Киевский университет им. Тараса Шевченко

На правах рукописи

ПРИКАЗЧИКОВ Виктор Георгиевич

УДК 519.632

МЕТОД СЕТОК В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Киев 1993

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики факультета кибернетики Киевского университета им. Тараса Шевченко.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ГУЛИН А. В.,

доктор физико-математических наук, профессор ЛИТВИНОВ В. Г.,

доктор физико-математических наук, профессор ЛЯШЕНКО И. Н.

Ведущая организация: Институт математического моделирования АН России.

Защита состоится «17» 06 1993 г. в 14 часов на заседании специализированного совета Д 068.18.16 при Киевском университете им. Т. Г. Шевченко по адресу: 252127 Киев 127, проспект Академика Глушкова, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан «1» ——— 19 г.

Ученый секретарь
специализированного совета КУЗЬМИН А. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Спектральные задачи (задачи на собственные значения) возникают во многих научно-технических областях. Например, практические расчеты, связанные с колебанием, резонансом, устойчивостью струн, стержней, мембран, пластин, оболочек требуют знания собственных чисел (С.Ч.) и собственных функций (С.Ф.) самосопряженных эллиптических операторов.

Спектральные задачи по сравнению с обычными краевыми задачами математической физики обладают специфическими особенностями, которые требуют дальнейшего развития теории методов дискретизации и создания новых численных алгоритмов.

Известно, что погрешность дискретного спектрального аналога увеличивается вместе с ростом С.Ч. Поэтому здесь особо необходимы средства повышения точности. К ним относятся:

дискретные схемы высокого порядка точности, в том числе метод конечных элементов;

главная часть погрешности схемы низкой точности, представленная по степеням малого параметра дискретизации;

минимизация функционалов для схем высокой точности на решениях схем низкой точности;

Главный член разложения погрешности С.Ч. по степеням шага разностной сетки представляет интерес по нескольким причинам.

Дает полное представление о погрешности. В частности, позволяет получить точную оценку погрешности и выяснить характер приближенных дискретных С.Ч. к С.Ч. исходной задачи.

Позволяет уточнить С.Ч., вычислить поправку на решении, найденном реализацией схемы низкого порядка точности.

Показывает как возмущать схему низкого порядка точности, чтобы получить схему более высокого порядка точности.

Обосновывает многосеточные методы в спектральных задачах.

Цель работы

Построение и исследование разностных схем высокого порядка точности в спектральных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Построение и исследование разностных аналогов спектральных задач для уравнений в частных производных.

Получение формул для главного слагаемого в разложении погрешности С.Ч. по степеням шага сетки.

Исследование итерационных алгоритмов решения разностных спектральных задач.

Экспериментальная проверка точности дискретных аналогов и итерационных алгоритмов.

Численное решение конкретных задач.

Общая методика

В диссертации используются: теория уравнений математической физики, функциональный анализ, методы вычислительной математики, теория упругости.

Научная новизна

Построены новые дискретные аналоги спектральных задач.

Исследована точность новых сеточных спектральных задач.

Найдены формулы главной части погрешности дискретных С.Ч., представленной по степеням шага квадратной сетки.

Установлена новая оценка сходимости неявного итерационного процесса спуска к минимальному собственному числу.

Проведена экспериментальная проверка точности разностных схем и скорости сходимости итерационных методов.

Решены конкретные спектральные задачи.

Практическая ценность

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы:

при построении методов высокой точности решения спектральных задач для эллиптических операторов;

для решения практических задач колебаний, резонанса, устойчивости объектов различной природы;

в учебном процессе при чтении специальных курсов, для написания курсовых, дипломных и диссертационных работ.

Апробация работы

Результаты работы докладывались и обсуждались на многочисленных научных семинарах и конференциях. В частности,

в проблемном совете по вычислительной математике	(Киевский ун-т),
на каф. вычислительной математики	(Киевский ун-т),
на каф. численных методов в математической физике	(Киевский ун-т),
на каф. вычислительной математики	(Московский ун-т),
на каф. численных методов	(Московский ун-т),
на каф. общей математики	(Московский ун-т),
в отд. численных методов	(Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова),
в отд. численных методов	(ВЦ АН России).

Публикации

По результатам исследований опубликовано более 60 работ.

Структура и объем работы

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 131 наименование; изложена на 138 страницах, из которых 12 страниц занимает список литературы.

Библиографические сведения

Первые работы, в которых рассматривались вопросы точности разностных спектральных задач, относятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с гладкими коэффициентами (Бюкнер Х., 1948, Коллатц Л., 1968, Крылов Н.М., 1961, Курант Р., 1964).

При дискретизации задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-непрерывными коэффициентами были предложены и обоснованы однородные разностные схемы (Тихонов А.Н., Самарский А.А., 1961). Конструкция таких схем едина как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов дифференциального уравнения. Такие схемы использовались в спектральных задачах:

схемы второго порядка точности для обыкновенного дифференциального уравнения с четвертыми производными (Хао-Шоу, 1968);

схемы высокого порядка точности для задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-непрерывными коэффициентами (Приказчиков В.Г., 1969);

схемы высокого порядка точности для задачи Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами (Багмут Г.М., 1969, Гаврилюк И.П., Лужных В.М., Макаров В.Л., 1979);

схемы высокого порядка точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (Макаров В.Л., Макаров И.Л., Приказчиков В.Г., 1979);

в спектральных задачах для уравнений эллиптического типа с частными производными сначала исследовалась сходимость дискретных решений (Ефименко В.А, 1938, Ладыженская О.А., 1953, Люстерник Л.А., 1947).

Затем устанавливалась скорость сходимости (точность) решений различных дискретных аналогов:

для уравнений со вторыми частными производными и достаточно гладкими коэффициентами (Вазов Б., ФорсайтД., 1963, Валицкий Ю.Н., 1971, Вейдингер Л., 1966, Кутлер Г., 1970, Приказчиков В.Г., 1965, Саульев В.К., 1955);

для уравнений второго порядка при обобщенной гладкости С.Ф. в соболевских пространствах и особенностями в коэффициентах уравнения (Войцеховский С.А., Макаров В.Л.,Приказчиков В.Г.,1979, Рыбак Ю.А.,1988, Семчук А.Р.,1985);

для уравнений с четвертыми частными производными и достаточно гладкими исходными данными (Кутлер Г.,1971, Приказчиков В.Г., Химич А.Н.,1979);

для уравнений четвертого порядка при обобщенной гладкости С.Ф. в соболевских пространствах (Приказчиков В.Г., Химич А.Н.);

разностные схемы четвертого и шестого порядков точности в спектральных задачах для уравнения со вторыми частными производными (Алланазаров Ж.П., Приказчиков В.Г.,1990, Сапаговене Д.,1975);

разностные схемы в нелинейных спектральных задачах (Гулин А.В., Ковалев С.И., Крегжде А.В.).

Совсем мало работ, в которых установлена асимптотическая оценка точности, т.е. главный член разложения погрешности С.Ч. относительно шага квадратной сетки (Бюкнер Х.,1948, Вазов В.,1963, Ляшенко И.Н.,1978, Приказчиков В.Г.,1966).

Наконец, укажем дискретные аналоги высокой точности, полученные методом конечных элементов (Варга Р.,1974, Корнеев В.Г., 1977,Попов А.В.,1984, Стренг Г.,1977, Сьярле Ф.,1980, Фикс Д.,1977, Шайдуров В.В.,1989, и др.).

Конструирование вычислительного алгоритма решения эллиптических спектральных задач состоит из трех этапов:

получение дискретного (алгебраического) аналога;

исследование точности дискретной задачи;

решение алгебраической проблемы собственных значений.

При этом часто необходимо найти несколько С.Ч. и соответствующих им С.Ф. Применение для этой цели традиционных методов линейной алгебры (Воеводин В.В.,1977,Икрамов Х.Д.,1991, Парлетт Б.,1983, Уилкинсон Д.,1970, В.Н. и Д.К. Фадеевы,1960) требует значительного объема вычислений ввиду плохой разделенности С.Ч.

Отметим некоторые экономичные алгоритмы решения алгебраических спектральных аналогов с матрицами высокой размерности.

Построение вспомогательных алгебраических задач с размерностью блоков исходной матрицы (Абрамов А.А.,1967).

Нахождение корней характеристического многочлена заменяется поиском решения систем трансцендентных уравнений. Это осуществляется дискретным алгоритмом разделения области. (Бублик Б.Н.,1976, Ляшенко И.Н.,1978, Положий Г.Н.,1962).

Формирование трехчленной рекуррентной последовательности векторов, в базисе которых исходная матрица приобретает трехдиагональный вид.

Для нахождения нескольких С.Ч. и С.Ф. наиболее эффективны модифицированные градиентные итерационные алгоритмы с использованием спектрально эквивалентных операторов в сочетании с многосеточными методами. Эти алгоритмы являются соответствующими аналогами итерационных методов для решения операторных уравнений (Годунов С.К.,1970, Дьяконов Е.Г.,1989, Жук П.Ф.,1982, Канторович Л.В.,1984, Князев А.В.,1986, Красносельский М.А.,1969, Кузнецов Ю.А.,1984, Лебедев В.И.,1977, ПриказчиковВ.Г.,1980, Самокиш Б.А.,1958, и др.).

Приведем ряд обозначений, используемых в работе:

R_N - евклидово пространство размерности N;

$x=(x_1,\dots,x_N)$ - точка R_N;

Ω - ограниченная область в R_N;

Γ - граница Ω, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$;

$Q(\Omega)$ - класс кусочно-непрерывных в Ω функций;

$C^{(1)}(\Omega)$ - класс функций, непрерывных в Ω вместе с производными до порядка 1 включительно.

$C^{(1,\alpha)}(\Omega)$ - класс непрерывных в Ω функций, для которых производные 1-го порядка в Ω удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha (0<\alpha<1)$;

$\Gamma \in C^{(1,\alpha)}$ - означает, что функция, задающая уравнение граничной кривой Γ в местных координатах, принадлежит пространству $C^{(1,\alpha)}$, $0<\alpha<1$;

$L_2(\Omega)$ - гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом;

$W_2^{(1)}(\Omega)$ - гильбертово пространство функций, которые вместе с обобщенными производными до порядка 1 включительно принадлежат пространству $L_2(\Omega)$;

ω - сеточная область;

γ - граница ω;

h - шаг квадратной сетки;

$\mathbb{H}$ - гильбертово пространство сеточных функций y;

$\|\cdot\|$ - норма в $\mathbb{H}$;

y_x, $y_{\bar{x}}$, $y_{\overset{\circ}{x}}$ - соответственно правая, левая, центральная разностные производные сеточной функции;

$\|y\|_c = \max\limits_{\omega} |y(x)|$ - норма сеточной функции в равномерной метрике;

$(u_s;\lambda_s)$ - собственная функция номера s и соответствующее собственное число исходной задачи;

$(y_s;\lambda_s^h)$ - собственная функция номера s и соответствующее собственное число дискретной задачи;

$(v_k;\mu_k)$ - итерационное приближение номера k соответственно к С.Ф. y С.З. λ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 предложены точная разностная схема и схемы высокого порядка точности для задачи

$$(pu')' - qu + \lambda ru = 0, \quad 0<x<1 , \tag{1}$$

$$pu' - \sigma u + \lambda \varkappa u = 0, \quad x = 0, \quad u(1)=0, \quad s\geq 0, \quad \varkappa\geq 0 , \tag{2}$$

$$0 < c_1 \leq p \leq c_2, \quad 0 \leq q \leq c_3, \quad 0 < c_4 \leq r \leq c_5 , \qquad p(x), \; q(x), \; r(x) \in Q[0,1] . \tag{3}$$

Все разностные схемы записываются в виде

$$(av_{\bar{x}})_x - dv + \lambda^h \rho v = 0, \quad i = 1,\ldots,N-1 , \qquad av_x - \sigma^x v + \lambda^h \varkappa^h v = 0, \quad i=0, \quad v=0, \quad i=N . \tag{4}$$

<u>**Определение.**</u> Однородная консервативная трехточечная разностная схема (4), коэффициенты a, d, ρ, σ^h, $\varkappa^h$ которой являются функционалами коэффициентов p, q, r исходной задачи и искомого параметра λ, называется точной схемой относительно решения $(u_*;\lambda_*)$ исходной задачи (1)-(3), если оно является некоторым решением $(v;\lambda^h)$ сеточной задачи, т. е. $u^{(*)}(x_i) = v_i$, $\lambda_* = \lambda^h$.

Коэффициенты точной схемы представляются с помощью рядов по степеням h^2. Например,

$$a_i = \alpha_i^{(0)}[p] + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i^{(j)}[p, q-\lambda r] h^{2j} ,$$

$$a_i = \frac{\beta_i^{(0)}[p,q] + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_i^{(j)}[p, q-\lambda r] h^{2j}}{\gamma_i^{(0)}[p] + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_i^{(j)}[p, q-\lambda r] h^{2j}} ,$$

где α, β, γ - нелинейные функционалы. Если в формулах для коэффициентов a, d, ρ, σ^h, $\varkappa^h$ вместо рядов использовать полиномы степени m относительно h^2, то получим усеченную схему m-го ранга. Так как коэффициенты усеченных схем, за исключением схемы нулевого ранга, зависят от искомого параметра λ, то для реализации схем предлагается следующий алгоритм.

Сначала решается разностная задача нулевого ранга. Полученное собственное число $\lambda^{(0)}$ используется при вычислении коэффициентов схемы первого ранга (четвертого порядка точности). После решения линейной задачи первого ранга определяется $\lambda^{(1)}$, которое используется при вычислении коэффициентов схемы второго ранга (шестого порядка точности) и т. д. Таким образом реализуется последовательность трехточечных линеаризованных разностных схем любого порядка точности.

Устанавливается существование точной схемы и исследуется точность усеченных схем, которые реализуются по приведенному выше алгоритму. Основные результаты формулируются в виде следующих теорем.

Теорема 1. Пусть задано любое натуральное число $s_0 > 0$, тогда при достаточно малом шаге сетки $h \le h_0$ для задачи (1)-(3) существует точная схема относительно $(u^{(s)};\lambda_s)$ при $s = 1,2,\ldots,s_0$.

Здесь величина h_0 зависит от s_0 и от постоянных c_j в (3).

Теорема 2. Пусть $p(x),\ q(x),\ r(x) \in Q[0,1]$. Тогда точность усеченных схем m-го ранга характеризуется оценками

$$|\lambda_s - \lambda_s^{(m)}| \le M_1(s)h^{2m+2} \qquad \|u^{(s)} - y_s^{(m)}\|_c \le M_2(s)h^{2m+2},$$

где $(v^{(m,s)};\lambda_s^{(m)})$ - решение номера s разностной схемы m-го ранга.

Без дополнительных требований на гладкость коэффициентов p, q, r получен главный член разложения по степеням h^2 погрешности собственных чисел разностных схем m-го ранга. Он имеет вид

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_s^{(m)}-\lambda_s}{h^{2m+2}}=\frac{1}{(2m+3)!}\int_0^1\left[p_m b_s^{m+1}(u_s')^2+\frac{m+1}{m+2}\,p^{m+1}b_s^{m+2}u_s^2\right]dx,$$

$$b_s=q-\lambda_s r$$

В главе II исследуется точность самосопряженных разностных задач, построенных интегро интерполяционным методом для двухмерных эллиптических операторов второго и четвертого порядков с переменными коэффициентами.

В 2.1 исследуется разностная задача

$$\frac{1}{H}\left[h_1^+y_{x_1}-h_1^-y_{\bar{x}_1}+h_2^+y_{x_2}-h_2^-y_{\bar{x}_2}\right]-\frac{\Delta s}{\Delta n}\,y+\lambda^h y=0,\ x\in\omega, \qquad (5)$$

$$y=0,\ x\in\gamma$$

которая является дискретным аналогом задачи

$$\begin{aligned}&\Delta u+\lambda u=0,\ x\in\Omega,\\&u=0,\ x\in\gamma\,.\end{aligned}\qquad (6)$$

Здесь ω, γ - множества соответственно внутренних и граничных узлов сетки; h^+, h^-, H, Δs, Δn - оператор Лапласа. Точность устанавливает

<u>Теорема 3.</u> Если граница $\Gamma\subset C^{(3,\infty)}$, то справедливы оценки

$$|\lambda_s^h - \lambda_s| = O(h^2), \qquad \|y_s - u_s\|_c = O(h^2),$$

где (λ_s^h, y_s) и (λ_s, u_s) - собственные решения соответственно задач (5) и (6); s - фиксированный номер некратного решения.

В 2.2 задача со смешанными краевыми условиями

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[p_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right] + \lambda u = 0, \; x \in \Omega = \left\{ 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \; \alpha=1,2\right\},$$

$$u = 0, \; x \in \Gamma_1 = \left\{x_1 = 0, \; x_2 \in [0,1]\right\} \cup \left\{x_1 \in [0, l_1], \; x_2 = 0]\right\},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cos(n, x_\alpha) = 0, \tag{7}$$

$$x \in \Gamma_2 = \left\{x_1 = l_1, \; x_2 \in (0, l_2)\right\} \cup \left\{x_1 \in [0, l_1], \; x_2 = l_2]\right\}$$

аппроксимируется на сетке $\omega \in \gamma$ дискретным аналогом

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \lambda^h y = 0, \; x \in \omega,$$

$$y = 0, \; x \in \gamma_1, \; a_\alpha(x_1, x_2) = p_\alpha(x_\alpha - 0.5h, \; x_{3-\alpha}),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ \left[a_\alpha y_{\bar{x}}\right]_{x_\alpha} \cos(n, x_\beta)_{\beta\ne\alpha} - \frac{2}{h} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} \cos(n, x_\alpha)\right\} + \lambda^h y = 0, \; x \in \gamma_2, \tag{8}$$

$$-\frac{2}{h}\sum_{\alpha=1}^{2} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} + \lambda^h y = 0, \; x_1 = l_1, \; x_2 = l_2.$$

Точность устанавливает

<u>Теорема 4</u>. Если выполнены условия

$$0 < p_1(x), \quad p_2(x) \in C^{(2,\alpha)}(\bar{\Omega}), \tag{9}$$
$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x_\alpha} \cos(n, x_\alpha) = 0, \; x \in \Gamma_2,$$

то справедливы оценки

$$|\lambda_s^h - \lambda_s| = O(h^2), \quad \|y_s - u_s\|_C = O(h^2 \sqrt{\ln \tfrac{1}{h}}\;),$$

где (λ_s, u_s) и (λ_s^h, y_s) - собственные решения соответственно задач (7) и (8); s - фиксированный номер некратного решения.

В 2.3 для задач (7) и (8) с краевыми условиями Дирихле получена формула главного члена представления погрешности С.Ч. по степеням шага квадратной сетки, т. е. доказана

<u>Теорема 5</u>. Если выполнены условия (9), то справедлива асимптотическая оценка

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda_s - \lambda_s^h}{h^2} = \frac{1}{12} \int \sum_{\alpha=1}^{2} \left[p_\alpha (L_\alpha u_s)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_\alpha}{\partial x^2} \left(\frac{1}{p_\alpha} \frac{\partial u_s}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right] dx, \tag{10}$$

где $L_\alpha u = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[p_\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right]$, s - фиксированный номер некратного решения.

Из (10) следует, что при достаточно малом шаге h и выпуклости вверх коэффициентов $p_\alpha(x)$ С.Ч. дискретной задачи приближаются снизу к С.Ч. исходной задачи. А если коэффициенты

разностной схемы вычислять по формуле

$$\tilde{a}_\alpha(x_1,x_2) = \int\limits_{x_\alpha - h}^{x_\alpha} p_\alpha(t, x_{3-\alpha})dt, \quad \alpha = 1,2,$$

то

$$\lim \frac{\lambda_s - \lambda_s^h}{h^2} = \frac{1}{12} \int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} p_\alpha (L_\alpha u_s)^2 dx \ ,$$

в этом случае $\lambda_s^h < \lambda_s$ без требований на выпуклость $p_\alpha(x)$.

В 2.4 получены двухсторонние оценки С.Ч. разностной задачи на неравномерной сетке в p-мерном параллелепипеде:
$\Omega = \left\{ 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, p \right\}$,

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} - dy + \lambda^h p y = 0, \ x \in \omega,$$

$$y = 0, \ x \in \gamma,$$

$$0 < c_1 \le a_\alpha \le c_2, \quad 0 \le d \le c_3, \ 0 < c_5 \le p \le c_4 \ .$$

Оценка имеет вид

$$\delta_0 \frac{c_1}{c_4} \lambda_k^* \le \lambda_k^h \le \delta_1 \frac{c_2}{c_5} \lambda_k^* + c_3 \ ,$$

где

$$\delta_0 = \min_\alpha \left\{ (h_\alpha^*)^2 \frac{\min\limits_i T_i}{\max\limits_j R_j} \right\}, \quad \delta_1 = \max_\alpha \left\{ (h_\alpha^*)^2 \frac{\max\limits_i T_i}{\min\limits_j R_j} \right\},$$

$$T_i = \prod_{\substack{\beta=1 \\ \alpha\ne\beta}}^{p} h_\beta^{(i)} \Big/ h_\alpha^{(i)}, \quad R_j = \prod_{\beta=1}^{p} h_\beta^{(j)} .$$

$h_\alpha^{(i)}$, $h_\alpha^{(i)}$ - шаги неравномерной сетки; h_α^* = шаг эквивалентной равномерной сетки в направлении оси Ox_α;

$$\lambda_k^* = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{2}{h_\alpha^*} \sin \frac{\pi k_\alpha h_\alpha^*}{2l_\alpha} .$$

В 2.5 представлен результат исследования точности дискретного аналога задачи:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial M_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} = \lambda u, \quad x \in \Omega,$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(u, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(u, x_2) = 0, \tag{II}$$

$$x \in \Gamma$$

где

$$\Omega = \left\{ 0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1, 2 \right\},$$

$$M_1 = p_1 \omega_1 + p_0 \omega_2, \quad M_2 = p_0 \omega_1 + p_2 \omega_2, \quad M_3 = p_3 \omega_3,$$

$$\omega_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad \omega_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad \omega_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} .$$

Переменные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$0 < c_1 \le p_s \le c_2, \quad s = 1, 2, 3,$$

$$0 < c_0 \le p_0^2 - p_1 p_2, \quad \forall x \in \Omega, \quad p_s \in C^2(\bar{\Omega}), \quad s = 0, 1, 2, 3 .$$

Разностный аналог (11) имеет вид:

$$(m_1)_{\bar{x}_1 x_1} + 2(m_3)_{x_1 x_2} + (m_2)_{\bar{x}_2 x_2} = \lambda^h y,\ x \in \Omega,$$

$$y = y_{\overset{\circ}{x}_1} \cos(n, x_1) + y_{\overset{\circ}{x}_2} \cos(n, x_2) = 0,\ x \in \gamma, \tag{12}$$

$$m_1(y) = a_1 y_{\bar{x}_1 x_1} + a_0 y_{\bar{x}_2 x_2}, \qquad m_2(y) = a_0 y_{\bar{x}_1 x_1} + a_2 y_{\bar{x}_2 x_2},$$

$$m_3(y) = a_3 y_{\bar{x}_1 \bar{x}}.$$

Разностные аналоги коэффициентов вычисляются по формулам:

$$a_s = p_s(x_1, x_2),\quad s = 0, 1, 2,\quad a_3 = p_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2),$$

$$\tilde{x}_\alpha = x_\alpha - 0{,}5h,\ \alpha = 1, 2,\ (x_1, x_2) \in \omega.$$

Теорема 6. Погрешность С.Ч. аналога (12) на квадратной сетке с шагом h характеризуется асимптотической формулой

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda_s - \lambda_s^h}{h^2} = \frac{1}{6} \int\limits_\Omega \left\{ p_1 \left[\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right]^2 + (p_3 - p_0)\left[\left[\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right]^2 + \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right]^2\right] + \right.$$

$$+ p_2 \left[\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right]^2 + 2p_0 \left[\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{\partial w_3}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right] - \Delta p_0 w_1 w_2 - \frac{1}{2}\Delta p_3 w_3^2 +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 p_0}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2}\right] w_1^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 p_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_2^2}\right] w_2^2 \right\} dx,$$

В частности, для бигармонического оператора ($p_0 = \sigma$, $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = 1 - \sigma$) формула имеет вид

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_s-\lambda_s^h}{h^2}=\frac{1}{6}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}\right)^2\right]dx\,.$$

<u>Теорема 7</u>. При достаточно малом шаге квадратной сетки точность дискретного аналога характеризуется оценками

$$\lambda_s-\lambda_s^h\le M_1(\lambda_s^h)h^2,$$

$$\|y_s-u_s\|_c\le M_2(\lambda_s^h)h^2,$$

где (λ_s,u_s) и (λ_s^h,y_s) - собственные решения соответственно задач (11),(12); s - фиксированный номер некратного решения; M_1, M_2 - постоянные, независящие от h.

В 2.6. предложен дискретный аналог для задач (11) без использования законтурных узлов при аппроксимации естественных краевых условий:

$$M_1=\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+2\frac{\partial M_3}{\partial x_2}=0,\quad x_1=0,\ x_2\in(0,l_2),$$

$$M_2=\frac{\partial M_2}{\partial x_2}+2\frac{\partial M_3}{\partial x_1}=0,\quad x_2=0,\ x_1\in(0,l_1),\tag{14}$$

$$M_3=0,\quad x_1=l_1,\ x_2=l_2.$$

Выпишем характерные разностные уравнения. Например, для предграничных узлов $x_1=l_1-h_1$, $x_2\in(0,l_2)$:

$$\frac{1}{h_1^2}\left[m_1^{(-1_1)}-2m_1\right]+2(m_3)_{x_1x_2}+(m_2)_{\bar{x}_2x_2}=\lambda^h y\,;$$

для граничных узлов $x_1 \in (0, l_1)$, $x_2 = 0$:

$$\left[b_1 y_{\bar{x}_1 x_1}\right]_{\bar{x}_1 x_1} + \frac{1}{h_2}(m_3^+)_{\bar{x}_1} + \frac{2}{h_2^2} m_2^{(+1_2)} = \lambda^h y \; ; \qquad (15)$$

для правого верхнего узла прямоугольника $x_1 = l_1$, $x_2 = l_2$:

$$\frac{2}{h_1^2}\left[b_1 y_{\bar{x}_1 x_1}\right]^{(-1_1)} + \frac{2}{h_1 h_2} m_3^- + \frac{2}{h_2^2}\left[b_2 y_{\bar{x}_2 x_2}\right]^{(-1_2)} = \lambda^h y \; .$$

Здесь

$$m_3^- = p_3(x_1 - 0{,}5h_1,\ x_2 - 0{,}5h_2) y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \; ;$$

$$m_3^+ = p_3(x_1 + 0{,}5h_1,\ x_2 + 0{,}5h_2) y_{x_1 x_2} \; ;$$

$$b_1 = p_1\left[1 - \frac{p_0^2}{p_1 p_2}\right], \quad b_2 = p_2\left[1 - \frac{p_0^2}{p_1 p_2}\right] .$$

В 2.7. предлагается метод уточнения С.Ч. спектральной задачи

$$\left[Lu, v\right] = \lambda\left[Mu, v\right], \qquad \forall\, v \in H , \qquad (16)$$

где H - гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$; L и M - самосопряженные эллиптические операторы.

Пусть известны дискретные аналоги (16):

$$A_0 y = \mu B_0 y , \qquad (17)$$

$$Ay = \mu By \qquad (18)$$

различной точности, т. е.

$$\lambda_s - \mu_s^\circ = O(h^\alpha), \quad (A_0 Z_s^\circ, Z_s^\circ) = O(h^{2\alpha}),$$
$$\lambda_s - \mu_s = O(h^\beta), \quad (A Z_s, Z_s) = O(h^{2\beta}). \tag{19}$$

Здесь A_0, A, B_0, B - положительно определенные операторы в евклидовом пространстве E со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и размерностью N, которая определяется малым параметром дискретизации h, $Z_s^\circ = y_s^\circ - Pu_s$, $Z_s = y_s - Pu_s$, P - проектор, действующий из H в E, (λ_s, u_s), (μ_s°, y_s°), (μ_s, y_s) - собственные решения номера s соответственно задач (16), (17), (18).

Теорема 8. Если выполняются оценки (19), то справедлива оценка

$$\lambda_s - \frac{(Ay_s^\circ,\ y_s^\circ)}{(By_s^\circ,\ y_s)} = O(h^\gamma),$$

где

$$\gamma = \min(\beta, 2\alpha).$$

В главе III рассмотрены итерационные методы, используемые при решении спектральной задачи

$$Ay = \lambda By,$$

где A и B - самосопряженные положительно определенные операторы в евклидовом пространстве E с размерностью N и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

Пусть $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p < \lambda_{p+1} < \ldots \le \lambda N$ - С.Ч.

Все одношаговые итерационные схемы записываются в виде

$$C\,\frac{\tilde{v}_{k+1} - v_k}{\tau_{k+1}} + Av_k - \mu_k Bv_k = 0, \quad v_0 \in E, \tag{20}$$

$$v_{k+1} = \tilde{v}_{k+1}(B\tilde{v}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1})^{-0,5}, \quad \mu_k = (Av_k, v_k),$$

где C - самосопряженный положительно определенный оператор, удовлетворяющий условию $\gamma_2(Cv,v) \ge (Av,v) \ge \gamma_1(Cv,v)$, $\gamma_1>0$. Для разности соседних приближений к С.Ч. λ_1 в методах (20) получена формула

$$\mu_k - \mu_{k+1} = \tau_{k+1}(2 - \theta\tau_{k+1}) \frac{(Cw,w)}{(B\tilde{v}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1})},$$

где

$$w = C^{-1}(Av_k - \mu_k Bv_k), \qquad \theta = (Aw_k - \mu_k Bw_k, w_k)(Cw_k, w_k)^{-1},$$

<u>Теорема 9</u>. Неявный метод скорейшего спуска сходится в достаточно малой окрестности С.Ч. λ_1 так, что при условии $\lambda_1 < \mu_k < \lambda_{p+1}$ выполняется неравенство

$$\mu_{k+1} - \lambda_1 \le \rho(\mu_k)(\mu_k - \lambda_1)$$

с коэффициентом сжатия

$$\rho(\mu_k) = \left[1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(1 - \frac{\mu_k}{\lambda_{p+1}})\right]\left[1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\frac{\mu_k}{\lambda_1} - 1)(1 - \frac{\mu_k}{\lambda_{p+1}})\right]^{-1}.$$

В конце главы даны практические рекомендации.

В главе 4 приводятся результаты расчетов собственных значений эллиптических операторов, которые возникают при изучении процессов колебания и статической устойчивости.

В 4.1. даны некоторые постановки спектральных задач для нахождения частот и форм колебания пластин и оболочек.

В 4.2. проверяется точность интегро интерполяционной разностной схемы в задаче колебания консольной пластины.

В 4.3. проверяется эффективность попеременно треугольного итерационного метода по сравнению с явным методом скорейшего спуска при вычислении частот колебания консольной пластины.

В 4.4. даны некоторые постановки спектральных задач нахождения критических усилий и форм потери устойчивости для пластин и оболочек.

В 4.5. приведены результаты счета критического усилия в задаче устойчивости прямоугольной пластины с постоянными жесткостями при комбинированном и неравномерном нагружении.

В 4.6. приведены результаты счета критического усилия в задаче устойчивости цилиндрической оболочки постоянной жесткости при равномерном одностороннем сжатии.

В 4.7. проверяется эффективность схем высокого порядка точности при решении задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-постоянным коэффициентом.

<u>В диссертации получены следующие основные результаты</u>:

Построены и исследованы точная схема и схемы высокого порядка точности в классе кусочно-непрерывных коэффициентов для задачи Штурма-Лиувилля с искомым параметром в краевых условиях.

Предложен и обоснован метод линеаризации схем высокой точности.

Исследована точность самосопряженных разностных схем в спектральных задачах для уравнений эллиптического типа второго и четвертого порядков с переменными коэффициентами.

Получены формулы главных частей представления погрешности собственных чисел по степеням шага квадратной сетки для дискретных аналогов спектральных задач с эллиптическими операторами второго и четвертого порядков.

Установлена строгая оценка коэффициента сжатия на шаге неявного метода скорейшего спуска к минимальному собственному значению.

Проведена экспериментальная проверка разностных схем и итерационных методов.

Даны практические рекомендации по использованию итерационных методов спуска к собственному числу.

Решены конкретные практические задачи колебания и устойчивости пластин и оболочек.

Все теоретические результаты, представленные в диссертации, получены лично соискателем и опубликованы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Приказчиков В.Г. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора // ЖВМ и МФ. - 1965 . - 5, №4. - - С. 648 - 657.

2. Приказчиков В.Г. Однородные разностные схемы четвертого порядка точности для задачи Штурма-Лиувилля // Вычисл. методы и программирование. - 1965. - №3. - С. 232 - 236.

3. Приказчиков В.Г. Асимптотика собственных значений для схем высокого порядка точности в классе кусочно-непрерывных коэффициентов // ЖВМ и МФ. - 1966. - 6, №5. - С. 927 - 930.

4. Приказчиков В.Г. Об оценках собственных чисел разностного эллиптического оператора на неразномерной сетке // Основные и типовые программы для вычислительных машин и систем. - Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1968. - С. 44 - 53.

5. Приказчиков В.Г. Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма-Лиувилля // ЖВМ и МФ. - 1969. - 9, №2. - С. 315 - 335.

6. Приказчиков В.Г. Схемы высокого порядка точности для задачи Штурма-Лиувилля с параметром в краевых условиях // Мат.обеспечение ЭК ВМ. - Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1970. - - С. 26- 45.

7. Приказчиков В.Г. Оценки собственных чисел разностной задачи для ортотропной пластины, жестко защемленной по сторонам // Прикладная механика. - 1973. - 9, №3. - С. 90 - 95.

8. Приказчиков В.Г. Интегро-интерполяционный метод построения уравнений в задаче колебаний прямоугольной ортотропной пластины // Уч. зап. ЦАГИ. - 1973. - 4, № 4. - С. 73 - 76.

9. Приказчиков В.Г., Зубатенко В.С. О колебании ортотропной пластины переменной толщины // Прикладная механика - 1974. - 10, № 9. - С. 121 - 125.

10. Приказчиков В.Г., Гаращук И.Н. Определение критических усилий в неравномерно загруженной пластине // Численные методы механики сплошной среды. - 1974. - 5, №3. - С. 133 - 139.

11. Приказчиков В.Г. Строгие оценки скорости сходимости итерационного метода вычисления собственных значений // ЖВМ и МФ. - - 1975. - 15, №5. - С. 1330 - 1334.

12. Приказчиков В.Г. Оценка точности метода сеток в задаче на собственные значения для эллиптического оператора четвертого порядка // Там же. - 1977. - 17, №6. - С. 1432 - 1442.

13. Приказчиков В.Г. О модифицированном методе наискорейшего спуска для вычисления собственных значений // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. - - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. - С. 213 - 215.

14. Приказчиков В.Г. Консервативная разностная схема для задачи на собственные значения в области с гладкой границей // Дифференциальные уравнения. - 1980. - 16, №7. - С. 1303 - 1307.

15. Приказчиков В.Г. Прототипы итерационных процессов в задаче на собственные значения // Там же. - 16, №9. - С. 1688 - 1697.

16. Приказчиков В.Г. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора второго порядка со смешанными краевыми условиями // ЖВМ и МФ. - 1982. - 22, №3. - С. 655 - - 662.

17. Приказчиков В.Г., Химич А.Н. Итерационный метод решения задач устойчивости и колебания пластин и оболочек // Прикладная механика. - 1984. - 20, №1. - С. 88 - 94.

18. Приказчиков В.Г. Собственные значения дифференциальных операторов. Численные методы решения // Мат. энциклопедия. - 1985.- - Вып. 5. - С. 546 - 547.

19. Приказчиков В.Г., Семчук А.Р. Точность разностной схемы в спектральной задаче с обобщенными решениями // Дифференциальные уравнения. - 1985. - 21, №7. - С.1246 - 1252.

20. Приказчиков В.Г., Химич А.Н. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора четвертого порядка со смешанными краевыми условиями // ЖВМ и МФ. - 1985.- 25, №10. - С. 1486 - 1495.

21. Приказчиков В.Г. Скорейший спуск в спектральной задаче // Дифференциальные уравнения. - 1986. - 22, №7. - С.1268- - 1271.

22. Приказчиков В.Г. Экономичное повышение точности в дискретных спектральных задачах // Докл. АН Украины. Сер. А.-1986. - - №9. - С. 74 - 75.

23. Приказчиков В.Г., Алланазаров Ж.П. Экономичное повышение точности вычисления собственных значений // Дифференциальные уравнения. - 1989. - 25, № 10. - С. 1821 - 1823.

24. Приказчиков В.Г., Алланазаров Ж.П. Схема четвертого порядка точности в спектральной задаче с переменными коэффициентами // Там же. - 1990. - 26, №12. - С. 2153 - 2156.

25. Приказчиков В.Г., Клунник А.А.. Проекционный метод повышения точности для дифференциального уравнения четвертого порядка //Вычисл. и прикладная математика. - 1990. - №72. - С. 27 - - 33.

26. Приказчиков В.Г. Асимптотическая оценка точности дискретной спектральной задачи для уравнения четвертого порядка // ЖВМ и МФ. - 1991. - 31, № 3. - С. 372 - 380.

27. Приказчиков В.Г. Асимптотическая оценка точности дискретной спектральной задачи для уравнения второго порядка // Там же. - 31, №4. - С. 618 - 622.

28. Приказчиков В.Г. Главный член разложения погрешности собственных значений дискретного аналога эллиптического оператора четвертого порядка //Там же. - С. 1016 - 1025.

29. Приказчиков В.Г. Главный член разложения погрешности собственных значений дискретного аналога эллиптического оператора второго порядка // Там же. - № 10. - С. 1671 - 1676.

Подп. в печ. 05.05.93. Формат 60×84/16. Бум. кн.-журн. Офс. печ. Усл. печ. л. 1,39. Усл. кр.-отт. 1,62. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 100 экз. Заказ 817.

Редакционно-издательский отдел с полиграфическим участком
Института кибернетики имени В. М. Глушкова АН Украины
252207 Киев 207, проспект Академика Глушкова, 40