Академия наук Украины
Институт прикладной математики и механики

На правах рукописи

Гладкова Ирина Владимировна

УПРАВЛЯЕМОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ И ФАЗОВЫЙ ВЕКТОР С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

01.02.01 - "Теоретическая механика"

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Донецк 1993

Работа выполнена в Институте прикладной математики и механики АН Украины.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А.М.Ковалев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор А.А.Илюхин

Кандидат физико-математических наук,
доцент В.И.Коваль

Ведущая организация: Киевский политехнический институт

Защита состоится "16" июня 1993 г. в 15 час. на заседании специализированного совета К.016.46.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Институте прикладной математики и механики АН Украины по адресу: 340114, г.Донецк-114 ул. Р.Люксембург, 74

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института прикладной математики и механики АН Украины

Автореферат разослан "4" мая 1993 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физико-математических наук Д.И.Марковский

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Управляемые механические системы являются одним из основных классов моделей, описывающих реальные технические системы. Развитие космонавтики, авиации, машиностроения, робототехники приводит к постоянному расширению круга теоретических и практических задач. Отдельные задачи вследствие своей сложности переросли в самостоятельные разделы теорий. Одной из таких задач является задача управляемости, то есть решение вопроса о возможности перевода управляемой системы из одного фазового состояния в другое. Решение этой задачи для линейных управляемых систем принадлежит Р.Е.Калману. Первые результаты для линейных систем были получены Н.Н.Красовским. В настоящее время имеются значительные достижения в изучении отдельных видов управляемости для различных классов систем. Р.Габасов и Ф.М.Кириллова разработали методы, основанные на линеаризации систем. А.М.Ковалев распространил на исследование управляемости метод инвариантных соотношений. В.И.Коробовым задача управляемости была сведена к определенной граничной задаче и на основе понятия функции управляемости решена решена задача синтеза. Много работ посвящено исследованию вопросов, связанных с возможностью декомпозиции систем, с приведением их к тому или иному каноническому виду, по которому можно судить об их управляемости. Сюда относятся результаты В.И.Елкина, Ю.И.Павловского, Р.Су. Значительные результаты были получены М.И.Байтманом, Р.У.Брокеттом, Р.А.Винтером, А.А.Давыдовым, С.В.Емельяновым, В.И.Зубовым, А.И.Кухтенко, К.Лобри, В.Н.Семеновым, И.И.Петровым, В.В.Удиловым, Х.Хермесом, Р.М.Хирсчорном и другими.

Другой важной задачей теории управления является задача построения достижимого за фиксированное время множества. Исследованием областей достижимости для линейных систем при функциональных ограничениях на управления занимались Б.И.Бублик, Н.Ф.Кириченко, Н.Н.Красовский, А.М.Формальский и другие. Для нелинейных систем при геометрических ограничениях на управления А.И.Папасюк и В.И.Папасюк вывели уравнение в частных производных для субопорной функции области достижимости при совместных ограничениях на управления и начальные состояния.

Последние несколько десятилетий большое развитие получили задачи управления вращательным движением твердого тела, чему в значительной мере способствоавло интенсивное освоение космического пространства. В качестве управляющих устройств в задачах управления космическими летательными аппаратами наибольшее распространени: получили реактивные двигатели, маховики и двустепенные гироскопы - гиродины. Возникающие в процессе исследования задачи по своей сути относятся к классу задач управления по части переменных, что наряду с нелинейностью является источни..ом дополнительных трудностей и требует развития новых и совершенствования уже известных методов.

Проблема управления вращательным движением твердого тела подробно изучена в школе В.И.Зубова, где решены различные задачи управления с помощью реактивных двигателей, маховиков и гироскопов, отражаемые в монографиях В.И.Зубова, Е.Я.Смирнова. Широкий круг вопросов управления ориентацией космических аппаратов рассмотрен в книгах В.В.Кременгуло, П.Д.Крутько, Б.В.Раушенбаха.

Цель работы - решение задачи построения областей достижимости линейных управляемых систем с интегральными ограничениями на ресурсы

- получение условий управляемости системы с одним управляющим воздействием при ограничениях на фазовый вектор;
- исследование управляемости системы дифференциальных уравнений, описывающих движение твердого тела при помощи одного двустепенного гироскопа - гиродина.

Методы исследования. Исследования, проводимые в диссертационной работе, основаны на методах выпуклого и функционального анализа, аналитической механики и теории управления.

Научная новизна. В работе исследована структура достижимых множеств линейных управляемых систем с выпуклыми ограничениями на ресурсы. Предл..жен способ приближенного построения области достижимости. В случае интегральных ограничений на управления указанный алгоритм позволяет осуществить точное построение достижимых множеств. Рассматривается приложение к задачам механики. Доказывается теорема об управляемости произвольной n-мерной линейной системы с одним управляющим воздействием в односвязной области. Рассмотрена задача управления вращательным движением твердого тела при помощи одного гиродина. Доказано выполнение необходимых условий управляемости по отношению к угловой скорости тела-носителя при любом расположении в нем гиродина.

Практическая ценность. Полученные в работе результаты могут быть использованы при разработке систем управления современными техническими обьектами, включая искусственные спутники, космические летательные аппараты, роботы-манипуляторы и др.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были доложены на Республиканской конференции "Динамика твердого тела и устойчивость движения" (Донецк, 1990 г.), на семинарах отдела прикладной механики Института прикладной математики и механики АН Украины.

Структура диссертации. Работа состоит из четырех глав, заключения, списка литературы из 63 наименований и содержит 104 страницы машинописного текста, 24 рисунка.

Содержание диссертации

Первая глава является вводной. В ней рассмотрены актуальность тематики, дан краткий обзор работ по теории управляемости , приведены основные положения диссертации.

Во второй главе исследуются области достижимости систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad (1)$$

где x - n-мерный фазовый вектор, u - m-мерный вектор управления, $A(t)$ и $B(t)$ - непрерывные матрицы соответствующих размерностей, $t\in[t_0,T]$ Здесь предполагается, что ограничения на ресурсы выделяют в пространстве управлений Λ выпуклое множество $\Omega \subseteq \Lambda$ допустимых управлений. Считаем, что $\Omega = \{ u(t) : \|u\|_\Lambda \leq 1 \}$. При заданном управлении $u(t)$ и начальном условии x_0 решения системы (1) даются формулой Коши:

$$x(t) = H(t, t_0, x_0, u) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Psi(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (2)$$

где $\Psi(t,\tau) = \Phi(t,\tau)B(\tau)$, $\Phi(t,\tau) = \Theta(t)\Theta^{-1}(\tau)$, $\Theta(t)$ - фундаментальная матрица однородной системы (1). Область достижимости системы (1) за время $t \in [t_0, T]$ есть множество $Q(t_0, T) = \{x \in R^n : \exists u \in \Omega, x = H\}$, а множество допустимых траекторий - множество $C = \{x(t) \in C^n[t_0, T] : x(t) = H(t, t_0, x_0, u, u \in \Omega\}$. После перехода от непрерывной задачи к дискретной, в качестве области управления получаем выпуклый многогранник $\hat{\Omega}$ в пространстве R^{Nn}, а множество допустимых траекторий $\hat{C}$ - это образ многогранника $\hat{\Omega}$ при линейном преобразовании $X = \varepsilon \cdot H \cdot U$, где $X = (x_1^T(t_1), \ldots, x_n^T(t_1), \ldots, x_1^T(t_N), \ldots, x_n^T(t_N))^T$, $U = (u_1^T(t_1), \ldots, u_1^T(t_N), \ldots, u_m^T(t_N))^T$, а H - блочная нижне-треугольная матрица, составленная из блоков $\Psi(t_i, t_j)$. В свою очередь, область достижимости является проекцией выпуклого многогранника $\hat{C}$ на подпространство переменных $x_i(t_N)$. На основе такого перехода от непрерывной задачи к дискретной получена формула для приближенного вычисления области достижимости (лемма 2.1, теорема 2.1):

$$\hat{Q}(t_0, t_N) = \{x(t_N) : f(\tfrac{1}{\varepsilon} G^{-1}(E - \Theta(\varepsilon)F)X) \le 1\} \text{ где}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1}(t_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C^{-1}(t_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & C^{-1}(t_N) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\Theta(\varepsilon) = \theta(\varepsilon) \cdot E$, E - единичная $nN \times nN$ матрица, а система (1) приведена к виду

$$\dot{x} = A(t)x + C(t)u, \tag{3}$$

где $C(t)$ - невырожденная $n \times n$ матрица.

Аналогичные рассуждения позволяют свести двухточечную задачу, то есть задачу построения управления и траектории при заданных начальных и конечных состояниях системы, к задаче линейного программирования.

В случае, когда

$$\|u\|_\Lambda = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{m} |u_i(\tau)| \, d\tau \tag{4}$$

указанный алгоритм позволяет осуществить точное построение области достижимости. Доказана следующая теорема:

Теорема 1. Областью достижимости системы (1) с ограничениями на управления (4) является выпуклая оболочка точек вида $x = \pm \Psi^{\ell}(t,\tau)$, где Ψ^{ℓ} - ℓ-тый столбец матрицы $\Psi(t,\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Рассмотрены плоские линейные автономные управляемые системы с нулевыми начальными условиями. Для них выводятся формулы, определяющие границу области достижимости. Исследована ассимптотика при неограниченном возрастании времени. Рассмотрены характерные примеры эволюции областей достижимости. Получены формулы управления и проанализирован характер траектории.

В случае, когда $\|u\|_{\Lambda} = (\int\limits_{t_0}^{t} \sum\limits_{i=1}^{m} u_i^2(\tau)\,d\tau)^{1/2}$ областью достижимости системы (1) является эллипсоид $(Y^{-1}(t)x, x) \leq 1$, где $Y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(t,\tau)\,\Psi^{T}(t,\tau)\,d\tau$. Получены уравнения границы области достижимости в случае плоских линейных автономных систем, исследована ассимптоика эллипсоидов при неограниченном возрастании времени и проведен сравнительный анализ с результатами, полученными для ограничений на управления по норме (4).

В третьей главе рассматривается вопрос об управляемости системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{5}$$

в области, то есть при ограничениях на фазовый вектор. В пунктах 3.2 и 3.3 рассмотрены соответственно плоский и трехмерный случай. Проведен анализ поля скоростей, доказано вспомогательное утверждение для плоского случая:

Утверждение 1. Пусть дана система $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$ и область H с границей $\gamma(x_1, x_2) = 0$, где γ - непрерывная замкнутая кривая без самопересечений и пусть :

1) $\forall x_1 \in I$ $\exists$ единственное решение $x_2 = f(x_1)$ системы $\gamma(x_1, x_2) = 0,\ x_2 > 0$;

2) $\forall x_1 \in I$ $\exists$ единственное решение $x_2 = g(x_1)$ системы $\gamma(x_1, x_2) = 0,\ x_2 < 0$;

3) $\gamma(x_1, 0) \neq 0$ $\forall x_1 \in$ внутренности I, где I - проекция области H на ось ox_1.

Тогда система (5) управляема в области H.

Сформулировано и доказано аналогичное утверждение для

трехмерного случая: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = u$.
В рассмотренных примерах, кроме проверки условий управляемости согласно доказанным утверждениям, показаны различные способы нахождения траектории, лежащей в области и удовлетворяющей граничным условиям.

В пункте 3.4 рассматривается вопрос управляемости системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \ldots, \dot{x}_n = u \tag{6}$$

в области H с границей $\gamma(x_1,..,x_n)=0$. Доказывается теорема

Теорема 2. Пусть

1) $\gamma = 0$ - непрерывная замкнутая поверхность без самопересечений;

2) $\forall j = \overline{1,n-1}$, $\forall (x_1,..,x_j) \in I_j$ $\exists$единственное решение $x_{j+1} = \operatorname{sign} x_{j+1} \cdot F_{j+1}(x_1,..,x_j)$ уравнения $F_{j+2} = 0$, где $F_{n+1} = \gamma$, I_j есть проекция области H на плоскость $0x_1 \ldots x_j$;

3) $F_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \neq 0$ $\forall (x_1,..,x_{n-1})$, принадлежащих внутренности I_{n-1}.

Тогда система (6) управляема в области H.

В общем случае, чтобы воспользоваться доказанной теоремой нужно привести систему (5) к виду (6) с помощью преобразования $x = UPy$, где $U = (b \mid Ab \mid A^2 b \mid \ldots \mid A^{n-1} b)$- матрица управляемости, P -верхне-треугольная матрица с коэффициентами, однозначно определяемыми из разложения $A^n = -p_1 A^{n-1} - \ldots - p_n E$.

В доказательстве теоремы 3.1 и при выборе траекторий, лежащих в области, в рассмотренных примерах пункта 3.3 возникал вопрос о нахождении кривой, лежащей на границе области и удовлетворяющей данной системе. Поэтому естественным образом возник вопрос о нахождении соответствующего управления, чему посвящен пункт 3.6.

Рассматривается приложение к задачам механики. Исследован вопрос управляемости систем, описывающих движение тела переменной массы и угловое движение твердого тела с различными ограничениями на фазовые переменные.

<u>Четвертая глава</u> посвящена одному из наиболее эффективных способов управления вращательным движением твердого тела - при помощи двустепенного гироскопа - гиродина. В отличие от маховиков, влияние которых на суммарный кинетический момент осуществляется за счет их ускорения или торможения, изменения

суммарного кинетического момента при использовании гиродинов происходит в основном за счет поворотов оси вращения ротора при поворотах гирокамеры в подвесе. Управлениями при этом являются проекции прикладываемых к рамке гироскопа моментов сил на соответствующие оси вращения. Уравнения движения

$$J(\ddot{q} + l_0^T \dot{\omega}) - h(k_0 \cos q - n_0 \sin q)^T \omega + p = u \tag{7}$$

$$(\theta\omega)^{\cdot} + \omega \times \theta\omega + l_0 J \ddot{q} + (k_0 \cos q - n_0 \sin q) h \dot{q} + $$
$$+ \omega \times [\, l_0 J \dot{q} + (k_0 \sin q + n_0 \cos q)\, h \,] = 0 \tag{8}$$

где ω - угловая скорость тела-носителя, h - кинетический момент ротора, θ - тензор инерции, имеют пятый порядок и являются достаточно громоздкими. Вместо угловой скорости гирокамеры введена новая переменная λ, равная абсолютному кинетическому моменту гирокамеры относительно ее центра масс, а тройка k_0, l_0, n_0 взаимно ортогональных ортов, задающих начальное расположение гиродина в теле-носителе, выбрана специальным образом, что позволило упростить уравнения движения. В линейном приближении вследствие такого упрощения матрица при фазовом векторе имеет блочную структуру

$$A = \begin{pmatrix} -h\alpha_3 & 0 & (2\alpha_1 - \alpha_3)h & -h\alpha_1 J^{-1} & 0 \\ -h\alpha_5 & 0 & (2\alpha_2 - \alpha_5)h & -h\alpha_2 J^{-1} & 0 \\ -h\alpha_6 & 0 & (2\alpha_3 - \alpha_6)h & -h\alpha_3 J^{-1} & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & J^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

где α_i - коэффициенты матрицы $(\theta - l_0 l_0^T)^{-1}$, что позволило вычислить коэффициенты матрицы управляемости рекурентно и найти ранг. (В качестве невозмущенного движения выбрано положение равновесия тела-носителя и гирокамеры). На основе теоремы об управляемости по части переменных в линейном приближении получено, что система является неуправляемой как по угловой скорости тела-носителя и гирокамеры, так и по угловой скорости тела-носителя. Для исследования управляемости исходной нелинейной системы применяются теоремы, полученные на основе метода ориентированных многообразий. Доказано выполнение необходимых условий управляемости по отношению к угловой скорости тела-носителя при любом расположении в нем гиродина.

В заключении дана сводка основных результатов диссертации:
- получен метод приближенного построения областей достижимости линейных систем с ограничениями на управление типа нормы (для различных норм);
- описаны области достижимости линейных систем при интегральном ограничении на управление;
- доказана теорема об управляемости линейной системы в области и описаны способы нахождения решения двухточечных задач с ограничениями на фазовый вектор;
- в задаче об управлении вращательным движением твердого тела при помощи одного гиродина доказано выполнение необходимых условий управляемости по отношению к угловой скорости тела-носителя при любом расположении в нем гиродина.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1.Гладкова И.В. Области достижимости линейных систем с интегральными ограничениями на ресурсы // Мех.твердого тела.- 1992 г.- N 24. - с.103-110.

2.Гладкова И.В. Применение построения областей достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями на ресурсы к решению задач синтеза // Динамика твердого тела и устойчивость движения: Тез.докл.Республиканской конференции (Донецк, 4-6 сентября 1990 г.).- Донецк: Ин-т прикл.математики и механики АН УССР, 1990.- с.36.

3.Гладкова И.В. Управляемость линейной системы в области // Исследование прецессионных и управляемых движений твердого тела: Препринт N 08, Донецк, Ин-т прикл. математики и механики АН Украины.-1992.- с.18-34.

4.Гладкова И.В., Ковалев А.М. Управление угловым движением твердого тела при помощи гиродина // Мех.твердого тела.- 1994 г.- N 26 (в печати).

Глад

Подписано впечать 23.04.93.
Формат 60х84/16. Бумага типогр. Офсетная печать.
Усл.п.л. 0,75. Заказ 1072. 100экз. Бесплатно.
Р-т ИЭП АН Украины. 340048, г.Донецк ул,Университетская,77.