, 1988.- С. 62-63.

2. Кириченко В.В., Рябухо Е.Н. Дистрибутивные мультипликаторы почтиколец//VI Симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тез. сообщ. АН УССР, ИППМ и М.- Львов, 1990.- С. 66-67.

3. Рябухо Е.Н. Аффинные расширения почтиколец преобразований// Международная конф. памяти акад. М.Ф.Кравчука. Тез. докл.- ИМ АН Украины.- Киев - Луцк.- 1992.- С. 185.

4. Рябухо Е.Н., Усенко В.М. Об аффиннотипных почтикольцах// Киев. ун-т.- Киев, 1993.- 16 с.- Деп. в УкрИНТЭИ 03.02.93, № 86-Ук93.

5. Рябухо Е.Н. О квазиаффинных почтикольцах // Киев. ун-т.- Киев, 1993.- 17 с.- Деп. в УкрИНТЭИ, 0 3.02.93, № 87-Ук93.

Підп. до друку 5.05.93 . Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум.друк. арк. 0,7 . Ум. фарбо-відб. 0,7 Обл. - вид. арк. 0,6 Тираж 100 пр. Зам. 186 Ціна

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3