

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени институт  
инженеров железнодорожного транспорта им. М.И. Калинина

на правах рукописи

624.21

Солдатов Ким Иванович

УДК 624.21.042.8.624.04

РЕГУЛЯРНЫЕ УПРУГИЕ МОДЕЛИ  
В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ  
МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Диссертация на соискание ученой  
степени доктора технических наук  
в форме научного доклада

Специальность:

05.23.15 - Мосты и транспортные  
тоннели

Днепропетровск 1993 г.

Работа выполнена в Днепропетровском ордена Трудового  
Красного Знамени институте инженеров железнодорожного  
транспорта им.М.И.Калинина

Научный консультант: доктор технических наук, профессор,  
академик АН Украины Бондарь Н.Г.

Официальные оппоненты: доктор технических наук,  
профессор Козьмин Ю.Г.  
доктор технических наук,  
профессор Колесник И.А.  
доктор технических наук,  
профессор Прусаков А.П.

Ведущее предприятие: "УкрНИИПроектстальконструкция", г.Киев.

Защита состоится "24" мая 1993 г. в 14 час. 00 мин.  
на заседании Специализированного Совета Д.ИІ4.07.02 Днепропетровского  
ордена Трудового Красного Знамени института инженеров железнодорожного  
транспорта им.М.И.Калинина по адресу:  
320010, г.Днепропетровск, ул.Академика Лазаряна, 2.

Научный доклад разослан "21" апреля 1993 года.

Ученый секретарь Специализированного  
Совета Д.ИІ4.07.02

к.т.н., доцент *ВМ* Татарчук В.В.

ЛНБ ім. В. Стефаника  
АН України

ЛНБ України ім.В.Стефаника



00815157 (R)

## Введение

- I. Общая характеристика научной работы.
  - 1.1. Актуальность разрабатываемой проблемы.
  - 1.2. Цель и задачи научного исследования.
  - 1.3. Научная новизна.
  - 1.4. Достоверность приводимых результатов.
  - 1.5. Апробация работ.
  - 1.6. Внедрение результатов.
  - 1.7. Публикации по теме диссертации.
2. Собственные колебания регулярных упругих систем.
  - 2.1. Краткий исторический комментарий.
  - 2.2. Постановка задачи и вывод уравнения для "модульного" стержня.
  - 2.3. Анализ уравнений, вычислительный эксперимент.
  - 2.4. "Критическая" жесткость упругих опор.
  - 2.5. Уравнения форм колебаний.
  - 2.6. Анализ влияния различных факторов на собственную частоту.
  - 2.7. Сложные модели-структуры "модульного" стержня.
3. Устойчивость упругих систем /статическая/.
  - 3.1. Уравнение устойчивости регулярного "модульного" стержня.
  - 3.2. Устойчивость слоистых систем, перекрестных балок.
  - 3.3. "Критическая" жесткость упругих опор при потере устойчивости.
  - 3.4. Решение практических задач устойчивости.
4. Регулярные модели в расчетах собственных вертикальных колебаний мостов.
  - 4.1. Экспериментальные исследования свободных колебаний мостов.
  - 4.2. Определение собственных колебаний мостовых конструкций.
    - 4.2.1. Балки проезжей части железнодорожных мостов.
    - 4.2.2. Вантовые системы.
    - 4.2.3. Висячие мосты различных систем.
    - 4.2.4. Фермы железнодорожных мостов.
5. Регулярные модели в расчетах пространственных колебаний мостов.
  - 5.1. Высокие балочные виадуки.
  - 5.2. Высокие арочные виадуки.
  - 5.3. Временные мосты.
6. Экспериментальное изучение взаимодействия железнодорожных мостов с подвижным составом.
  - 6.1. Методика экспериментальных исследований.
  - 6.2. Объекты экспериментов.
  - 6.3. Результаты экспериментальных исследований.  
Выводы.  
Список публикаций.

## Введение

Задачи динамики и устойчивости стержневых систем, в том числе и регулярных, не перестают быть актуальными при проектировании сложных мостовых и строительных конструкций. Необходимость иметь простой аппарат, позволяющий выполнять динамический расчет указанных конструкций с высокой степенью достоверности получаемых результатов, всегда была и будет актуальнейшей задачей в этом плане. Содержащиеся в предлагаемом научном докладе результаты экспериментально-теоретических исследований в приложении к задачам динамики и устойчивости мостовых конструкций выполнены автором по плану научно-исследовательских работ Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта лично и в соавторстве в период с 1967 по 1992 год, в том числе и с аспирантами по плану научного консультирования диссертационных работ.

I. Общая характеристика научной работы.

I. I. Актуальность разрабатываемой проблемы.

Актуальность определения собственных частот регулярных систем базируется прежде всего на том неоспоримом факте, что в практике проектирования и строительства мостовых и строительных конструкций регулярность/периодичность повторения отдельных элементов/ в большинстве случаев является общепризнанным положительным явлением, позволяющим на этой основе применять высокотехнологичные способы изготовления, сооружения и монтажа. Применение же регулярности в расчетных схемах при статическом и динамическом расчетах подобных систем приводит в общем случае к значительно более простым решениям, менее трудоемким расчетам и более осозаемым результатам.

Наряду с имеющимися многочисленными решениями и методами расчета, в том числе и точными, имеется тем не менее очень мало решений вплотную приближенных к практике, позволяющих быстро и просто определять для конструкций данного типа собственную частоту, критическую силу при расчетах на устойчивость, форму колебаний или форму потери устойчивости, сохраняя при этом высокую степень достоверности получаемых результатов. Доведение решений до простого пользования на предельных этапах проектирования мостовых конструкций графиками, номограммами лучшим образом свидетельствует в пользу актуальности, поскольку предлагаемые сложные решения зачастую отпугивают даже опытных проектировщиков, а в худшем случае приводят к неверным результатам, влияющим на качество запроектированной конструкции.

Практически все предлагаемые нами решения прошли всестороннюю

проверку с постановкой экспериментов на многочисленных натуральных объектах при непосредственном участии автора. Если учесть, что эксперименты в большинстве случаев проводились по заказам МПС и крупных организаций Министерства Путей Сообщения и Министерства транспортного строительства и являлись очень дорогостоящими, то этот факт также как нельзя лучше свидетельствует в пользу актуальности. Наконец, еще одним важным фактором в пользу актуальности несомненно служит то обстоятельство, что в последнем СНиП 2.05.03-84 "Мосты и трубы" введены пункты, ограничивающие периоды собственных горизонтальных и вертикальных колебаний мостов при эксплуатации и монтаже. Учитывая, что период колебаний будущей конструкции закладывает проектировщик, без сомнений, хотя бы на этапе предварительных расчетов, он нуждается в простой и надежной методике его определения. Такая простая методика и предлагается параллельно с методикой требующей применения вычислительной техники.

## 1.2. Цель и задачи научного исследования.

Если учесть, что задача об установившихся и переходных режимах вынужденных колебаний механических систем в целом и мостовых конструкций в частности может быть решена по уже разработанным алгоритмам, если получено решение для собственных частот и форм колебаний, то решение задач на собственные значения для линейно упругих систем, являющихся моделями мостовых конструкций, представляет непосредственный теоретический и практический интерес.

Указанные разработки выполнялись применительно к реальным мостовым и строительным конструкциям. В подавляющем большинстве случаев и для большинства расчетных схем теоретические разработки подкреплены экспериментальными данными, полученными при проведении испытаний на многочисленных натуральных объектах мостов различных систем.

Разработка простого способа или метода на основе точного решения имеет особенно важное практическое значение на этапе проектирования, т.е. в момент, когда закладывается динамическое содержание будущего сооружения.

Предлагаемые научные разработки являются обобщением выполненных автором в период с 1967 по 1992 год экспериментально-теоретических исследований в области расчета собственных частот и устойчивости регулярных систем применительно к мостовым конструкциям. Работа в этом плане носит законченное научное исследование, позволяющее, используя простые формулы, графики и номограммы определять собственные частоты и формы колебаний, критическую силу при потере устойчи-

ности широкого класса практических задач. При этом в предлагаемых разработках при выводе уравнения для "модульного" стержня учтены дополнительные факторы/инерция вращения, сдвиги, продольные силы, дополнительные сосредоточенные включения в местах упругих опор/, а сами опоры могут иметь любую по величине жесткость.

Наряду с решением указанной основной задачи, дать проектировщику и исследователю простой надежный аппарат, автором получены решения для широкого класса расчетных моделей, позволивших в свою очередь решить ряд задач, имеющих важное теоретическое и практическое значение не только в мостостроении. Предлагаемые простые решения, графики, номограммы в сочетании с детально разработанным механизмом их использования в практике проектирования мостов/так называемый "обратный ход"/ позволяют проектировать мостовые конструкции, защищенные динамически.

### 1.3. Научная новизна.

В работах, обобщенных в научном докладе, содержатся теоретические и практические научные результаты в том числе и полученные впервые. Из новых результатов прежде всего необходимо отметить само исходное уравнение собственных колебаний регулярной многопролетной "модульной" балки с упругими промежуточными опорами с учетом инерции вращения, сдвиговых деформаций, продольных сил и дополнительных сосредоточенных масс в местах упругих опор. Новизна уравнения в том, что оно имеет конечный вид аналогичный виду уравнения для двухпролетной неразрезной балки. Аналогичное простое решение получено и для задачи об устойчивости "модульной" многопролетной регулярной балки на упругих промежуточных опорах. Распространение полученных исходных решений на системы, состоящие из "модулей"/перекрестные балки, слоистые системы/ и, наконец, указанных решений на практические задачи мостостроения, позволило в свою очередь получить ряд новых результатов. Из них можно отметить следующие решения для отдельных задач и проблем:

- об устойчивости сжатого пояса открытого моста/ известная задача Ф.С. Ясинского/;
- об определении устойчивого коэффициента отпорности/задача И.Г. Вубнова/;
- о минимальной жесткости упругих опор до потери устойчивости многопролетным стержнем;
- о границах "критической" жесткости упругих опор при свободных колебаниях и потере устойчивости;
- о колебаниях и устойчивости слоистых систем, перекрестных балок, балок на сплошном упругом основании и др.;

- о величине коэффициента в формуле модуля упругого основания при моделировании висячего моста балкой на сплошном упругом основании/проблема,разрабатывающаяся в свое время американскими учеными во главе с С.П.Тимошенко,А.Пагсли и по которой в 1953 году был создан специальный конгресс/.

Предложен ряд расчетных схем/моделей/ для решения практических задач мостостроения, корректность которых на первый взгляд не бесспорна, однако которая подтверждена многочисленными экспериментальными проверками и расчетами по другим методикам и расчетным схемам. К таким моделям можно отнести:

- представление многопролетной регулярной балкой на упругих опорах вантовых мостов, висячих, балок проезжей части железнодорожных мостов, пролетов с вертикально-подъемной проезжей частью, высоких виадуков/горизонтальные колебания/, системы гибкая арка с балкой жесткости, монорельсовых дорог и др;
- представление системой перекрестных балок проезжей части железнодорожных мостов;
- применение расчетной модели в виде трехслойной и пятислойной балки к фермам железнодорожных мостов, балкам проезжей части, системе гибкая арка с балкой жесткости, сталежелезобетонным пролетным строениям и др.

Разработаны графики и номограммы для определения собственных частот колебаний многопролетной регулярной балки на упругих опорах, на жестких опорах, для определения частот висячих мостов, для определения параметров форм колебаний и др.

Введена пятиступенчатая классификация податливости опор при динамических расчетах и др.

#### 1.4. Достоверность приводимых результатов.

Все полученные результаты теоретических исследований базируются на так называемом точном методе записи уравнений колебаний и устойчивости. При вводе исходных уравнений, а затем и при их преобразовании и упрощении, не вводилось никаких допущений, а, следовательно, на этом этапе достоверность полученных решений можно считать высокой. Приближенность расчетных схем, а также обоснование необходимости учета того или иного фактора во всех случаях тщательно исследовалось численным экспериментом с точки зрения допускаемой при этом погрешности. Во всех исследованиях за критерий взята погрешность не более 5%.

Применение теоретических разработок к решению широкого класса

практических задач строительной механики и мостостроения во всех случаях сравнивалось с расчетами другими способами или методами, а в подавляющем большинстве случаев с многочисленными экспериментальными данными, полученными при натуральных испытаниях реальных мостов с участием автора и лишь в отдельных случаях данные заимствовались из советской и зарубежной научной литературы. Эксперименты проводились силами отраслевой научно-исследовательской лаборатории динамики мостов ДИИТа. В работе использованы результаты более чем 60 крупных экспериментов на мостах сети железных и автомобильных дорог.

#### 1.5. Апробация работы.

Все без исключения разделы диссертационной работы в разное время докладывались на постоянно действующем семинаре при кафедре "Мосты" Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта им. М.И.Калинина, которым руководит академик АН Украины Бондарь Н.Г. В объеме, представленном в данном научном докладе, диссертация доложена на семинарах при кафедрах "Мосты" и "Строительная механика" ДИИТа, в головном институте проектирования мостов "УкрНИИПроект-стальконструкция" г.Киев, на кафедре "Строительная механика" ДИИТИ.

Отдельные разделы в свое время опробированы при защите кандидатских диссертаций /В.Г.Галушко, В.П.Кисляк, А.С.Роспопов/, по которым автор являлся научным консультантом.

#### 1.6. Внедрение результатов.

Результаты исследований применены к расчету широкого класса практических задач мостостроения: балки проезжей части железнодорожных мостов, висячие и вантовые мосты, высокие виадуки, временные мосты, фермы железнодорожных мостов и др. и нашли отражение в многочисленных публикациях автора и научно-технических отчетах по тематике УПС "Исследование работы балок проезжей части железнодорожных мостов", "Экспериментально-теоретическое исследование статической и динамической работы мостов", "Взаимодействие тяжелой подвижной нагрузки и пролетных строений мостов при высоких скоростях движения и на грузонапряженных линиях" и др. Предлагаемые решения, графики, номограммы нашли применение в проектной практике и исследованиях организаций Министерства Путей Сообщения, Министерства транспортного строительства, Министерства черной и металлургической промышленности.

#### 1.7. Публикации по теме диссертации.

Основное содержание научного доклада в области динамики и ус-

тойчивости балок, слоистых систем, мостовых конструкций, а также экспериментальных исследований отражено в 48 опубликованных статьях и более чем в 50 -ти научно-технических отчетах по тематике исследования статической и динамической работы мостов различных систем, выполненных по заказам МПС и Минтрансстроя. Указанные материалы опубликованы во всеююзных, республиканских и межвузовских изданиях. Совместные публикации как правило с аспирантами. Список научных работ/статей/ приведен в конце научного доклада.

## 2. Собственные колебания регулярных упругих систем.

### 2.1. Краткий исторический комментарий.

В практике проектирования и строительства мостовых и строительных конструкций широко распространены неразрезные балочные конструкции, висячие и вантовые системы, многослойные покрытия и др., расчетными схемами которых с той или иной степенью реального приближения могут служить регулярные многопролетные балки на жестких или упругих промежуточных опорах /рассматриваемые в данной работе как "модуль" более сложных моделей: слоистых балочных систем, плит, пластин, перекрестных балок и др./ . На практике стремление к регулярности продиктовано высокой технологичностью возведения подобных конструкций. И, если статический расчет указанных конструкций разработан довольно хорошо, то динамический расчет сводится в большинстве случаев к значительному упрощению расчетных схем, ограничению, в целях опять же упрощения расчетов, до минимума количества пролетов в расчетной схеме, игнорированию влиянием таких важных в большинстве случаев факторов как инерция вращения, деформации сдвига, продольные силы и др. Если к тому же учесть, что влияние указанных факторов численным экспериментом подробно не исследовано, то достоверность результатов расчета по таким приближенным расчетным схемам с отказом от учета большинства указанных факторов не может дать в подавляющем большинстве случаев гарантированного достоверного результата.

Именно по этой причине, приступая к исследованию динамики реальных мостовых конструкций, автор уже на начальном этапе исследования исключил одно из важных звеньев, ведущих к погрешности, применив для решения поставленной задачи один из так называемых точных методов. Получив точное решение, а затем оценив путем анализа и численным экспериментом количественно погрешность, которую дает неучет того или иного фактора и приближенность расчетных схем, задача может быть решена практически с любой степенью точности, а главное, с высокой

степень достоверности результатов. Задача ставится таким образом, чтобы на всех промежуточных этапах расчета была точно известна степень погрешности за счет тех или иных допущений. В обширной литературе по данному вопросу имеется большое число работ в том числе и с применением точных методов. Работы Н.И. Безухова, А.А. Белоуса, А.Ф. Смирнова, В.Г. Чудновского, А.П. Филиппова, С.И. Конашенко, А.Г. Барченкова, С.З. Динкевича, Г.Н. Эйхе, Е. Хобста, Я. Горского, Р.Г. Джекота, Дж. Д. Гибсона, М.Г. Фолкнера, Н. Ватанабе и др. вполне могли бы подойти для решения поставленной задачи. Однако в большинстве работ указанных авторов как правило отсутствует детальный анализ решений, игнорируется влияние различных факторов. Проведение указанного анализа по приближенным решениям в большинстве случаев нецелесообразно. Из работ, где применен заслуживающий внимания метод нельзя не отметить работы Н.П. Абовского /метод фокусных коэффициентов/, С.А. Бернштейна и К.К. Керопяна /метод спектральной функции/, Ю.Г. Козьмина /энергетический метод применительно к упруго опертым балкам/, Б.Н. Кутукова и В.Л. Цивильского /метод перемещений, в котором динамическая задача сводится к статической/, С.В. Тургуновой /метод цепных дробей/, В. Пано /временно измененный релаксационный метод/, Л.Н. Андреева /метод динамических жесткостей и податливостей/, Н.С. Кондратова и И.Ю. Короля и др. /метод прогонки/, Э. Хобста /метод продолжения/, Р. Шулера /метод балочных сопряжений/, Л.Я. Банаха /теория групп/ и др. Из зарубежных исследователей, кроме названных, необходимо отметить В. Колоушека, И. Лина, Ж. Шейлса, Ж. Сидаровского, Л. Фрыбу и др.

Из всего многообразия методов автор остановился на методе деформаций. Как известно, идея использования метода деформаций в динамике принадлежит проф. Н.И. Безухову и разрабатывалась затем многими авторами: А.Ф. Смирновым /применительно к различным конструкциям/, А.А. Белоус /применительно к рамам/, А.А. Уманским /для расчета наплавных мостов/, В. Колоушеком /в самой общей постановке применительно к мостовым и строительным конструкциям/ и др.

Изучение ударных явлений не позволило исследователям обойтись без учета таких факторов как инерция вращения, деформации сдвига. Об этом свидетельствует большое число работ в этом направлении С.П. Тимошенко, И.М. Рабиновича, Е.П. Кудрявцева, В.С. Телегиной, В.А. Цивильского, В.И. Шарфутдинова, Т. Янга, Ж. Сидаровского и др.

Тем не менее при выводе уравнений частот и форм собственных колебаний большинство авторов обычно предполагают, что прогиб стер-

жней возникает только под воздействием нормальных напряжений, пренебрегая поперечными перемещениями/сдвигами/, инерцией вращения и продольными силами. Такие допущения в большинстве случаев ведут к завышению частот основного тона не говоря уже о высших частотах.

## 2.2. Постановка задачи и вывод уравнения для "модульного" стержня.

Учитывая все оговоренные доводы, приступая к решению задачи в самой общей постановке, в качестве исходной расчетной схемы/модели/ нами принята регулярная неразрезная балка/стержень/ с неограниченным числом пролетов и упругих промежуточных опор, постоянного на всем протяжении сечения, сжатая/или растянутая/ продольной силой, шарнирно опертая по концам, с учетом инерции вращения, деформаций сдвига. Для вывода исходного уравнения для такого "модульного" стержня применен метод деформаций и разработки проф. В. Колоушека/ЧССР/, в частности использование его идеи приведения уравнений метода деформаций к циклически симметричным, что позволяет получить решения с помощью конечных тригонометрических рядов и сумм для концевых сил и моментов и как итог для записи уравнения для указанной расчетной схемы "модульного" стержня. Расчетная схема приведена на рис. I.

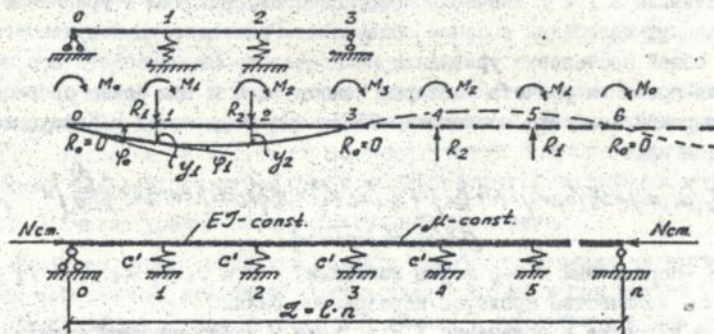


Рис. I

Грузовыми членами уравнений деформаций являются моменты и вертикальные силы. Записывая уравнения деформаций для трехпролетной неразрезной балки и дополняя затем ее зеркальным изображением, предполагаем, что вся эта система периодически повторяется/ рис. I, а / . Разлагая нагрузку и деформации на конечные тригонометрические ряды, в итоге приходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} a_i^{1,1} \cdot \varphi_i + c_i^{1,2} \cdot y_i = M_i \\ c_i^{1,2} \cdot \varphi_i + a_i^{1,2} \cdot y_i = K_i. \end{cases} \quad / 1 /$$

При установившихся вынужденных колебаниях метод деформаций приводит к тем же уравнениям, что и при статическом расчете с той лишь разницей, что неизвестными в уравнениях деформаций являются амплитуды гармонически переменных деформаций, а не статические, а сами коэффициенты уравнений являются функциями частот. Учитывая, что собственные колебания имеют место в том случае, если детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных уравнения / 1 /, для некоторых  $i$  равен нулю, т. е.

$$a_i^{1,1} \cdot a_i^{2,2} - (c_i^{1,2})^2 = 0, \quad / 2 /$$

где

$$\begin{aligned} a_i^{1,1} &= a_i^{1,1} + 2\beta^{1,1} \cdot \cos \frac{\pi}{n} i & a_i^{2,2} &= a_i^{2,2} + 2\beta^{2,2} \cdot \cos \frac{\pi}{n} i \\ c_i^{1,2} &= -2c^{1,2} \cdot \sin \frac{\pi}{n} i & a_i^{1,1} &= \frac{2EJ}{L} \cdot \mathcal{F}_2(a_i, d_i) \\ c_i^{1,2} &= \frac{EJ}{L^2} \cdot \mathcal{F}_3(a_i, d_i) & a_i^{2,2} &= \frac{2EJ}{L^3} \cdot \mathcal{F}_6(a_i, d_i) \\ \beta^{1,1} &= \frac{EJ}{L} \cdot \mathcal{F}_4(a_i, d_i) & \beta^{2,2} &= \frac{EJ}{L^3} \cdot \mathcal{F}_5(a_i, d_i) \end{aligned}$$

и подставляя в / 2 / значения коэффициентов, приходим к уравнению собственных колебаний в самом общем виде. Громоздкость полученного в такой общей постановке уравнения не позволяла использовать его напрямую для практики расчета мостовых конструкций и тем более провести по нему широкий комплекс исследований. Его вид в функциях В. Колоушка приведен ниже

$$\left[ \mathcal{F}_2(a_i, d_i) + \mathcal{F}_2(a_i, d_i) \cdot \cos \frac{\pi}{n} i \right] \cdot \left[ \mathcal{F}_2(a_i, d_i) + \mathcal{F}_6(a_i, d_i) \cdot \cos \frac{\pi}{n} i + \frac{c_i \rho^3}{2EJ} \right] = \mathcal{F}_3^2(a_i, d_i) \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n} i, \quad / 3 /$$

где  $i$  - порядковый номер формы колебаний /  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  /;  
 $n$  - количество пролетов неразрезной балки.

Функции, входящие в уравнение / 3 /, даже в развернутом виде достаточно громоздки

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(a_i, d_i) &= (\kappa_i \operatorname{sh} d_i - f_i \sin a_i) : \mathcal{F}_1(a_i, d_i), \\ \mathcal{F}_3(a_i, d_i) &= (f_i \operatorname{ch} d_i \sin a_i - \kappa_i \operatorname{sh} d_i \cos a_i) : \mathcal{F}_1(a_i, d_i), \\ \mathcal{F}_4(a_i, d_i) &= (\operatorname{ch} d_i - \cos a_i) : \mathcal{F}_1(a_i, d_i), \quad \mathcal{F}_5(a_i, d_i) = (f_i \operatorname{sh} d_i + \kappa_i \sin a_i) \cdot \frac{\kappa_i f_i}{\mathcal{F}_1(a_i, d_i)}, \\ \mathcal{F}_6(a_i, d_i) &= (\kappa_i \operatorname{ch} d_i \sin a_i + f_i \operatorname{sh} d_i \cos a_i) \cdot \frac{\kappa_i f_i}{\mathcal{F}_1(a_i, d_i)}, \\ \mathcal{F}_7(a_i, d_i) &= [2\kappa_i f_i \cdot (\operatorname{ch} d_i \cos a_i - 1) - (\kappa_i^2 - f_i^2) \cdot \operatorname{sh} d_i \cdot \sin a_i] : (\kappa_i a_i + f_i d_i), \end{aligned}$$

если к тому же учесть, что в них в свою очередь параметры  $a_i, d_i, \kappa_i, f_i$  имеют вид

$$d_i = \ell \sqrt{-B_i + \sqrt{B_i^2 + C_i}}, \quad a_i = \ell \sqrt{B_i + \sqrt{B_i^2 + C_i}},$$

$$f_i = \frac{d_i}{1 - \frac{N}{\kappa_x G \mathcal{I}}} \cdot \left[ 1 + \frac{a_i^2}{\ell^2} \frac{E \mathcal{I}}{(\kappa_x G \mathcal{I} - N - \mu \omega_i^2 z^2)} \right], \quad C_i = \frac{\mu \omega_i^2 \left( 1 - \frac{\mu \omega_i^2}{\kappa_x G \mathcal{I}} - \frac{N}{\kappa_x G \mathcal{I}} \right)}{E \mathcal{I}}, \quad 5 /$$

$$B_i = \frac{\mu \omega_i^2 \left( z^2 + \frac{E \mathcal{I}}{F \cdot G \mathcal{I}} \right) - N \cdot \left( 1 - \frac{N}{\kappa_x G \mathcal{I}} \right)}{2 E \mathcal{I}},$$

$$\kappa_i = \frac{a_i}{1 - \frac{N}{\kappa_x G \mathcal{I}}} \cdot \left[ 1 - \frac{d_i^2}{\ell^2} \cdot \frac{E \mathcal{I}}{(\kappa_x G \mathcal{I} - N - \mu \omega_i^2 z^2)} \right].$$

В выражениях / 5 / соответственно введены обозначения:

$c' = c \ell^2 / 2 E \mathcal{I}$  - относительная жесткость упругой промежуточной опоры;  
 $c_0$  - жесткость опоры;  $\ell$  - расстояние между двумя смежными опорами;  
 $\omega_i$  - круговая частота  $i$ -той формы колебаний;  $z$  - радиус инерции поперечного сечения стержня;  $\kappa_x$  - коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения;  $\mathcal{I}$  - площадь сечения стержня;  $N$  - продольная сила;  $G$  - модуль сдвига;  $E$  - модуль упругости;  $\mathcal{I}$  - момент инерции;  $\mu$  - погонная масса.

Тщательный анализ состава функций в сочетании с многочисленными преобразованиями/без допущений/ приводят тем не менее в итоге к простому и очень компактному уравнению собственных колебаний мостовых конструкций представляемых расчетной схемой в виде многопролетной регулярной балки на жестких или упругих опорах

$$\frac{sh d_i}{f_i \cdot \left( ch d_i - \cos \frac{\pi}{2} i \right)} - \frac{\sin a_i}{\kappa_i \cdot \left( \cos a_i - \cos \frac{\pi}{2} i \right)} = \frac{\kappa_i a_i + f_i d_i}{c'}, \quad 6 /$$

которое принято как исходное для "модульного" стержня в самой общей постановке. Следует отметить, что вид уравнения / 6 / наиболее компактный ибо такое же уравнение по составу функций получаем другими методами для двухпролетной балки с одной упругой опорой посредине.

### 2.3. Анализ уравнений, вычислительный эксперимент.

Для того, чтобы вплотную подойти к анализу влияния на частоты и формы собственных колебаний мостов, введенных нами при выводе уравнения, факторов, на первом этапе исследования в качестве эталона принят стержень и уравнение без учета указанных факторов. Это легко сделать положив в / 5 /  $z = 0$ ,  $N = 0$  и  $\kappa_x = \infty$ . В этом случае параметры  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\kappa_i$ ,  $f_i$  в соответствии с / 5 / оказываются равными между собой и соответственно равны общеизвестному параметру  $\lambda_i$ , а само уравнение принимает вид

$$\frac{sh \lambda_i}{ch \lambda_i - \cos \frac{\pi}{2} i} - \frac{\sin \lambda_i}{\cos \lambda_i - \cos \frac{\pi}{2} i} = \frac{2 \lambda_i^3}{c'}, \quad 7 /$$

соответствующий формам колебаний  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ . Для  $i = 0$  и  $i = n$  из / 7 / с учетом параметра  $\lambda_i$  имеем непосредственно решения  $\lambda_n = \pi$  и  $\lambda_0 = 2\pi$ , не зависящие от количества пролетов

и жесткости промежуточных упругих опор.

Для более полного освещения вопроса уравнение / 7 / записано для случая, если в местах упругих опор имеются еще дополнительные сосредоточенные массы. В этом случае в знаменателе правой части величина  $c'$  заменяется на  $c' - \alpha \lambda_i^3$ , где  $\alpha$  - отношение массы сосредоточенного груза к массе пролета балки. Полученное уравнение / 8 / соответствует уравнению собственных колебаний "чистого модульного" стержня/без учета факторов/. Используя уравнение / 8 /

$$\frac{sh \lambda_i}{ch \lambda_i - \cos \frac{\pi}{n} i} - \frac{si \alpha \lambda_i}{\cos \lambda_i - \cos \frac{\pi}{n} i} = \frac{2 \lambda_i^3}{c' - \alpha \lambda_i^3} \quad / 8 /$$

рассмотрены частные случаи, большинство из которых в дальнейшем будет использовано в качестве моделей для расчета мостовых конструкций, включающие:

- многопролетную балку на абсолютно жестких опорах /  $c' = \infty$  /;
- многопролетную балку на упругих опорах /  $0 < c' < \infty$  /;
- многопролетную балку на упругих опорах с дополнительными массами в местах упругих опор /  $\alpha \neq 0$  /;
- однопролетную балку общим пролетом  $\mathcal{L} = n \cdot \ell$  с  $n - 1$  сосредоточенными массами, расположенными на равных расстояниях /  $\alpha \neq 0$ ,  $c' = 0$  /;
- балку на сплошном упругом основании /  $\ell \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \alpha = 0$  /;
- балку на сплошном упругом основании с сосредоточенными дополнительными массами, что соответствует дополнительному слою имеющему массу, но не имеющему жесткости /  $\alpha \neq 0, \ell \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  /:

По результатам расчетов построен универсальный график-номограмма / базовый, т.е. без учета факторов /, позволяющий определять все  $n - 1$  частоту по любой форме колебаний  $n$  - пролетной регулярной балки с любой относительной жесткостью промежуточных упругих опор / рис.2 /. Погрешность не превышает 3%. Для  $n$  - пролетной неразрезной балки, имеющей широкое практическое распространение, приведены дополнительно приближенные формулы, дающие результат также с погрешностью не более 3%. / 9 /.

$$\nu_i = \frac{\pi}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{5}{4} \cdot \left( 1 - \frac{i}{n} \right) \right] \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\mu \ell^3}}, \quad \frac{i}{n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\nu_i = \frac{\pi}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{5}{4} \cdot \left( 1 - \frac{i}{n} \right) + \frac{1}{66} \sin^2 \frac{\pi i}{n} \right] \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\mu \ell^3}}, \quad \frac{i}{n} \geq \frac{1}{2}$$

Как видно из / 8 / влияние дополнительных сосредоточенных масс в местах упругих опор учтено параметром  $\alpha \lambda_i^3$ . При определенных соот-

ношениях  $C'$  и  $\alpha$  знаменатель правой части может принимать нулевые значения. Физически в этом случае действие упругих опор компенсируется противодействием сосредоточенных масс и балка начинает колебаться с частотой простой балки общим пролетом  $\mathcal{L}$ . Это достигается при жесткости опор

$$C_0 = \alpha \cdot \frac{\pi^4}{64} l^4 \cdot \frac{2EJ}{l^3}. \quad / 10 /$$

В некоторых практических случаях мостостроения указанное свойство такой модели можно использовать.

#### 2.4. "Критическая" жесткость упругих опор.

"Критической" жесткостью упругих опор принято называть такую жесткость, при которой колебательный процесс характеризуется равенством частот по двум различным формам. На данное явление указывали в частности в своих работах Б.Н. Кутуков, Д.Г. Козьмин, А.А. Уманский и др. Точное решение для границ "критической" жесткости получено ими с использованием уравнения / 7 / и определяется выражением

$$C'_{кр} = 2 \cdot (\kappa \pi)^3 \cdot \frac{\text{ch } \kappa \pi - \cos \frac{\pi}{n} \cdot (n-2)}{\text{sh } \kappa \pi}. \quad / 11 /$$

Приравнивая выражения / 11 / для первой и второй форм и для  $n = 1$  и  $n$  форм получены точные численные значения "критической" жесткости упругих опор / оценки сверху и снизу /. Показано, что при  $C' \geq 67,612$  раздвоение форм колебаний при любом количестве пролетов невозможно. Граница "критической" жесткости слева характеризуется величиной

$$C'_{кр}(n) = 2(\kappa \pi)^3 \cdot \text{cth } \kappa \pi,$$

где  $\kappa = 1, 2, 3, \dots, m-1$ .

Из анализа указанного явления следует вывод о том, что в реальных мостовых конструкциях, при относительной жесткости упругих опор, лежащей в интервале  $C' = 0 \div 2\pi^3 \text{cth } \kappa$ , следует проявлять особую осторожность. Даже незначительная погрешность в определении  $C'$

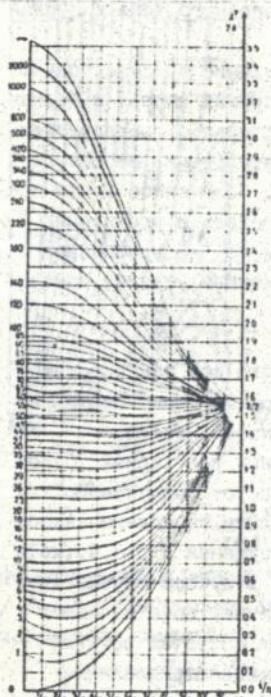


Рис. 2.

дает неверный результат не только количественный, но и качественный, поскольку для  $n$  - пролетной балки количество дискретных точек, в которых происходит смена форм колебаний равно  $t = n! / 2(n-2)!$ . При этом все  $n$  частот балки имеют очень близкие значения. Так для 12-пролетной балки с относительной жесткостью опор равной 70 все двенадцать частот заключены в узком диапазоне  $1,6532 \div 1,5708$  / диапазон дан по частотному параметру  $\lambda_i^2 / 2\pi$ . Отмечено, что в каждой такой дискретной точке имеется равенство кинетических энергий при колебаниях по двум любым формам / естественно по которым имеется равенство частот / и что данное положение неустойчивое.

Зона "критической" жесткости для частот основного тона / первая зона сгущения / приведена на рис.3.

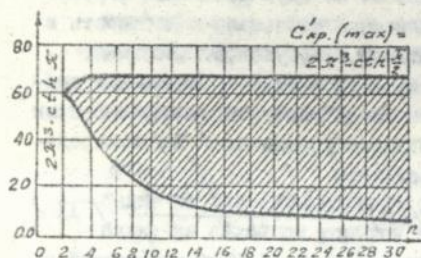


Рис.3

Указанное явление присуще только балкам на упругих опорах и балкам на упругих опорах с сосредоточенными дополнительными массами в местах опор. Полученное путем предельного перехода в уравнении / 7 / при  $\ell \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$  уравнение балки на сплошном упругом основании

$$\lambda_i^4 - \frac{\pi^4}{\pi^4} \lambda_i^4 = 2C'$$

показывает, что для данного типа балок раздвоение форм невозможно

ибо ни для каких двух форм мы не получаем равенства частот.

Подводя итог и анализируя частоты неразрезных регулярных балок на упругих и жестких опорах, приводится спектр частот "модульного"

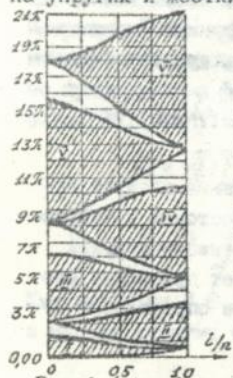


Рис.4

стержня / в данном исследовании вычисления выполнены для первых шести зон сгущения / рис.4., хотя практическое значение имеют в лучшем случае две. На данном графике заштрихованная зона является самой обширной и относится к частотам регулярных балок на упругих опорах, незаштрихованная часть принадлежит частотам балок с сосредоточенными массами, расположенными на балке на равных расстояниях, верхние ветви относятся к частотам балок на абсолютно жестких опорах, нижние ветви принадлежат частотам балки на двух опорах пролетом  $L = \ell \cdot n$ , частоты балок на упругих опорах с сосредоточенными массами - занимает все зоны.

## 2.5. Уравнения форм колебаний.

Спределение параметров собственных форм колебаний регулярных упруго опертых балок в общей постановке проводим, непосредственно используя уравнение / 6 /. Каждую форму в нашем случае характеризуют следующие параметры: собственная форма  $\beta_i$ , угол поворота на  $\kappa$ -той опоре  $\varphi_\kappa$ , перемещение на  $\kappa$ -той опоре  $y_\kappa$  и перемещение в середине каждого из пролетов  $y(\frac{\ell}{2})_{\kappa, \kappa+1}$ . Собственная форма определяется выражением / 12 / как отношение величин, входящих в уравнения / 2/, / 3 / или / 6 /

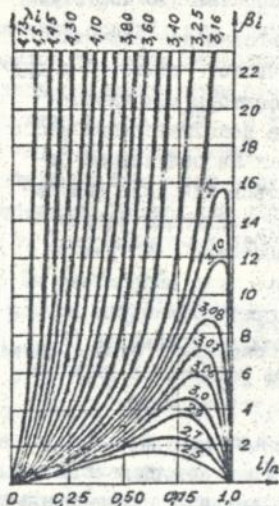


Рис. 5

$$\beta_i = -\frac{C_i^{1,2}}{a_i^{1,2}} \cdot \ell = -\frac{a_i^{2,2}}{c_i^{1,2}} \cdot \ell = \frac{\varphi_i \cdot \ell}{y_i}$$

$$= \frac{F_3(a_i, d_i) \cdot \sin \frac{\pi}{n} i}{F_2(a_i, d_i) + G_2(a_i, d_i) \cdot \cos \frac{\pi}{n} i} \cdot \ell = \quad / 12 /$$

$$= \frac{F_3(a_i, d_i) \cdot \cos \frac{\pi}{n} i + F_0(a_i, d_i) + C'}{F_3(a_i, d_i) \cdot \sin \frac{\pi}{n} i} \cdot \ell,$$

которое после преобразований имеет вид

$$\beta_i = \frac{\kappa_i f_i (ch d_i - \cos a_i) \sin \frac{\pi}{n} i \cdot \ell}{\kappa_i sh d_i (\cos \frac{\pi}{n} i - \cos a_i) - f_i \sin a_i (\cos \frac{\pi}{n} i - ch d_i)} \quad / 13 /$$

Для угла поворота и перемещения на  $\kappa$ -той опоре решения имеют вид

$$\varphi_\kappa = \sum_0^\kappa \varphi_i \cdot \cos \frac{\pi}{n} i \cdot \kappa = \frac{\beta_i \cdot \cos \frac{\pi}{n} i \cdot \kappa}{\ell} \quad / 14 /$$

$$y_\kappa = \sum_0^\kappa y_i \cdot \sin \frac{\pi}{n} i \cdot \kappa = \sin \frac{\pi}{n} i \cdot \kappa.$$

В случае равенства параметров  $a_i = d_i = f_i = \kappa_i = \lambda_i$  для собственной формы "чистого модульного" стержня имеем

$$\beta_i = \frac{(ch \lambda_i - \cos \lambda_i) \cdot \lambda_i \cdot \sin \frac{\pi}{n} i}{sh \lambda_i (\cos \frac{\pi}{n} i - \cos \lambda_i) - \sin \lambda_i (\cos \frac{\pi}{n} i - ch \lambda_i)} \cdot \ell, \quad / 15 /$$

по результатам расчетов для определения которой построен график / рис.5 /. Используя далее решение однородного линейного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами в виде

$$y(x) = C_1 \cdot ch \frac{\lambda_i}{\ell} x + C_2 \cdot sh \frac{\lambda_i}{\ell} x + C_3 \cdot \cos \frac{\lambda_i}{\ell} x + C_4 \cdot \sin \frac{\lambda_i}{\ell} x \quad / 16 /$$

подстановкой в / 16 / значения  $x = \frac{\ell}{2}$  и вычисленных значений постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  приходим к амплитуде для форм колебаний в середине каждого из пролетов регулярной многопролетной балки на упругих промежуточных опорах. Построенный дополнительно к графику для соб-

ственной формы график зависимости

$$R\left(\frac{\lambda_i}{2}\right) = \frac{\operatorname{sch} \frac{\lambda_i}{2} + \sec \frac{\lambda_i}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\lambda_i}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\lambda_i}{2}}$$

позволяет просто определить амплитуды по любой  $i$ -той форме колебаний по двум выражениям

$$y_k = \sin \frac{\pi}{R} i k$$
$$y\left(\frac{\ell}{2}\right)_{k, k+i} = R\left(\frac{\lambda_i}{2}\right) \sin \frac{\pi k+i}{2n} \cdot \pi \cdot i \cdot \left(\frac{\beta_i}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} i + \cos \frac{\pi}{2n} i\right),$$

где  $R\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)$  и  $\beta_i$  определяются по графикам, а при машинном счете по приведенным формулам.

## 2.6. Анализ влияния различных факторов на собственную частоту.

Полученные выше зависимости и уравнения пригодны для решения практических задач по определению собственных частот мостовых и других аналогичных конструкций, для которых такие факторы как инерция вращения, сдвиги, продольные силы, сосредоточенные дополнительные массы в местах опор не оказывают существенного влияния на получаемый результат и с допустимой погрешностью можно мириться или, если результат необходим как первое приближение. Поскольку численных оценок влияния большинства из указанных факторов на мостовые конструкции в литературе не имеется — дальнейшее исследование было направлено на определение четких границ допущений, исходя из предпосылки, что погрешность в определении частот основного тона не должна превышать 5%.

На основании детального анализа результатов расчетов в широком диапазоне изменения указанных параметров, было установлено.

1. Ограничение в расчетных схемах неразрезных регулярных балок количества пролетов до 3 - 4, предлагаемое многими авторами в целях упрощения решений, допустимо лишь в очень узком диапазоне относительной жесткости упругих опор  $70 > c' > 55$ . Указанное упрощение вне указанного интервала дает тем большую погрешность, чем больше отношение действительного количества пролетов к принимаемому. При прочих равных условиях погрешность больше для более высоких номеров форм колебаний. Кроме того, указанный интервал принадлежит зоне "критических" жесткостей и таит другую опасность — набор близких по значениям частот спектра сгущения. Следовательно, ограничивая количество пролетов в расчетной схеме, мы тем самым отдаляемся от реальной картины действительных частот и форм колебаний исследуемой конструкции. Предлагаемое решение не страдает указанным недостатком.

2. Замена упругих опор в расчетной схеме на жесткие допустима начиная со значения относительной жесткости 3000.

3. В уравнении / 6/ параметр, учитывающий влияние инерции вращения, имеет вид  $\rho = \frac{J^2}{2C^2}$ . Численный анализ позволил установить, что учет данного фактора при определении собственных частот в большинстве практических задач мостостроения необходим, ибо значение параметра  $\rho = 0,004$  изменяет частоту основного тона в сторону уменьшения более чем на 5%. Тем более учет данного фактора необходим для балок с большой относительной жесткостью упругих опор / рис. 6 /.

4. Анализ влияния статической продольной силы, проведенный в широком диапазоне изменения параметров  $\lambda$ ,  $c'$ ,  $N$ ,  $\alpha_i$  по всем формам колебаний, показал, что влияние данного фактора естественно больше скажется для форм колебаний, имеющих меньший порядковый номер, и на частоты основного тона по формам  $i \leq \frac{n}{2}$  оказывает влияние более 5% со значения  $\alpha_i \geq 0,25$ , в то время как по формам  $i > \frac{n}{2}$  уже со значения  $\alpha_i > 3,0$ . Естественно, большее влияние оказывается при малой относительной жесткости упругих опор, т.е. когда противодействие опор ослабевает. График для частот основного тона приведен на рис. 7.

5. Учет сдвиговых деформаций в нашем случае характеризуется обобщенным параметром

$$\rho = \frac{EJ}{2C^2 \cdot \kappa \cdot G^2}, \quad \kappa = \frac{1}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{J}{J^2} \int \frac{J^2}{C^2} dJ.$$

Входящий в него коэффициент  $\kappa$  исследован еще в работах Моллера-Бреслау /1925 г./, в которых его предложено определять для двутавровых и коробчатых сечений по простой зависимости, т.е. как отношение площади всего сечения к площади вертикальных листов. Однако в более детальном исследовании Б.А. Костякова отмечено, что указанной рекомендацией можно пользоваться, если отношение расстояния от нейтральной оси к расстоянию до центра тяжести значительно больше или значительно меньше единицы. Предлагаемое им уточненное выражение для данного коэффициента, дающее погрешность в любом случае не более 4%, и было использовано при проведении анализа

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \eta \Delta + \frac{1}{30}}{\frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \eta \Delta^2 + \frac{1}{36}} \cdot (1 + 2\eta). \quad / 13 /$$

где  $\eta = \frac{J_2}{J_1}$ ,  $\Delta$  - отношение расстояния от нейтральной оси до центра тяжести. Параметр  $\rho$ , выраженный через параметр  $\rho$ , принимает вид  $\rho = \rho \cdot \frac{E}{C} \cdot \kappa$  и свидетельствует о том, что сдвиги оказывают большее влияние чем инерция вращения. Заметное изменение частот основного тона происходит при величине  $\rho \geq 0,04$  и отказ от учета данного фактора приводит к завышению значений частот, тем более по высшим формам. Большее влияние сдвиги оказывают на частоты балок на жест-

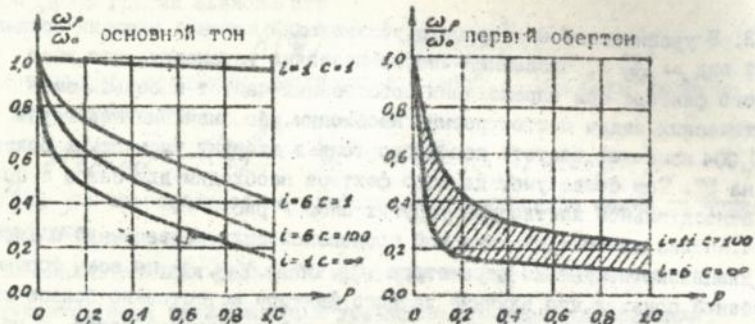


Рис. 6

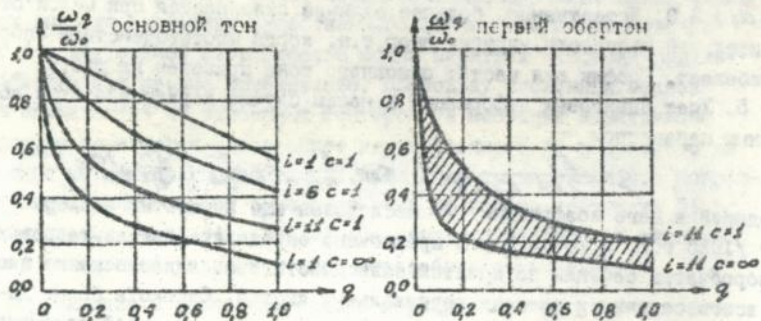


Рис. 8

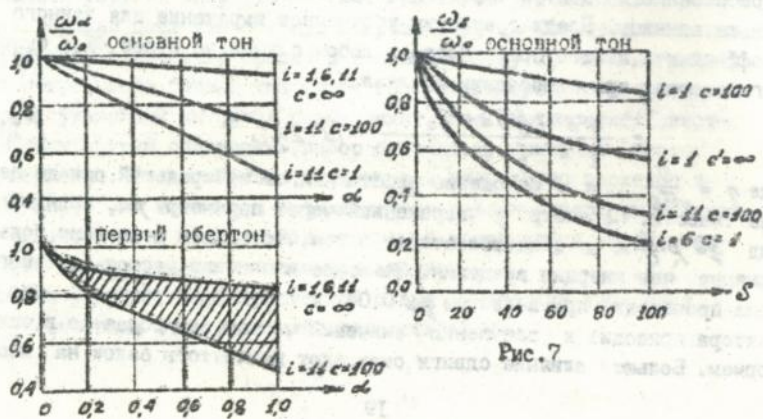


Рис. 9

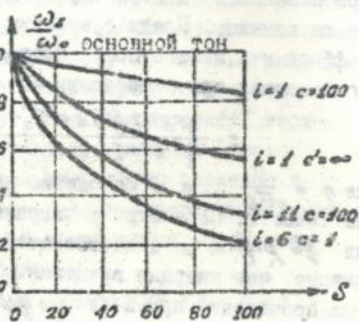


Рис. 7

ких опорах/ рис.8 /.

6. В практических задачах очень часто встречаются схемы и модели, в которых балки одного направления служат дополнительными массами для балок другого направления/ продольные и поперечные балки проезжей части железнодорожных мостов и др./ .Проведенный анализ позволил установить, что данный фактор оказывает существенное влияние уже на частоты основного тона со значениями  $\rightarrow 0,00$ . Указанное значение данного параметра в практических задачах встречается часто. На рис.9 приведен график, подтверждающий указанный вывод.

Стремись получить результат, позволяющий непосредственно по выражению оценить влияние всех перечисленных факторов, был осуществлен предельный переход от балки на упругих опорах к балке на сплошном упругом основании, которое в общем виде с учетом всех факторов принимает вид

$$\frac{2d_i}{f_i \cdot (d_i^2 + \frac{\pi^2 i^2}{n^2})} + \frac{2a_i}{\kappa_i \cdot (a_i^2 + \frac{\pi^2 i^2}{n^2})} = \frac{\kappa_i a_i + f_i d_i}{c' - \alpha \lambda_i^4} \quad / 19 /$$

а записанное в развернутом виде, позволяет непосредственно по уравнению провести анализ

$$\left(1 - \frac{N}{\kappa_i G F} - \frac{z^2}{c^2} \cdot \frac{E J}{c^2 \kappa_i G F} \cdot \lambda_i^4\right) \cdot (2c' - \alpha \lambda_i^4 - \lambda_i^4) + 2 \frac{\pi^2 i^2}{n^2} \cdot \left[\frac{c a_i}{2 \kappa_i G F} - \frac{N c^2}{2 E J} \cdot \left(1 - \frac{N}{\kappa_i G F}\right) - \lambda_i^4 \cdot \left(\frac{z^2}{2 c^2} + \frac{E J}{2 c^2 \kappa_i G F}\right)\right] + \frac{\pi^4}{n^4} i^4 = 0 \quad / 20 /$$

## 2.7. Сложные модели- структуры "модульного" стержня.

Используя полученные решения для собственных частот колебаний регулярного многопролетного стержня / " модульного" / довольно просто осуществляется переход к составлению решений для более сложных моделей, примененных в качестве расчетных схем для определения собственных частот различных мостовых конструкций. "Модульным" элементом указанных схем является опробованный "модульный" стержень.

### 2.7.1. Перекрестные балки.

В научной литературе встречается несколько названий указанной расчетной модели : перекрестные балки, пересекающиеся балки, стержневой набор. Существенный вклад в развитие теории колебаний перекрестных балок внесли Е.С.Сорокин, Я.Л.Нудельман, Г.П.Арясов, Б.Н.Кутуков, В.И.Плетнев, В.С.Чувиковский, А.Д.Мелконян, В.Ригби, А.Х.Нейфех, М.С.Хартя, А.Г.Барчонис, А.Г.Джейнер и др.

Для вывода уравнения колебаний системы пересекающихся балок использован подход, опробованный ранее. В данном случае имеем простей-

шую модель пересекающихся "модульных" стержней / рис.10 / , для которой

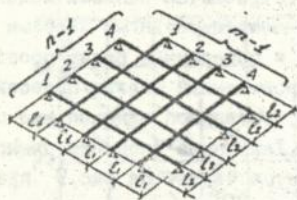


Рис. 10

из условия равновесия моментов и сил можно записать аналогично / I / при статическом нагружении систему уравнений

$$\begin{cases} a_i^{1,1} \cdot \varphi_i + c_i^{1,2} \cdot y_{ij} = M_i, \\ a_j^{1,1} \cdot \varphi_j + c_j^{1,2} \cdot y_{ij} = M_j, \\ c_i^{1,2} \cdot \varphi_i + c_j^{1,2} \cdot \varphi_j + (a_i^{2,2} + a_j^{2,2}) \cdot y_{ij} = R_{ij}. \end{cases} / 21 /$$

Детерминант, составленный из коэффициентов уравнения / 21 / имеет вид

$$a_i^{1,1} \cdot a_j^{1,1} \cdot (a_i^{2,2} + a_j^{2,2}) - (c_i^{1,2})^2 \cdot a_j^{1,1} - (c_j^{1,2})^2 \cdot a_i^{1,1} = 0.$$

После подстановки в него значений коэффициентов и преобразований, приходим к частотному уравнению системы перекрестных балок / 22 /

$$\frac{\frac{sh d_{si}}{f_{si} \cdot (ch d_{si} - \cos \beta_i)} - \frac{\sin a_{si}}{\kappa_{si} \cdot (\cos a_{si} - \cos \beta_i)}}{\frac{sh d_{sj}}{f_{sj} \cdot (ch d_{sj} - \cos \beta_j)} - \frac{\sin a_{sj}}{\kappa_{sj} \cdot (\cos a_{sj} - \cos \beta_j)}} = \frac{(\kappa_{si} a_{si} + f_{si} d_{si}) \cdot E_1 J_1 \cdot l_1^3 / 22}{(\kappa_{sj} a_{sj} + f_{sj} d_{sj}) \cdot E_2 J_2 \cdot l_2^3} / 22 /$$

Указанный результат получен нами и другим, более простым, способом с непосредственным использованием готового решения для "модульного" стержня. Пусть в общем случае имеется  $n - 1$  продольных и  $m - 1$  поперечных "модульных" стержней. Для составления частотного уравнения достаточно приравнять амплитуды балок двух направлений в местах их пересечения. Условие равенства узловых прогибов, выраженное через соответствующие жесткости упругих опор, принимает вид / 23 /

$$(m-1) \sum_{\kappa=1}^{n-1} C_{1\kappa} = (n-1) \sum_{\kappa=1}^{m-1} C_{2\kappa} / 23 /$$

Используя далее уже известное решение для балок обоих направлений

$$\frac{sh d_{st}}{f_{st} \cdot (ch d_{st} - \cos \frac{\beta}{2} t)} - \frac{\sin a_{st}}{\kappa_{st} \cdot (\cos a_{st} - \cos \frac{\beta}{2} t)} = \frac{\kappa_{st} \cdot a_{st} + f_{st} \cdot d_{st}}{C_{st}} / 24 /$$

полагая для балок одного направления / продольных /  $S = 1$ ,  $u = m$ ,  $t = l$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots, m - 1$ ,  $\kappa = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ , а для балок другого направления / поперечных /  $S = 2$ ,  $u = n$ ,  $t = j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ ,  $\kappa = 1, 2, 3, \dots, m - 1$ , находим

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1} C_{1\kappa} = \frac{2E_1 J_1 \cdot (n-1) \cdot (\kappa_{1i} \cdot a_{1i} + f_{1i} \cdot d_{1i})}{l_1^3 \cdot \left[ \frac{1}{f_{1i}} \cdot A(d_{1i}) - \frac{1}{\kappa_{1i}} \cdot B(a_{1i}) \right]} / 25 /$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_{2k} = \frac{2E_2 J_2 \cdot (m-1) \cdot (\kappa_{2j} \cdot a_{2j} + f_{2j} \cdot d_{2j})}{l_2^3 \cdot \left[ \frac{1}{f_{1j}} \cdot A(d_{2j}) - \frac{1}{\kappa_{1j}} \cdot B(a_{2j}) \right]} \quad / 25 /$$

имея виду, что

$$A(d_{2j}) = \frac{\sin d_{2j}}{d_{2j}} - \cos \frac{d_{2j}}{2}, \quad B(a_{2j}) = \frac{\sin a_{2j}}{\cos a_{2j} - \cos \frac{a_{2j}}{2}}, \quad c_{2k}^1 = \frac{C_{2k} \cdot C_{2k}}{2E_2 J_2}$$

которое после преобразований дает уравнение колебаний в точности совпадающее с / 22 /. Записав данное уравнение без учета факторов

$$i a_i = d_i = f_i = \kappa_i = \lambda_i /$$

$$\frac{A(\lambda_{2i}) - B(\lambda_{2i})}{A(\lambda_{2j}) - B(\lambda_{2j})} = - \frac{\lambda_{2j} \cdot \mu_2 l_2}{\lambda_{2i} \cdot \mu_2 l_2} \quad / 26 /$$

и положив затем  $m = n$  и  $i = j$ , осуществляется переход к результату имеющемуся в справочной литературе.

Предельный переход от выражения / 22 / при  $l_2 \text{ и } l_2 \rightarrow 0$ , а  $n \text{ и } n \rightarrow \infty$  приводит к уравнению колебаний перескакивающего блока на сплошном упругом основании с учетом всех факторов

$$\frac{a_{2i} d_{2i} + \beta_i^2 \cdot \frac{f_{1i} \cdot a_{2i} - \kappa_{1i} \cdot d_{2i}}{\kappa_{1i} \cdot a_{2i} + f_{1i} \cdot d_{2i}}}{\kappa_{2i} \cdot f_{2i} \cdot (d_{2i}^2 \cdot a_{2i}^2 + \beta_i^2 \cdot (a_{2i}^2 - d_{2i}^2)) - \beta_i^4} + \frac{E_2 J_2 \cdot l_2^3}{E_2 J_2 \cdot l_2^3} = 0.$$

$$\frac{a_{2j} d_{2j} + \beta_j^2 \cdot \frac{f_{1j} \cdot a_{2j} - \kappa_{1j} \cdot d_{2j}}{\kappa_{1j} \cdot a_{2j} + f_{1j} \cdot d_{2j}}}{\kappa_{2j} \cdot f_{2j} \cdot (d_{2j}^2 \cdot a_{2j}^2 + \beta_j^2 \cdot (a_{2j}^2 - d_{2j}^2)) - \beta_j^4} \quad / 27 /$$

При отказе от учета факторов получаем решение непосредственно для круговой частоты

$$\frac{\beta_i^4 - \lambda_{2i}^4}{\lambda_{2i}^2 - \beta_j^2} = \frac{E_2 J_2 \cdot l_2^3}{E_2 J_2 \cdot l_2^3}, \quad \omega_{ij} = \sqrt{\frac{E_2 J_2 \cdot l_2^4 \cdot \lambda_{2i}^4 + E_2 J_2 \cdot l_2^4 \cdot \lambda_{2j}^4}{\mu_2 l_2^4 + \mu_2 l_2^4}}$$

где введены сокращения

$$\lambda_i^4 = \frac{\mu_2}{E_2 J_2} \cdot \omega_i^4, \quad \lambda_j^4 = \frac{\mu_2}{E_2 J_2} \cdot \omega_j^4$$

$$\omega_i = \frac{\pi^2}{m^2} \cdot \frac{i^2}{l_2^2} \cdot \sqrt{\frac{E_2 J_2}{\mu_2}}, \quad \omega_j = \frac{\pi^2}{n^2} \cdot \frac{j^2}{l_2^2} \cdot \sqrt{\frac{E_2 J_2}{\mu_2}}$$

в  $\omega_i$  и  $\omega_j$  - частоты колебаний блока двух направлений без упругого основания.

Если предположить, что в местах пересечения блок /узлах / дополнительно поведены упругие опоры жесткостью  $C_0$ , то уравнение / 23 / будет выглядеть следующим образом

$$(m-1) \sum_{k=1}^{m-1} C_{2k} - (n-1) \cdot (m-1) \cdot C_0 = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} C_{2k} - (m-1) \cdot (n-1) \cdot C_0,$$

что приводит к уравнению частот указанной системы

$$\frac{2 \lambda_{2i}^3}{c_i \cdot [A(\lambda_{2i}) - B(\lambda_{2i})]} - \frac{2 \lambda_{2j}^3}{c_j \cdot [A(\lambda_{2j}) - B(\lambda_{2j})]} = 1. \quad / 28 /$$

Указанное решение / 26 / пригодно без изменений, если учитываются

различные факторы. Необходимо только вместо уравнения / 25 / использовать уравнения / 22 / и / 27 /.

Представив систему взаимноперпендикулярных регулярных балок как набор взаимноортогональных балочек прямоугольного сечения высотой  $h$ , связанных между собой распределенными упругими связями/слоем/ типа винклеровского основания можно получить решения для ортотропной плиты. Можно рассмотреть и другие комбинации неразрезных балок: плит, подкрепленных регулярной сеткой ребер; неразрезных плит или пакетов, соединенных равножесткими связями / слоевые системы/ и др.

### 2.7.2. Слоистые системы.

Большой интерес представляет расчет конструкций и систем, состоящих из соединенных между собой по высоте слоев "модульных" стержней / балок /. Указанные слои могут иметь различные жесткостные характеристики, однако являясь регулярными в пределах каждого из слоев. Решение подобного класса задач связано с определенными трудностями. Учитывая актуальность задачи в такой постановке, следующим этапом являлась разработка практического аппарата определения частот и форм колебаний слоистых систем, являющихся расчетными моделями некоторых видов плитных пролетных строений, ферм железнодорожных мостов, балок проезжей части и др. Все решения для "модульного" стержня / балки / остаются в силе. Задача следующего этапа связать "модульные" стержни между собой в единую модель при помощи соответствующих зависимостей. С этой целью рассмотрены колебания пакета балок, связанных между собой посредством линейно упругих опор / рис. II /.

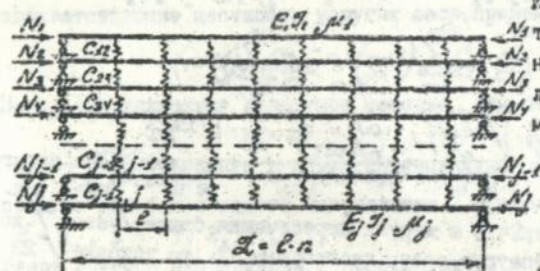


Рис. II.

Используя в данной схеме тождественность граничных условий, ищем при помощи нормальных форм вида

$$y_j = \alpha_j \cdot y_1 \quad / 30 /$$

$\alpha_j = 1, j = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  
 $\alpha_j$  - коэффициент распределения амплитуд подлежит определению.

Полученное нами решение для "модульной" балки с учетом различных факторов в виде / 6 / можно распространить без изменений на каждый из слоев пакета, приняв количество слоев  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Выражение для относительной жесткости упругих опор, через которые осуществляется связь между балками, в общем виде определяем из зависимости, в которой неизвестной величиной является  $\lambda_j$  - соотношение амплитуд колебаний

$$c_j = \frac{[C_{j-1,j} \cdot (1 - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}) + C_{j,j+1} \cdot (1 - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j})] \cdot \rho^3}{2E_j J_j} \quad / 31 /$$

в система уравнений / 32 /

$$\frac{sh \lambda_j d_j}{\lambda_j \cdot (ch \lambda_j d_j - \cos \frac{\pi}{2} i)} - \frac{\sin \alpha_j}{\lambda_j \cdot (\cos \alpha_j - \cos \frac{\pi}{2} i)} = \frac{\alpha_j^2 + d_j^2}{c_j} \quad / 32 /$$

содержит  $\kappa - I$  неизвестное  $\alpha_j$  и  $\kappa$  неизвестных параметра  $\lambda_{ij}$  для каждой  $i$ -той форм колебаний. Учитывая, что нормальные формы являются одночастотными, а между частотными параметрами в силу регулярности каждого из слоев имеется зависимость

$$\omega_{i1} = \omega_{i2} = \omega_{i3} = \dots = \omega_{i\kappa}, \quad \lambda_{ij}^4 = \lambda_{is}^4 \cdot \varphi_j, \quad \varphi_j = \frac{M_j \cdot E_j J_j}{M_s \cdot E_j J_j}$$

указанная система позволяет найти все  $\kappa - I$  соотношений амплитуд колебаний и частотный параметр  $\lambda_{is}$ .

### 2.7.3. Трехслойная балка.

Детальное исследование и проверка предлагаемых решений выполнены на простейшей модели слоистой системы - трехслойной балке. Указанная модель является прообразом многих реальных конструкций в том числе и мостовых. В практике отечественного и зарубежного строительства широкое распространение получают трехслойные конструкции, выполняющие как несущие так и ограждающие функции. Спыт применения железобетонных конструкций подтверждает их надежность в эксплуатации и высокую экономическую эффективность. С помощью технологии управляемого расщепления бетонной смеси можно получить слоистую конструкцию с гарантированными параметрами. Методика расчета собственных частот позволяет активно вмешиваться в проектирование трехслойных / в общем случае многослойных / конструкций со средним слоем обладающим несущими свойствами и не обладающим. На данный момент проектирование слоистых конструкций осложнено, поскольку теория их статического расчета по всем пречельным состояниям разработана не полностью, а динамическая работа и устойчивость - еще меньше.

Исследования выполнены для расчетной схемы, приведенной на рис. 12 при двух основных предположениях:

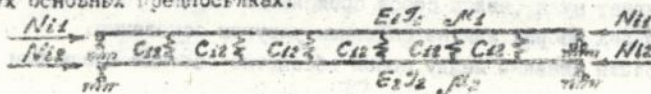


Рис. 12. 25

обе балки сжаты или одна балка сжата, а другая растянута; балки объединены системой дискретных опор или сплошным упругим слоем; учитывается или не учитывается инерция вращения и сдвиги.

Для исследования использовались известные зависимости. Подробное изучение влияния сдвигов и инерции вращения на собственные колебания трехслойной балки выполнено по уравнению / 20 /, записанному в общем виде для балок, связанных упругим слоем при  $j = 1, 2$  и воспользовавшись зависимостью / 31 /.

Изучение влияния действия продольных сил было выполнено также для балок связанных упругим слоем и рассмотрены четыре комбинации: обе балки сжаты; одна балка сжата, а другая растянута; одна балка сжата, а другая не подвержена действию продольных сил; обе балки не подвержены действию продольных сил. Система уравнений для данного случая имеет вид

$$\begin{cases} 2c'_1 \cdot (1 - \alpha_2) - \lambda_{12}^4 + \alpha_{12}^2 \cdot \beta_1^2 + \beta_1^4 = 0, & / 33 / \\ 2c'_2 \cdot (1 - \frac{1}{\alpha_2}) - \lambda_{12}^4 + \alpha_{12}^2 \cdot \beta_2^2 + \beta_2^4 = 0. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения коэффициент распределения амплитуд  $\alpha_2$ , подстановкой во второе приходим к уравнению для собственной частоты в виде

$$\lambda_{12}^8 \cdot \varphi_2 + \lambda_{12}^4 \cdot [\pm \beta_1^2 \cdot (\alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^2 \cdot \varphi_2) - \beta_1^4 \cdot (1 + \varphi_2) + c'_1 \cdot \varphi_2 + c'_2] + [-\beta_2^8 + \beta_2^6 \cdot (\pm \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^2) + \beta_2^4 \cdot (c'_1 + c'_2 + \alpha_{12}^2 \cdot \alpha_{12}^2) + \beta_2^2 \cdot (c'_1 \cdot \alpha_{12}^2 + c'_1 \cdot \alpha_{12}^2)] = 0, / 34 /$$

из которого получаем решения для квадрата круговой частоты для всех четырех случаев. Знак минус перед  $\alpha_{ij}$  в / 33 / и / 34 / относится к сжатию, плюс - к растяжению.

Детальный численный анализ позволил выявить ряд важных зависимостей, из которых можно назвать лишь некоторые.

1. При колебаниях сжатой трехслойной балки / при одинаковых параметрах балок / коэффициент распределения амплитуд принимает два значения  $\alpha_2 = +1$  и  $\alpha_2 = -1$ . Первый корень соответствует колебаниям балок общим пролетом  $L$  в унисон / промежуточные связи в процессе колебаний не деформируются /, а второй - колебаниям балок в противофазе на спорах удвоенной жесткости / в этом случае середины упругих связей в процессе колебаний не деформируются /.

2. При увеличении жесткости одной из балок коэффициент распределения амплитуд резко падает и при абсолютно жесткой одной из двух балок достигает нуля, являя собой предельный случай колебаний одной балки на упругих опорах или на сплошном упругом основании.

3. Если балки связаны между собой абсолютно жестким слоем или

жесткими упругими связями, корни уравнения не зависят от  $\alpha_2$ , имеем случай синфазных колебаний и решение для круговой частоты

$$\omega_i^2 = \frac{E_1 J_1}{\mu_1 l^3} \beta_i^4 \left[ \left( \frac{N_1}{E_1 J_1} + \frac{N_2}{E_2 J_2} \right) \cdot \frac{l^2}{2 \beta_i^2 (1 + \varphi)} + 1 \right]. \quad / 35 /$$

4. В общем влияние инерции вращения и деформаций сдвига на слоистые системы менее ощутимо по сравнению с неслоистыми балками.

5. Колебания балок в противофазе всегда характеризуется более высокими значениями частот, поскольку жесткость упругого слоя оказывает меньшее влияние.

6. Для балок с одинаковыми параметрами, если одна из них сжата, а другая растянута — продольные силы оказывают большее влияние на частоты синфазных колебаний.

7. Значения коэффициента распределения амплитуд в равной степени зависят от всех параметров.

#### 2.7.4. Системы близкие к регулярным.

Анализ влияния незначительных отклонений систем от регулярности по длинам пролетов, по жесткости, по граничным условиям, по весовым характеристикам необходим, ибо такие системы в практике строительства мостовых конструкций встречаются. Исследование же преследовало цель определить границы нерегулярностей, в пределах которых допустимо использовать решения для регулярных систем. Указанный вопрос в научной литературе практически не освещен.

Исследование проведено на 14 типах двухпролетных неразрезных балок / рис. 13 /. На первом этапе промежуточные опоры приняты абсолютно жесткими. Минимальное количество пролетов два выбрано с учетом того обстоятельства, что граничные условия да и остальные параметры оказывают большее влияние для балок с малым количеством пролетов. Перебор 14 типов балок обусловлен тем, что в реальных конструкциях расчетная схема как правило выражена не четко, а иногда и не однозначно.

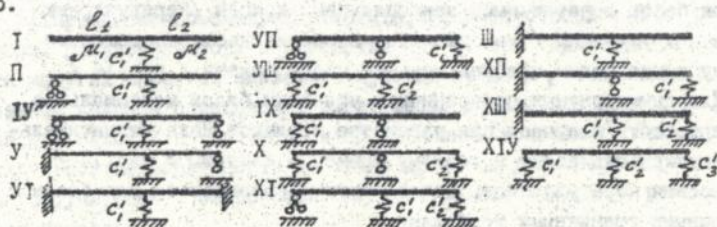


Рис. 13.

Для расчетной схемы, имеющей заделку по концам, кроме двухпролетной балки получено решение для регулярной многопролетной балки. Решение получено тем же методом деформаций с использованием функций концевых сил и моментов. Показано, что уравнение колебаний регулярной балки на шарнирных крайних опорах и имеющей заделку по концам для форм колебаний  $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ , имеет один и тот же вид. Для форм же  $i = 0$  и  $i = n$  для регулярной балки на упругих опорах, имеющей заделку по концам, решение, в отличие от шарнирного опирания зависит от жесткости опор

$$i=0, \quad \frac{2(chdi \cdot \cos \alpha_i + 1) + \frac{\kappa_i^2 - f_i^2}{\kappa_i f_i} \cdot shdi \cdot \sin \alpha_i}{\kappa_i \sin \alpha_i (chdi - 1) - f_i shdi (\cos \alpha_i - 1)} = \frac{\kappa_i \alpha_i + f_i d_i}{c'}$$

$$i=n, \quad \frac{2(chdi \cdot \cos \alpha_i + 1) + \frac{\kappa_i^2 - f_i^2}{\kappa_i f_i} \cdot shdi \cdot \sin \alpha_i}{\kappa_i \sin \alpha_i (chdi - 1) + f_i shdi (\cos \alpha_i - 1)} = \frac{\kappa_i \alpha_i + f_i d_i}{c'}$$

Анализ шести расчетных схем двухпролетных балок на жестких опорах выполнен в широком диапазоне изменения параметров каждого из пролетов. Предварительно в качестве ориентировочного критерия системы близкой к регулярной, нами принята система, имеющая отличие от регулярности по длине пролетов - 10%, по остальным параметрам - до 20%. Действительное же положение предстояло выявить в процессе исследования, ориентируясь на то обстоятельство, что результаты определения собственной частоты по двум схемам не должны иметь расхождение более 5%. Следует сразу отметить, что такое исследование было крайне необходимо, если учесть, что точные решения даже для двухпролетных нерегулярных систем довольно громоздки. В процессе исследования определялось три корня частот основного тона. Анализ характера изменения частот позволил сделать некоторые практические выводы.

1. При нерегулярности, достигающей своего предела / средняя опора вплотную придвинута к левой / приходим к выводу о равнозначности некоторых способов закрепления концов балок.

2. Для балок с различными закреплениями концов / нерегулярных по граничным условиям / максимальное значение частоты смещается в сторону конца балки, имеющей меньшее число связей / рис. I4 /.

3. Для симметричных по граничным условиям балок максимальное значение частоты получаем при равенстве пролетов. Даже незначительная нерегулярность ведет к резкому снижению частоты / рис. I4 /.

4. Весовая нерегулярность более ощутимо сказывается для балок с симметричными граничными условиями.

5. Для балок, имеющих консоль изменение погонной массы первого пролета практически не влияет на изменение частоты.

В итоге были установлены четкие границы интервалов изменения длин пролетов, погонных масс, жесткостей, в пределах которых для нерегулярной системы можно пользоваться уравнениями для регулярных систем значительно более простыми. Плавный характер изменения графиков частот позволил предложить простые формулы, включающие только параметры  $\ell_1$  и  $\ell_2$  для вычисления собственной частоты с погрешностью не более 4%. Формулы приведены для трех случаев нерегулярности: по длине, по жесткости, по погонной массе и справедливы во многих случаях и для систем существенно нерегулярных.

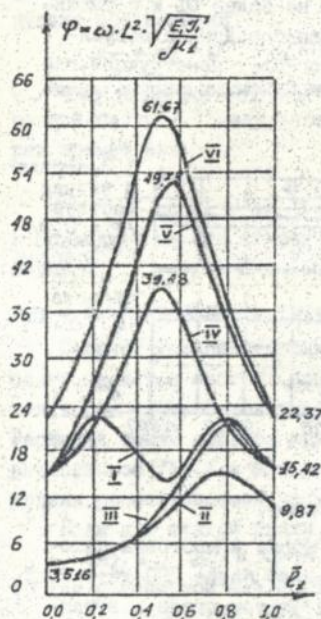


Рис. 14

1. Прежде всего следует отметить, что рассмотренное нами ранее явление раздвоения форм и равенства частот при "критической" жесткости упругих опор, как оказалось, присуще не всем расчетным схемам. Указанное явление определенно имеет место только для полностью регулярных балок / в том числе и по граничным условиям/. Даже при незначительной нерегулярности по длине пролетов у полностью регулярных балок, учитывая и закрепление концов, указанное явление равенства частот исчезает.

2. Для нерегулярных балок /по граничным условиям/ указанное явление

Продолжая начатое исследование с учетом выявленных на первом этапе особенностей, предложенных формул, были исследованы уравнения для регулярных и нерегулярных расчетных схем на упругих опорах. На данном этапе введено новое понятие приведенной относительной жесткости упругой опоры

$$c'' = \frac{c'}{\ell_1^3} = \frac{c_0 \ell_1^3}{E J_1} \quad / 37 /$$

которая зависит от полной длины неразрезной балки и жесткости только первого пролета. Указанное обстоятельство существенно повысило эффективность исследования нерегулярностей.

Характер изменения частотного параметра  $\lambda_1^2 / \bar{E}_2^2$  для регулярной балки и нерегулярной /  $\bar{E}_1 = 0,45$  / виден из графика для одной из расчетных схем / рис. 15 /.

Общие выводы по результатам исследования балок на упругих опорах существенно отличаются от выводов для балок на жестких опорах.

ние может иметь место только при строго определенном положении средней опоры.

3. При малых значениях приведенной относительной жесткости опор незначительная нерегулярность по длинам пролетов, жесткостным и весовым характеристикам, мало влияет на изменение собственных частот основного тона. В большей степени влияние сказывается на симметричных по граничным условиям балках.

4. Для расчетных схем, имеющих две и более упругих опор, отклонение одной из них от регулярности до 25 % при расчете ее как регулярной, приводит к погрешности в определении частоты не более 5% и с увеличением количества пролетов погрешность уменьшается. Данное обстоятельство очень важно при расчете реальных мостовых конструкций, где опоры, как правило /особенно в горизонтальной плоскости/, имеют разную жесткость.

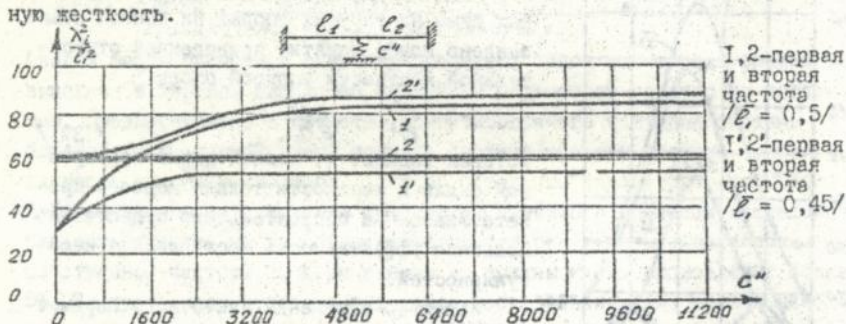


Рис. 15.

### 3. Устойчивость упругих систем /статическая/.

Проблема устойчивости конструкций, в том числе и мостовых, находящихся под воздействием внешних сил насчитывает более 200 лет. Этой проблеме отданы усилия многих исследователей, в том числе и выдающихся ученых. Основы теории устойчивости упругих систем были заложены еще в трудах Л.Эйлера и Лагранжа. Нельзя не отметить вклад в ее дальнейшее развитие таких ученых как Ф.С.Ясинский, И.Г.Бубнов, Н.К.Снитко, А.С.Вольмир, В.В.Болотин, И.И.Гольденблат, Г.Ю.Джанелидзе, А.Р.Ржаницин, А.Ф.Смирнов, П.Прусаков, С.З.Динкевич, С.Д.Лейтес, А.В.Перельмутер, С.Я.Ляхович, Н.В.Корноухов и многие другие.

#### 3.1. Уравнение устойчивости регулярного упруго опертого "модульного" стержня.

Применяя динамический способ исследования задач устойчивости/ при

$\omega \rightarrow 0, N \rightarrow N_p$  непосредственно из приведенных в предыдущем разделе уравнений, записанных с учетом действия продольных сил, путем предельного перехода приходим к уравнениям устойчивости, позволяющим рассмотреть ряд важных расчетных моделей и решить широкий круг практических задач мостостроения и строительной механики.

Полагая в общем уравнении /6 / для колебаний упруго опертого стержня, названного нами "модульным",  $\tau = 0$ ,  $\kappa_x = \infty$ ,  $\omega_k = 0$  / следовательно и  $\lambda_k = 0$  / имеем для основных параметров уравнения следующие соотношения

$$f_i = d_i = 0, \quad \kappa_i = \alpha_i = \sqrt{\frac{NE^2}{E_j J_j}}$$

С учетом данных соотношений уравнение устойчивости регулярной неразрезной балки / "модульного" стержня / на промежуточных упругих опорах примет вид

$$\frac{1}{1 - \cos \beta_i} - \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i \cdot (\cos \alpha_i - \cos \beta_i)} = \frac{\alpha_i^2}{c'} \quad / 38 /$$

и позволяет на его основе рассмотреть устойчивость более сложных моделей.

### 3.2. Устойчивость слоистых систем, перекрестных балок.

Перенос указанного подхода и полученных решений на перекрестные балки, слоистые системы, позволяет нам к тому же рассмотреть и те случаи, когда часть балок указанных моделей сжата, а часть растянута. Расширяя таким образом круг решаемых задач, можно записать уравнение, аналогичное /38 / и для растянутой балки, находящейся в составе модели, рассчитываемой на устойчивость в целом.

Если для сжатой балки уравнение /33 / получено при

$$d_{ij} = 0, \quad \alpha_{ij}^2 = \frac{NE_{ij}^2}{E_j J_j} \quad (\kappa_{ij} = \alpha_{ij}, \quad d_{ij} = f_{ij}),$$

то для растянутой балки решение получаем при иных соотношениях

$$\alpha_{ij} = 0, \quad d_{ij}^2 = \frac{NE_{ij}^2}{E_j J_j} \quad (\kappa_{ij} = \alpha_{ij}, \quad d_{ij} = f_{ij})$$

в виде, аналогичном /38 /

$$\frac{\text{sh } d_{ij}}{d_{ij} \cdot (\text{ch } d_{ij} - \cos \beta_i)} - \frac{1}{1 - \cos \beta_i} = \frac{d_{ij}^2}{c'} \quad / 39 /$$

Для балок, связанных упругим слоем, использованы уравнения /19 / и / 20 /, переходя к пределу.

Независимо от характера решаемой задачи / перекрестные балки, слоистые системы, пластины и др. / во всех случаях система уравнений сводится к нахождению одного параметра  $\alpha_{ii}^2$  с учетом соотношений

$$a_{is}^2 = \frac{N_s \ell^2}{E_s J_s}, \quad a_{ij}^2 = \alpha_{is}^2 \cdot \frac{N_j \cdot E_s J_s}{N_s \cdot E_j J_j} = \alpha_{is}^2 \cdot b_j. \quad / 40 /$$

В этом случае, получаемая система уравнений, содержит как и / 32 /  $\kappa - 1$  неизвестное  $\alpha_j$  и  $\kappa$  неизвестных параметров  $a_{ij}$  для каждой из форм потери устойчивости и позволяет найти все  $\kappa - 1$  соотношений амплитуд форм потери устойчивости и параметр критической силы. Непосредственно критическая сила определяется по формуле

$$N_{кр} = \frac{a_{is}^2 \cdot E_s J_s}{\ell^2}. \quad / 41 /$$

### 3.2.1. Устойчивость перекрестных балок.

Для системы перекрестных балок, состоящей из  $n - 1$  балок одного направления и  $m - 1$  балок другого направления скатых продольными силами, используя решение полученное для собственных колебаний / 22 / легко получаем уравнение устойчивости в виде

$$\frac{1}{1 - \cos \beta_i} - \frac{\sin \alpha_{si}}{\alpha_{si} (\cos \alpha_{si} - \cos \beta_i)} + \frac{E_s J_s \cdot \ell^2 \cdot a_{ij}^2}{E_s J_s \cdot \ell^2 \cdot a_{ij}^2} = 0. \quad / 42 /$$

При этом решении легко распространяются на всевозможные комбинации скатых и растянутых балок любого из направлений. В случае, если в / 42 / балки одного из направлений растянуты, то для этого направления выражение в скобках необходимо заменить левой частью формулы / 39 /. Аналогично решаются задачи об устойчивости перекрестных балок на сплошном упругом основании в том числе и с дополнительными упругими опорами в местах пересечения, используя решения / 22 / и / 27 /.

### 3.2.2. Устойчивость слоистых систем.

Для слоистой системы, состоящей из  $m$  неразрезных регулярных балок, связанных упругими опорами, получаем систему уравнений вида / 38 /

$$\frac{1}{1 - \cos \beta_i} - \frac{\sin \alpha_{ij}}{\alpha_{ij} (\cos \alpha_{ij} - \cos \beta_i)} = \frac{a_{ij}^2}{\alpha_{ij}^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m. \quad / 43 /$$

Взаимосвязь слоев осуществляется, как и при свободных колебаниях, через упругие опоры, относительная жесткость которых находится по выражению / 31 /. Для пакета балок, соединенных между собой упругим слоем, решение получаем в виде, позволяющем непосредственно, решать систему обычных алгебраических уравнений, находить критическую силу. Как получившая самое широкое распространение, нами детально проанализирована устойчивость трехслойной балки с учетом всевозможных комбинаций растягивающих и сжимающих продольных сил. В качестве

модели исследования балки связаны упругим слоем, а уравнение устойчивости имеет вид

$$2c_j \pm a_{ij}^2 \cdot \beta_i^2 + \beta_i^4 = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m. \quad / 44 /$$

Подставляя в /44/  $j = 1, 2$  приходим к следующим трем уравнениям соответственно для схем: обе балки сжаты; одна балка сжата, а другая-растянута; одна балка сжата, а другая не подвержена действию продольных сил

$$a_{11}^2 \cdot b \cdot \beta_1^2 - a_{11}^2 \cdot (bc_1 + c_2 + \beta_1^4 + b \cdot \beta_1^4) + \beta_1^2 \cdot (c_1' + c_2' + \beta_1^4) = 0,$$

$$a_{11}^2 \cdot b \cdot \beta_1^2 + a_{12}^2 \cdot (c_2' - b \cdot c_1' + \beta_1^2 - b \cdot \beta_1^4) - \beta_1^2 \cdot (c_1' + c_2' + \beta_1^4) = 0, \quad / 45 /$$

$$a_{11}^2 \cdot (c_2' + \beta_1^4) - \beta_1^2 \cdot (c_1' + c_2' + \beta_1^4) = 0.$$

В работах автора дан детальный анализ устойчивости указанных расчетных моделей, проведен анализ влияния на устойчивость сдвигов. В частности, решение для трехслойной балки, у которой одна из балок не подвержена действию продольных сил, приводит нас к решению проблемы устойчивости внецентрично сжатого стержня / при  $G_{ij,j=1} = \infty$  /. Аналогично можно поступить и для многослойного стержня, нагрузив его продольными силами по всем стержням, а затем положив ряд сил равными нулю. Этот же подход можно использовать и для решения частных задач устойчивости составных стержней / допустим в модели А.Р. Рзаницына для отдельных расчетных моделей не учитывать связи сдвига/.

### 3. 3. "Критическая" жесткость упругих опор при потере устойчивости.

Исследование явления раздвоения форм потери устойчивости при "критической" жесткости упругих опор дает нам значение для верхней границы при равенстве параметра критической силы  $a_1$  для форм  $i=n$  и  $i = n-1$ .

$$C_{кр}^i(\theta) = (\kappa \pi)^2 \cdot \left[ 1 - \cos \frac{\kappa \pi}{n} \cdot (n-1) \right]. \quad / 46 /$$

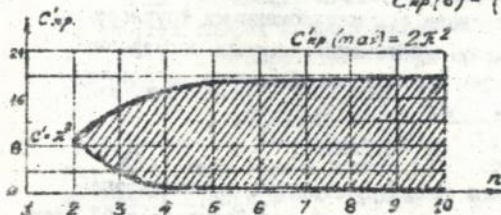


Рис. 10

Левая граница характеризуется точкой пересечения верхней и нижней ветвей при  $n = 2$ . Максимальное значение для верхней границы характеризуется величиной  $2\pi^2$ . Следует заметить, что при потере устойчивости зона "критических" жесткостей значительно уже зоны при свободных колебаниях / рис. 10 / и раздвоение форм потери устойчивости

зона "критических" жесткостей значительно уже зоны при свободных колебаниях / рис. 10 / и раздвоение форм потери устойчивости

невозможно уже при относительной жесткости упругих опор равной 19,72.

### 3.4. Решение практических задач устойчивости.

Решение практических задач устойчивости конструкций в целом и мостовых в частности связано с определенными трудностями и в большинстве случаев устойчивость многопролетных элементов или конструкций проводится по упрощенным расчетным схемам. Предлагаемые решения позволяют например рассматривать устойчивость продольных балок, верхнего пояса ферм как многопролетных систем и применять их в проектной практике. Конкретная задача в такой постановке сформулирована нами как нахождение минимальной жесткости упругих опор / связи между балками или поясами / до потери устойчивости, практическое значение имеют и другие, рассмотренные ниже задачи.

#### 3.4.1. Об устойчивом коэффициенте отпорности.

В известных работах И.Г.Бубнова и Н.К.Снитко по устойчивости аналогичных систем серьезные трудности встречается определение, так называемого, коэффициента отпорности. По И.Г.Бубнову он в общем виде равен

$$C_0 = \alpha \cdot \frac{N_{кр}}{l} = \alpha \cdot \frac{\pi^2 \cdot E_j \cdot J_j}{l^3} \quad / 47 /$$

Трудности связаны с определением коэффициента  $\alpha$  в / 47 /. И.Г.Бубнов для его определения составляет двояксимметричный определитель, который затем раскладывает в произведение двух определителей, из которых меньший корень дает следующий

$$\begin{vmatrix} n-2-\mu & n-4 & \dots & 1 \\ n-4 & 2(n-4)-\mu & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & \frac{n-1}{2-\mu} \end{vmatrix} \quad / 48 /$$

Раскрывая определитель в итоге приходим к уравнению  $(n-1):2$  степени относительно  $\mu = \frac{\alpha}{n}$ . Данное решение очень громоздко особенно при больших значениях  $n$ . Именно в связи с вышеизложенными трудностями Н.К.Снитко решает указанную задачу приближенно, заменяя неразрезную многопролетную балку шарнирной цепью и для коэффициента  $\alpha$  получает простое, но приближенное, решение

$$\alpha = \frac{4n-6}{n-1} \quad / 49 /$$

Автором указанная задача решена в точной постановке с использованием полученных в предыдущем параграфе решений для "критической" жесткости упругих опор. Верхняя граница "критической" жесткости соответствует тому положению, когда осадки на опорах равны нулю, а сама величина "критической" жесткости определяется выражением

$$C'_{кр}(b) = (\kappa\pi)^2 \cdot \left[ 1 - \cos \frac{\pi}{n} \cdot (n-1) \right] \quad / 50 /$$

Принимая для первой зоны формы потери устойчивости  $\kappa = I$  и учитывая, что относительная жесткость равна  $c' = c_0 \rho^3 / 2EJ$ , имеем для жесткости промежуточной упругой опоры в общем виде выражение

$$c_0 = \frac{2\pi^2 [1 - \cos \frac{\pi}{n}(n-1)]}{\rho^3} \cdot EJ \quad / 51 /$$

Приравнявая /47/ и /51/, получаем точное решение для коэффициента

$$\alpha = 2 \cdot [1 - \cos \frac{\pi}{n}(n-1)] \quad / 52 /$$

В табл. I. приведены результаты расчетов по трем указанным методам значений коэффициента  $\alpha$

Таблица I.

Число пролетов	2	3	4	5	6	9	II	$\infty$
Методика	Значения коэффициента $\alpha$							
И.Г. Бубнов	2,00	3,00	3,41	3,62	3,74	3,83	3,92	4,00
Н.К. Снитко	2,00	3,00	3,33	3,50	3,60	3,75	3,90	4,00
Автора	2,00	3,00	3,41	3,62	3,73	3,83	3,92	4,00

Как видно расчеты И.Г. Бубнова и автора совпадают абсолютно.

### 3.4.2. Устойчивость сжатого пояса открытого моста.

Применение полученных решений позволило решить и другую, известную в литературе, задачу Ф.С. Косинского об устойчивости сжатого пояса открытого моста. Указанная задача решалась многими авторами. Сошлемся лишь на решения Н.К. Снитко, который для ее решения использовал метод начальных параметров и сравнивал решение с методом моментов с использованием начала возможных перемещений.

Наши разработки позволяют рассмотреть две расчетные схемы: балка на упругих опорах и трехслойная балка. Используя уже известное решение / 33 / для многопролетной балки на упругих опорах и записывая для относительной жесткости упругих опор /стоек / выражение / 53 /

$$c' = \frac{6EJ_{поп} \cdot EJ_{ст} \cdot \rho^3}{h^2 \cdot (3E_{поп} \cdot EJ_{ст} + 2h \cdot EJ_{поп}) \cdot 2EJ_n} \quad / 53 /$$

где  $\rho_n$  - длина панели моста,  $EJ_n$  - жесткость верхнего пояса,  $EJ_{ст}$  - жесткость стойки,  $E_{поп}$  - длина поперечной балки,  $EJ_{поп}$  - жесткость поперечной балки, подставляя численные значения примера, приведенного в работе Н.К. Снитко, получены следующие сравнительные результаты по трем формам потери устойчивости / табл. 2 /. Н.К. Снитко приводит два результата: первый - методом начальных параметров и второй - методом моментов с использованием начала возможных перемещений.

Количество пролетов	Номер формы потери устойчивости	Значения критической силы / тс. /		
		По / 38 /	Н.К.Снитко	Н.К.Снитко
3	1	8047,4	7853,0	-
	2	4650,3	4650,0	4650,0
	3	6503,2	-	-

### 3.4.3. Минимальная жесткость упругих опор до потери устойчивости.

Выполненный комплекс расчетов по уравнению / 38 / при переменных параметрах  $c'$ ,  $i$ ,  $n$  позволял построить график-номограмму изменения параметра критической силы / аналогичный графику-номограмме рис.2 для собственных частот/, на котором четко прослеживается одна важная особенность. Для каждого фиксированного значения трех параметров  $c'$ ,  $i$ ,  $n$  на графике имеется также вполне определенное значение параметра критической силы, а следовательно и минимального значения самой критической силы, которая и является объектом изучения при расчетах на устойчивость. Решение нетрудно получить, приравняв первую производную от указанного параметра в выражении / 38 / по переменной  $i/n$ . Полученное решение / 54 /

$$\frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} = \left( \frac{\cos \alpha_i - \cos \beta_i}{1 - \cos \beta_i} \right)^2 \quad / 54 /$$

позволяет нам получить не только значение критической силы/минимальное/, но сразу форму по которой произойдет потеря устойчивости при минимальном значении критической силы.

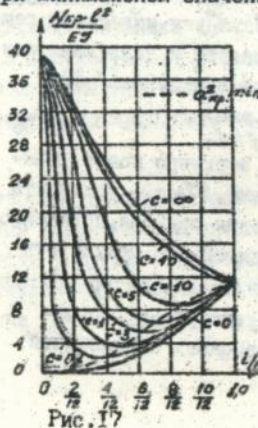


Рис. 17

Общий вид графика-номограммы для первой зоны сгущения параметра критической силы приведен на рис. 17, а для первых трех зон — на рис. 18. Решения для высших зон имеют чисто теоретическое значение и дальнейшего развития в работах автора не получили. В практических задачах проектирования мостовых конструкций чаще приходится решать задачу обратную вышеизложенной, т.е. по известной величине сжимающей силы для многопролетной неразрезной балки /стержня, стойки/ необходимо определить минимальную допустимую жесткость упругих опор, при которой балка/стержень, стойка/ будет еще устойчива.

Для данной задачи получено следующее простое решение

$$C'_{min} \geq \frac{\alpha_i^3 \cdot (1 - \cos \beta_i) \cdot (\cos \alpha_i - \cos \beta_i)}{\alpha_i \cdot (\cos \alpha_i - \cos \beta_i) - \sin \alpha_i \cdot (1 - \cos \beta_i)} \quad / 55 /$$

Данное неравенство дает возможность манипулируя параметрами рассчитываемого на устойчивость элемента / продольные балки, верхний пояс фермы, подкрановые балки и др. / найти оптимальное решение.

#### 4. Регулярные модели в расчетах собственных вертикальных колебаний мостов.

Разработанный обширный набор расчетных моделей на основе регулярных систем позволил применить их к решению сложных задач мостостроения и в частности к определению частот собственных вертикальных колебаний, являющихся основой динамики в целом. Учитывая, что большинство предлагаемых моделей применяются к реальным мостовым конструкциям впервые, особое значение приобрело изучение динамики на натуральных объектах.

$$\alpha_{кр}^2 = \frac{N_{кр} \cdot l^2}{EJ}$$

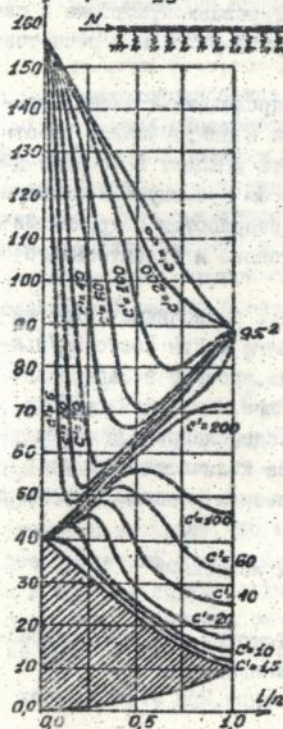


Рис. 18

#### 4.1. Экспериментальные исследования свободных колебаний мостов.

Экспериментальные исследования в составе приводимого научного доклада составляют один из самых значимых разделов. Эту значимость может оценить только экспериментатор, ибо проведение эксперимента на натурном объекте включает разработку программы, подготовку приборов и аппаратуры, запись процессов, обработку результатов. Подготовительная работа, исчисляемая месяцами, дает несколько цифр подтверждающих или опровергающих теорию.

Эксперименты по проверке предлагаемых теоретических решений проводились силами отраслевой НИЛ динамики мостов ДИГА при кафедре мостов. Автор в течение длительного периода времени возглавлял отделение испытаний, а затем работал в качестве руководителя лаборатории, что подтверждает его полную причастность к приводимым экспериментальным данным. Являясь единственной в стране лабораторией динамики мостов, оснащенной современной аппаратурой и приборами, использование обработки результатов методами математичес-

кой статистики, лаборатория позволяла получать устойчивые достоверные результаты.

Проводимые испытания в течение длительного времени обслуживали программы по заданиям НИИ: "Исследование статической и динамической работы мостов", "Исследование работы блок проезжей части железнодорожных мостов", "Исследование взаимодействия тяжелой подвижной нагрузки с пролетными строениями при высоких скоростях движения". Несколько сотен мостов, испытанных лабораторией, позволили накопить обширный материал по собственным частотам колебаний мостов различных систем, динамическому коэффициенту и др., послуживших базой для проверки теоретических решений, предложить практические модели для динамических расчетов.

С введением в СНиП 2.05.03-84 ограничений по периодам собственных вертикальных и горизонтальных колебаний мостов, крайне важным стал вопрос точного определения собственной частоты на стадии проектирования. Это повысило ответственность проектировщиков, которые в свою очередь хотели бы иметь, особенно на стадии предварительных расчетов, простой аппарат и к тому же надежный.

Самой обширной тематикой с точки зрения проведенных экспериментов следует считать "Исследование статической и динамической работы мостов". По указанному направлению в институте выходит в течение длительного периода межвузовский сборник, в котором публикуются экспериментальные и экспериментально-теоретические разработки сотрудников кафедры, отраслевой лаборатории и кафедр мостового и строительного направления транспортных ВУЗов страны.

География и значимость объектов, на которых проводились эксперименты, говорят сами за себя: крупные неразрезные мосты Ростова, Ульяновска, Астрахани, Архангельска, Днепропетровска, а также в Запорожье, Киеве, Днепропетровске, вантовое и висячие в Риге, Дензе, Кривом Роге, Киеве, раскрывающиеся и разводные в Калининграде, Клайпедо, Днепропетровске, Кременчуге, Ростове, Астрахани и большое количество мостов с разрезными пролетными строениями на сети железных и автомобильных дорог.

#### 4.2. Определение собственных вертикальных колебаний мостов и конструкций.

Результаты теоретических решений в виде готовых моделей, полукрепленные многочисленными экспериментальными данными, применены для широкого класса практических задач мостостроения. При этом во всех

случаях автор не довольствовался сравнением теоретических решений с экспериментом, а для сравнения проводилась проверка расчета другими методами и способами. В некоторых случаях данные заимствовались из зарубежной и советской научной литературы /примеры расчета, экспериментальные данные /.

#### 4.2.1. Балки проезжей части железнодорожных мостов.

Прежде всего полученные теоретические решения и расчетные модели были применены к исследованию динамической работы балок проезжей части железнодорожных мостов и в частности для определения частот и форм собственных вертикальных колебаний. Начало исследований автора совпало с пиком работ по данной тематике по заданию МПС. Именно на данной конструкции было проверено большинство расчетных моделей, изучено влияние различных факторов. При выборе оптимальной расчетной модели были рассмотрены три:

- $\alpha$ -пролетная неразрезная регулярная балка с дополнительными сосредоточенными массами в местах упругих опор, с учетом инерции вращения продольных балок, сдвигов и продольных сил/роль упругих опор выполняют поперечные балки совместно с элементами главных ферм, сосредоточенные массы - сами поперечные балки/;
- трехслойная балка/ферма, поперечные балки, продольные балки/;
- система перекрестных балок/ продольные и поперечные балки/.

Расчеты были выполнены для большого количества объектов и из имеющегося обширного материала в качестве примеров взяты два объекта, проезжая часть которых существенно различна. Для краткости изложения данные расчетов сведены в табл.3.

Жесткость упругой опоры/поперечной балки/, определенная с учетом совместной работы с элементами главных ферм, находится по формуле

$$c' = \frac{3l_{np}^3}{\alpha^2 \cdot (3l_n - 4\alpha) \cdot m} \cdot \frac{J_n}{J_{np}}, \quad / 56 /$$

где  $J_n$ ,  $J_{np}$ ,  $l_n$ ,  $l_{np}$  - соответственно моменты инерции и длины поперечной и продольной балок,  $\alpha$  - расстояние от оси фермы до оси продольной балки,  $m$  - коэффициент, равный 0,95, учитывающий влияние элементов главной фермы. Результаты расчета по указанным расчетным схемам показывают, что лучший, практически одинаковый, результат дают две расчетные схемы: балка на упругих опорах и трехслойная балка и в том и в другом случае с учетом всего количества панелей и всех факторов. В поисках оптимального соотношения элементов балочной клетки можно исходить из равенства нулю выражения в знаменателе правой

части, т.е.  $c' = \alpha \lambda_2^3$ . При соблюдении данного равенства балочная клетка колеблется как балка на двух опорах пролетом  $L$ .

Таблица 3.

Основные параметры и характеристики	Размерн.	ОБЪЕКТЫ	
		I	II
Пролет фермы	м	55,0	32,5
Расположение балок		В одном уровне Стальное	
Число панелей/длина панели	шт/м	10/5,5	12/0,475
Жесткость поперечной балки / $c'$ /		21,30	111,4
Коэффициент сосредоточенной массы $\alpha$		0,127	0,093
Экспериментальное значение частоты	Гц	20,50	42,00
Частота без учета факторов, с учетом:			
- трех панелей	"-	24,30	40,60
- 4 панелей	"-	23,65	42,60
Частота с учетом массы поперечной балки и 4 панелей	"-	21,30	41,20
Частота с учетом всех факторов	"-	21,05	41,30
Система перекрестных балок с учетом факторов	"-	22,25	30,95
Система перекрестных балок / жесткость упругих опор "размазна" /	"-	22,84	43,41
Трехслойная балка/дискретные опоры, с учетом факторов /	"-	30,95	41,90

Используя полученные решения построена форма колебаний балочной клетки как модели перекрестных балок, соответствующая нижней частоте при  $i = 1$  и  $j = 1$  представлена на рис. 19. для объекта II таблицы 3.

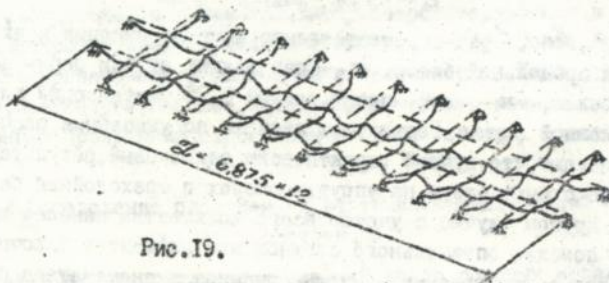


Рис. 19.

#### 4.2.2. Вантовые системы.

Распространение теоретических решений, полученных для систем близких к регулярным, на вантовые мосты логично. Широкое внедрение вантовых систем в практику проектирования и строительства, начатое примерно с 1925 года, заметно продвинулось благодаря трудам видных ученых и проектировщиков: Рабиновича И.А., Стрелецкого Н.Н., Кутльцовы Е.И., Никифорова С.И., Росновского В.А., Вахуркина В.М., Попова Г.Д., Киреевко В.И. и др. В это же время делаются попытки изучения динамической работы вантовых мостов и в нашей стране эта работа наиболее активно велась в период более поздний 60-80 годы. В теорию динамического расчета указанного типа мостов внесли свой достойный вклад Эйхс Г.Н., Казакевич А.И., Ланьин А.И., Сефранов В.С., Смирнов В.А., Киреевко В.И., Барченков А.Г., Ноталкин А.А., Брагин Г.В. и др.

Для данной конструкции в качестве расчетной схемы принимаем, как и большинство исследователей, балку на упругих опорах/вантах/ хотя для получения спектра частот вполне приемлема и схема в виде балки на сплошном упругом основании. Расчетная схема дана на рис.20.

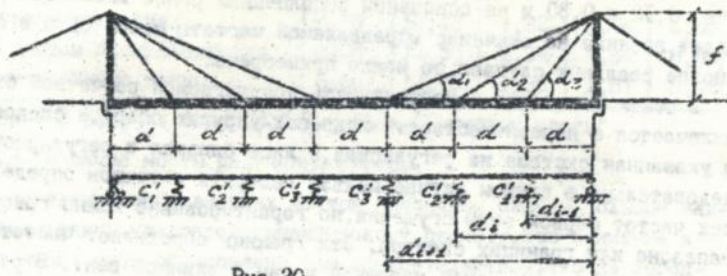


Рис.20.

Жесткость упругой опоры / ванта/ определена суммированием вертикальных перемещений крайней ванта /нулевой/,  $\kappa$ -той ванта и пилона. Приравняв суммарное перемещение единице для относительной жесткости ванта/упругой опоры/ получено выражение

$$C_k^0 = \frac{\sin^2 \alpha_k \cdot \cos^2 \alpha_0}{i_k \cdot \cos^2 \alpha_0 + i_0 \cdot \cos^2 \alpha_k} \cdot \frac{d^3}{E_s J_s}, \quad / 57 /$$

где  $\alpha_0$  и  $\alpha_k$  - угол наклона и длина нулевой ванта;  $\alpha_k$  и  $\alpha_0$  - угол наклона и длина  $\kappa$ -той ванта;  $d$  - расстояние между вантами /панель/;  $E_s$  и  $J_s$  - модуль упругости и момент инерции балки жесткости;  $J_0$ ,  $J_k$ ,  $E_0$ ,  $E_k$  - соответственно площади сечения и модули упругости нулевой и  $\kappa$ -той ванта. Кроме того обозначено:

$$i_k = \frac{J_k}{E_k F_k}, \quad i_0 = \frac{J_0}{E_0 F_0}.$$

Учитывая далее свойство консервативных систем о равенстве максимальных значений кинетической и потенциальной энергий и, принимая форму колебаний в виде

$$y(x, t) = y_0 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot x \cdot l \cdot \sin(\omega_i t + \alpha_n), \quad / 58 /$$

приходим к решению относительно круговой частоты по  $i$ -той форме

$$\omega_i^2 = \beta_i^2 \cdot \frac{E_s J_s}{\mu \alpha^4} + \beta_i^2 \cdot \frac{g}{2f \alpha^2} \cdot \sum \alpha_n \cdot (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}), \quad / 59 /$$

где  $\alpha_n$  - горизонтальная проекция  $n$ -той ванты;  $f$  - расстояние от балки жесткости до точки закрепления ванты.

Как видно из /59/ первый член формулы отражает лишь упругие свойства балки жесткости, второй - учитывает наличие в системе распора, передающегося на балку дискретно, а само "подвешивание" балки на вантах формулой не учтено. Учет "подвешивания" осуществляем путем замены  $\beta_i^2$  на  $\lambda_i^2$  и  $\beta_i^2$  на  $\lambda_i^2$ , где  $\lambda_i$  - частотный параметр, определенный по уравнению балки на упругих опорах /вантах/.

Вычисление параметра продольной силы для нескольких реальных объектов вантовых мостов, свидетельствует о том, что он находится в диапазоне  $0,12 \div 0,30$  и на основании выполненных ранее исследований оказывает влияние на значение определяемой частоты менее 5% и в большинстве реальных случаев ею можно пренебречь.

В общем некоторая некорректность предлагаемой расчетной схемы заключается в неравножесткости подвесок/упругих опор/, а следовательно указанная система не регулярная, а лишь близкая к регулярной. Следовательно в данном случае нельзя говорить о точном определении всех частот первой зоны сгущения, но гарантированно можно говорить о диапазоне или границах спектра. Эти границы определяют частоты вычисленные по жесткости самой короткой и самой длинной вант. В реальных расчетах указанные трудности отпадают, поскольку используя уравнение по формам колебаний, расчеты ведем по жесткости ванты, которая при данной форме имеет максимальные перемещения.

В итоге предлагается два, практически равноценных, способа определения собственных частот. Первый: по уравнению /7/ при вычисленных значениях относительной жесткости упругих опор или по графику-номограмме находим параметр  $\lambda_i$  и затем определяем частоту по формуле

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i^2}{\alpha^4} \cdot \frac{E_s J_s}{\mu} + \frac{\lambda_i^2}{\alpha^2} \cdot \frac{g}{2f} \cdot \sum \alpha_n \cdot (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1})}. \quad / 60 /$$

Второй: по величине относительной жесткости ванты и величине найденной продольной силы в балке жесткости по уравнению для балки на упругих опорах с учетом продольной силы /6/, находим  $\lambda_i$  и затем по

обычной формуле круговую частоту  $\omega_i = \lambda_i^2 \cdot \sqrt{\frac{E_s J_s}{\mu \alpha^4}}$ .

Предлагаемый подход и решения проверены на трех реальных объектах, по которым имеются экспериментальные данные и расчеты другими способами и методиками. Данные расчетов сведены в табл. 4.

Таблица 4.

Методика определения собственной частоты	Линейная частота в Гц.				
	модель в 1:20 нат. величины		Мост в г. Киеве		III
	Номер формы колебаний				
	I	2	I	3	I
Энергетический метод без учета продольных сил в балке жесткости и смещения пилона	28,70	31,00	2,06	2,20	-
Тоже с учетом	4,20	9,77	-	-	-
Методика Г.Н.Эйхе по точным уравнениям	-	-	1,36	2,27	8,67
Тоже по приближенным уравнен.	-	-	1,38	1,97	-
Методика данной работы/ без учета продольных сил/	6,70	12,43	1,32	1,74	8,35
Тоже с учетом продольных сил	6,78	12,56	1,34	1,84	8,40
Экспериментальные данные	6,50	12,70	1,38	1,81	8,42

Объект III взят из книги В.И.Кирееенко "Вантовые мосты".

#### 4.2.3. Висячие мосты различных систем.

При проектировании висячих мостов различных систем большое внимание обоснованно уделяется динамическому расчету. Это внимание к мостам данного типа обусловлено тем обстоятельством, что на сегодняшний день именно висячие мосты, являясь самыми протяженными, остаются самыми уязвимыми с точки зрения динамической и аэродинамической устойчивости. При этом основными расчетными параметрами при динамических расчетах остаются частоты и формы собственных колебаний. Наиболее существенный вклад в теорию динамического расчета висячих мостов внесли видные советские и зарубежные ученые/что в свою очередь говорит о серьезности проблемы/: Ф.Блейх, А.В.Смирнов, С.П.Тимошенко, В.К.Кацурун, С.А.Цаплин, И.М.Гольденблат, К.К.Якобсон, А.Хираи, Н.М.Кирсанов, М.И.Казакевич, А.В.Червяков, А.Б.Неласов, А.Пагсли, М.Ито, К.Д.Кроссуайт, В.С.Сафронов и др.

Нельзя сказать, что данная проблема на сегодня решена досконально. Можно назвать лишь два недостатка существующих методик, которые однако существенно влияют на качество проектирования всяческих мостов. Предлагаемая простая зависимость для определения собственной частоты всячего моста

$$\omega_i^2 = \beta_i^4 \cdot \frac{E_s J_s}{\mu d^4} + \beta_i^2 \cdot \frac{H_0}{\mu d^2}, \quad /61/$$

используемая проектировщиками для прикидочной оценки / в худшем случае для окончательного расчета / в большинстве случаев, особенно для гибких мостов, является лишь грубым нулевым приближением и может давать результаты, отличающиеся от точного решения, в несколько раз. Для трех всячих мостов, приведенных в качестве примеров в работе А. В. Червякова, показано, что нулевое приближение по формуле / 61 / отличается от точного решения соответственно в 10, 40 и 6 раз. Тем не менее проектировщик нуждается в таком простом способе определения собственных частот. Такой способ предлагается в данной работе и позволяет проектировщику не определять частоту для уже запроектированной конструкции, а проектировать ее с заранее обусловленным диапазоном частот, оперируя при этом не периодами колебаний и частотами, а лишь жесткостными и линейными характеристиками. Проектировщику предоставляется широкая возможность поиска оптимального решения.

Учитывая указанные недостатки наряду с тем обстоятельством, что при некоторых соотношениях между частотой возмущающей силы и частотой собственных колебаний или вблизи этих соотношений, могут происходить значительные поперечные колебания резонанса, обычно называемые параметрическими колебаниями, можно с уверенностью констатировать, что основой динамики всячих мостов и других аналогичных систем, является правильное определение собственных частот.

Точное решение дифференциального уравнения свободных незатухающих колебаний всячего моста получено еще Ф. Блейхом, однако из-за сложности частотного трансцендентного уравнения широкого распространения в расчетной практике не получило.

Применяя для определения неизвестных постоянных метод Бубнова-Галеркина, В. А. Червяков получает более удобное решение в виде быстро сходящегося ряда, эквивалентное трансцендентному характеристическому уравнению, и решает его методом последовательных приближений. Достоинство предлагаемого им решения - надежность, недостаток - необходимость учета большого количества членов ряда и увеличивающаяся с каждым последующим приближением трудоемкость.

Как известно, дифференциальное уравнение свободных колебаний

систему: гибкая арка с балкой жесткости имеет тот же вид, что и уравнение колебаний висячего моста и, следовательно, на данную систему мы вправе автоматически распространить решения, предлагаемые для висячих мостов. Из публикаций по динамике данной системы можно отметить лишь ограниченное число работ А. Б. Неласова, А. И. Степановой, С. И. Конашенко, И. И. Казея, Б. Ф. Лесохина, И. А. Колесника, В. А. Червякова и др. Из них наиболее обстоятельными следует считать диссертацию С. И. Конашенко и монографию И. А. Колесника.

В пользу обоснования автором аналогии между колебаниями висячих мостов и балкой на упругих опорах можно назвать следующие доводы:

- подвески по длине пролета расположены на одинаковых расстояниях, что обеспечивает регулярность упругих опор по длине /на основании наших исследований именно регулярность по длинам пролетов является доминирующей/;
- балка жесткости, как правило, имеет постоянное сечение по всей длине и постоянную погонную массу;
- усилия в подвесках при любом положении нагрузки в пролете/или ее отсутствии/ равны;
- в трудах зарубежных исследователей /А. Пагсли, С. П. Тимошенко, К. Д. Кроссуайт и др./, рассматривавших кабель висячего моста как сплошное упругое основание для балки жесткости, была предложена следующая полуэмпирическая зависимость для модуля упругого основания

$$k_0 = \frac{g}{f_0} \cdot \alpha. \quad / 62 /$$

Большинство исследователей и проектировщиков для коэффициента  $\alpha$  дают диапазон  $\alpha = 10 \pm 12$ , в то время как А. Пагсли расширяет диапазон до  $\alpha = 9,3 \pm 20,0$ . Столь большая разница в значении  $\alpha$  привела к широкой дискуссии на специальном конгрессе. Представление висячего моста балкой на сплошном упругом основании очевидно позволяет нам применить расчетную схему в виде балки на упругих опорах, которая во всех случаях является схемой менее грубой по сравнению с первой;

-при параболическом очертании арки усилия во всех подвесках одинаковы, влияние самой арки на балку жесткости сводится к действию на балку со стороны арки ряда сил, сосредоточенных в местах крепления подвесок и зависящих от распора. При обратно-симметричных формах колебаний /  $i = 2, 4, 6, \dots, n-2$  / площадь линии прогиба равна нулю, распор в связи с этим не реализуется и балка жесткости колеблется с частотой простой балки пролетом  $L = n \cdot d$ .

Таким образом для расчета собственных частот висячих мостов и

системы гибкая арка с балкой жесткости предлагается единый подход, однако в связи с некоторыми особенностями отдельно рассмотрены следующие конструктивные формы: висячий однопролетный распорный мост / гибкий и жесткий/; висячие трехпролетные распорные и безраспорные мосты с разрезной и неразрезной балкой жесткости; распорная и безраспорная система гибкая арка с балкой жесткости; висячие трубопроводы / Рис.21/.

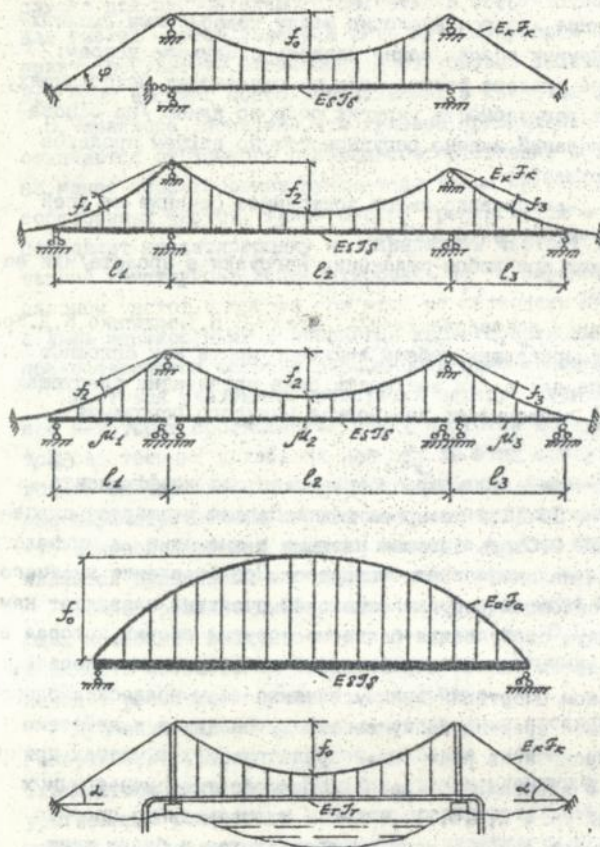


Рис.21

приведенную в работах В.К.Кацурина/гибкая нить, жесткая нить, балка, арка/.

При расчете и выводе уравнений собственных колебаний указанных систем использованы и введены следующие общие предположения.

1. Цепь висячего моста/арку/ рассматриваем как упругое основание с конечным числом упругих опор  $n$ , равных числу подвесок.

2. Расчеты для жесткости упругой опоры/подвески/ ведем раздельно для гибкого и жесткого кабеля по соответствующим методикам.

3. Вводим два предположения: кабель нерастяжим и растяжим.

4. Для оценки жесткости кабеля применяем классификацию

Расчеты для определения жесткости опор/подвесок/ проводим по методикам В.К.Кацурина и С.А.Цапина.

Кабель нерастяжим /методика В.К.Кацурина/.

В исходном состоянии постоянная нагрузка равномерно распределена по кабелю и распор от указанной нагрузки равен  $\mathcal{H}_0$ . При воздействии на упругую опору / подвеску/ единичной силы  $\mathcal{P}$ , распор изменится и станет равным  $\mathcal{H}_1$ . При этом кабель удлинится на величину  $\Delta \mathcal{L}$ , но учитывая, что кабель нерастяжим  $\Delta \mathcal{L} = 0$ , а следовательно разность распоров равна нулю  $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_0 = 0$ . В итоге для жесткости упругой опоры/подвески / получаем решение  $\mathcal{H}_0 = \frac{2\ell^2}{8f_0}$ ,  $\mathcal{H}_1 = \frac{2\ell^2}{8f_1} + \frac{2\mathcal{P}\ell}{8f_1}$ .

$$\mathcal{P} = \frac{2\ell}{2f_0} \cdot \sigma f (2f + 1), \quad c_0 = \frac{2\ell}{2f_0}. \quad / 63 /$$

Кабель нерастяжим/методика С.А.Цапина/.

По данной методике в общем случае распор от равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенных сил определяется по формуле

$$\mathcal{H} = \frac{\ell^2}{8f_0} \cdot \left[ 2 + \sum_j \mathcal{P}_k \cdot \frac{\ell}{2\ell} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \kappa \cdot a_k \right], \quad / 64 /$$

где  $\kappa$  - порядковый номер участка,  $a_k$  - расстояние от левой опоры до места приложения сосредоточенной силы  $\mathcal{P}_k$ .

Принимая вначале  $\mathcal{P}_k = 0$ , находим начальный распор  $\mathcal{H}_0$ . При действии на подвеску силы  $\mathcal{P}_k$  распор изменится и станет равным  $\mathcal{H}_1$ . Поступая далее аналогично, для жесткости упругой опоры/ средней/ имеем

$$c_0 = \frac{2g\ell}{\kappa \cdot f_0}. \quad / 65 /$$

Поскольку мы представили сплошное упругое основание как  $n$  упругих опор, то вместо коэффициента постели  $\kappa$  мы определяли жесткость упругой дискретной опоры  $c_0$ , которая по А.Пагсли согласно /62/ будет иметь вид  $c_0 = \alpha \cdot \frac{2g\ell}{\kappa \cdot f_0}$ . Приравняв значения /62/ к / 63 / и / 62 / к / 65 / для коэффициента соответственно по двум методикам имеем решения

$$\alpha = \frac{n}{2}, \quad \alpha = \frac{2n}{\kappa}. \quad / 66 /$$

А.Пагсли приводит верхнюю и нижнюю границы для данного коэффициента  
 - гибкого кабеля  $9,33 \pm 19,7$   
 - жесткого кабеля  $10,9 \pm 20,0$ .

Для четырех реальных объектов, проводимых в работах в качестве примеров, количество панелей  $n$  равно - 40; 27; 20; 10, т.е. для  $\alpha$  имеем тот же диапазон, который дает А.Пагсли.

Кабель растяжим.

Расчет с учетом растяжения кабеля ведем предполагая упругие опоры

также в местах подвесок. Сечение же кабеля/арки/ условно разбиваем в продольном направлении на  $n$  кабелей /арок/ и к каждому такому кабелю/арке/ присоединяем одну подвеску. Расчет ведем для одной такой системы "кабель - подвеска" расположенной в середине пролета, а затем оценим нерегулярность на основании наших предыдущих исследований.

Для системы гибкая арка с балкой жесткости по аналогии с предыдущим расчетом находим начальный распор и распор после приложения дополнительно силы  $P$ . Поскольку арка растяжима, то  $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_0 = \Delta \mathcal{L}$ . Указанное приращение распора вызовет соответствующее удлинение арки на величину  $\Delta \mathcal{L}$ , а изгиб арки вызовет исполнительный изгибающий момент и изменение распора. Записывая выражения для длины арки до загрузки и после загрузки и удлинения на  $\Delta \mathcal{L}$ , находим выражение для жесткости подвески/упругой опоры/

$$C_0 = \frac{4\ell}{2n f_0} - \frac{192 E_a J_a}{5 \ell^3 \cdot n} + \frac{64 f_0^2 E_a J_a}{3 \ell^3 n} \cdot \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_0^2}{\ell^2}\right). \quad (61)$$

Анализ показывает, что первый и второй члены выражения/61/ малы по сравнению с третьим и ими можно пренебречь.

Для всякого однопролетного моста с жестким кабелем, учитывая, что  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  и  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  с учетом длин оттяжек для жесткости упругой опоры/подвески/ получаем решение

$$C_0 = \frac{2\ell}{2n f_0} - \left[ \frac{192 E_a J_a}{5 \ell^3 \cdot n} - \frac{64 E_a J_a}{3 \ell^3 \cdot n} \cdot \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_0^2}{\ell^2}\right) \right] \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{(2\ell + \ell_2 \cos^2 \alpha)}. \quad (62)$$

где также можно пренебречь первым и вторым слагаемым.

Проверка предлагаемой методики и расчетных моделей и предположек выполнена на примерах трех объектов для всякого моста и двух объектов для системы гибкая арка с балкой жесткости. Данные по объектам сведены в табл. 5, а результаты расчетов в табл. 6. Пример III взят из работы В.А.Червякова, мосты I и II сооружены в г.Кривом Роге и Пенсе и испытаны с участием автора. Объект IV заимствован из той же работы В.А.Червякова, а У представляет собой модель в учебной лаборатории кафедры "Мосты" ДИИТа и подробные динамические характеристики которой были исследованы С.И.Конашенко.

Следует отметить, что при определении жесткости упругих опор /подвесок/ использовалась методика В.К.Мацурина без учета растяжения кабеля, дающая во всех случаях лучший результат.

По объекту У сравнение дано по методике С.И.Конашенко.

В табл. 6 в скобках приведены значения частот вычисленных с учетом продольной силы.

Параметр  $\lambda$  в таблице 6 представляет собой  $\lambda = \sqrt{\frac{E_a J_a}{\mu \ell^4}}$ .

Таблица 5.

Характеристики	Размерность	Номера объектов					Мультиплекс
		I	II	III	IV	V	
$l$	м	30,00	172,80	853,44	101,00	4,00	10 <sup>6</sup>
$f$	м	6,56	21,85	70,60	13,50	0,712	
$n$		40	16	27	17	18	
$cl$	м	2,00	10,60	31,61	6,00	0,3075	
$g$	гс/м	0,172	3,15	4,24	39,40	-	
$J_b$	см <sup>4</sup>	0,276	0,28	765,0	-	227,0	
$J_x (J_a)$	см <sup>2</sup>	10,30	-	1232,0	-	3,80	

Таблица 6.

Объект	Параметры			Круговая частота Гц.		
	$i$	$e'$	$A$	По предлагаемой методике	Данные и методика В.А.Червякова	Эксперимент
I	1	17,54	474,0	7,016	-	7,36
	2			12,930	-	13,00
II	1	342,0	26,55	2,476	-	2,512
	2			4,336	4,366	4,540
III	1	250,0	19,45	1,420	1,400	-
	3			2,756	2,704	-
	5			6,745	6,847	-
	7			13,00	13,11	-
	9			21,49	21,46	-
IV	1	2090	44,05	9,131/9,668	9,444	-
	2			6,018/6,018	6,132	-
	3			16,26/16,60	14,533	-
	4			24,07/24,07	24,515	-
	5			30,60/31,98	30,39	-
V	1	5120	976,9	47,470	45,040	-
	2			34,125	34,100	33,30

Применяя аналогичный подход к трехпролетным висячим распорным и безраспорным мостам с разрезной и неразрезной балкой жесткости, приходим к следующим результатам для жесткости упругих опор.

... Висячий трехпролетный распорный мост с разрезной балкой жесткости.

Исходя из равенства распоров в главном/среднем/ пролете и примыкающих, при проектировании полагают равенство отношений

$$\frac{q_1 \cdot l_1^2}{f_1} = \frac{q_2 \cdot l_2^2}{f_2} = \frac{q_3 \cdot l_3^2}{f_3},$$

что в общем случае для жесткости упругой опоры дает результат

$$C_0 = \frac{q_2 l_1^2}{2f_2} + \frac{q_1^2 \cdot l_1^2}{4q_2 \cdot l_2^2 \cdot f_1} + \frac{q_3^2 \cdot l_3^2}{4q_2 \cdot l_2^2 \cdot f_3}.$$

Учитывая, что обычно принимают  $q_1 = q_2 = q_3 = q$ ,  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ,  $f_1 = f_3$  для жесткости опоры имеем

$$C_0 = \frac{q l^2}{2f_2} + \frac{q l^3}{2f \cdot l^2}.$$

/ 69 /

Б. Висячий трехпролетный распорный мост с неразрезной балкой жесткости.

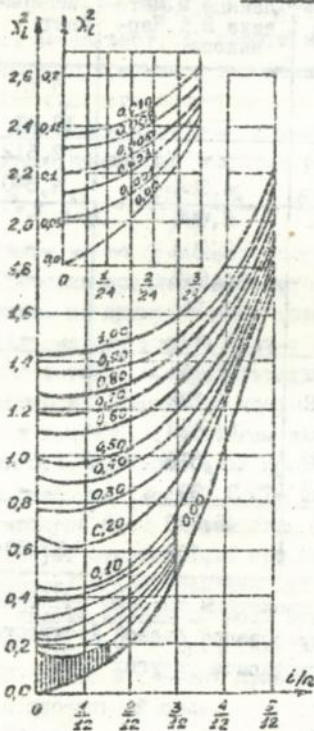


Рис. 22

Неразрезность балки жесткости и ее влияние на изменение частот исследовалась многими учеными: Ф.Блейхом, В.А.Червяковым, А.Хираи, М.Ито, К.К.Якобсон, Д.Б.Штейнманом и др. Все исследователи указывают, что неразрезность балки жесткости мало сказывается на изменении частот. Тем не менее большинство из них рекомендует учитывать данное обстоятельство различными поправочными коэффициентами. В частности К.К.Якобсон рекомендует вводить коэффициенты к частоте среднего пролета, однако при расчетах данная рекомендация приводит к завышению первой собственной частоты. Решая данную задачу по способу коэффициентов жесткости, Д.Б.Штейнман предлагает затем очень приближенные решения. Более убедительные обстоятельные исследования японских ученых М.Ито и А.Хираи на модели показали, что частоты висячего моста с разрезной и неразрезной балкой / до пяти пролетов / отличается не более чем на 2,5%. Это исследование и его выводы позволяют нам применить для данной системы решения полученные в предыдущем параграфе.

### В. Трехпролетный висячий мост с неразрезной балкой/безраспорный/.

Для жесткости упругой опоры в силе остается решение / 69 / за исключением того обстоятельства, что решение ведется по уравнению /6 / с учетом продольной силы.

Для определения частот висячих мостов всех систем предложен график-номограмма, позволяющий, не решая уравнения, определить все  $n$  параметров  $\lambda_L^2$  по известному значению относительной жесткости упругих опор / рис.22/.

Спробирование методики для трехпролетных висячих мостов проведено на примере двух объектов, один из которых взят из работы А.В.Червякова, а по мосту в г.Киеве кафедра располагает экспериментальными данными. Расчеты сведены в табл.7.

Таблица 7.

Особенности	Параметры			Круговая частота в Гц.		
	$\zeta$	$c \cdot 10^3$	$A$	По предлагаемой методике	Данные и методика Червякова А.	Эксперимент
Без учета примыкающих пролетов	1	5,56	11,22	1,1523	1,1917	-
	3			2,7194	2,8496	-
	5			6,8750	7,2271	-
С учетом примыкающих пролетов	1	6,65		1,2970	1,1917	-
	3			2,9172	2,8496	-
	5			7,0417	7,2271	-
Продольная сила не учтена	1	7,83	39,60	5,099	-	4,71
	2			5,038	-	5,02
Продольная сила учтена	1	7,83		4,830	-	4,71
	2			5,038	-	5,02

#### 4.2.4. Фермы железнодорожных мостов.

Пространственные конструкции ферм, состоящие из множества элементов взаимодействующих между собой при статическом и, тем более при динамическом, нагружении постоянно находятся под пристальным вниманием ученых и проектировщиков. Находясь в жестких условиях динамического воздействия, они требуют тщательного изучения характера их работы и корректировки конструктивных форм с целью экономии металла. Большой вклад в изучение динамической работы ферм внесли Н.Г.Бондарь, Ю.Г.Козьмин, З.Г.Ройтбурд, И.И.Казей, Б.Г.Коренев, В.П.Тарасенко,

С.М.Шашков, В.Вейтиг, Л.Фриба, Нгуен Нхи Кхай и др.

Исследование динамики разрезных и неразрезных ферм железнодорожных мостов, особенно при взаимодействии, требует учета не менее  $3n$  частот и форм собственных колебаний / где  $n$  — число пролетов неразрезной фермы/. Существует ряд простых эмпирических и полумпирических зависимостей, позволяющих с той или иной степенью точности определять собственные частоты фермы, однако все они дают в основном значение первой собственной частоты и тем более в очень малой степени пригодны для неразрезных ферм. Универсальный метод конечных элементов /МКЭ/ для определения частот неразрезного пролетного строения 132+154+132 м. требует семи часов машинного времени ЭВМ ЕС-1050 с предварительной подготовкой и последующим вводом около 8000 различных исходных данных. Ошибка в одном из параметров приводит к необходимости повторного расчета, а в худшем случае, если ошибка не обнаружена, приводит к неверному результату.

Задача была поставлена таким образом, чтобы охватив весь набор типовых пролетных строений, применяемых при строительстве на сети железных дорог, дать единую методику определения собственных частот, применив простейшую из возможных моделей. Понятно, что такая задача могла быть решена только путем сравнения решений по нескольким расчетным схемам и методикам.

Основными схемами, примененными для определения частот и форм собственных колебаний ферм, являлись:

- трехслойная балка с дискретными опорами или с упругим слоем / ферма в целом связана с продольными балками поперечными связями-поперечными балками, которые в свою очередь могут быть заменены упругим слоем /;
- система в виде пятислойной балки с дискретными упругими связями или упругими слоями/ верхний пояс фермы связан с нижним поясом промежуточными связями /подвески, стойки, раскосы/, а нижний пояс в свою очередь связан с продольными балками через поперечные балки / второй ярус упругих связей//. Аналогично упругие связи могут быть заменены упругим слоем;
- система близкая к регулярной/в свою очередь трехслойная и пятислойная/ применительно к типовым и нетиповым неразрезным неравнопролетным строениям.

В качестве основных уравнений использованы известные решения с учетом различных факторов для слоистых моделей. При использовании расчетной схемы в виде пятислойной балки приходим к системе трех трансцендент-

ных уравнений в случае дискретных связей и к системе трех алгебраических уравнений в случае упругого слоя. Неизвестными являются два коэффициента распределения амплитуд  $\alpha_2$  и  $\alpha_3 / \alpha_2 = 1$  и частотный параметр  $\lambda_{i,1}$ . Приведенный момент инерции получен с использованием известной формулы В.К.Кацурина для прогиба ферм. Расчетные схемы

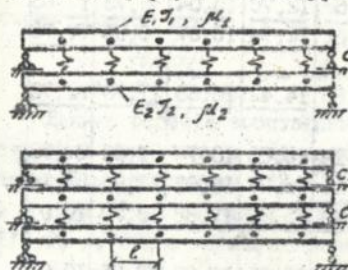


Рис. 23.

в виде трехслойной и пятислойной балки приведены на рис. 23. Жесткость упругих промежуточных связей  $C_{12}$  для существующих конструкций ферм является очень высокой и можно предположить, что их можно положить равными бесконечности, т.е. осуществить переход от пятислойной балки к трехслойной. Однако такое предположение также нуждается в проверке. Уже предварительный анализ показывает, что для данной конструкции существенно влияние инерции вращения и деформаций сдвига. С целью проверки предлагаемых расчетных моделей, а также оценки влияния различных факторов, в качестве объекта детального исследования, принято типовое металлическое пролетное строение со сквозными фермами  $l_p = 81,0$  м. проектировки Гипротрансмоста 1969 г. В связи с тем, что достоверных данных по высшим частотам не имеется, сравнение частот проводилось с расчетами по методу конечных элементов. Результаты расчетов сведены в таблицу 8.

В табл. 8. схема № 1 /МКЭ/ учитывает горизонтальные и вертикальные силы инерции элементов, схема № 2 /МКЭ/ учитывает только вертикальные силы инерции, в схеме № 3 /МКЭ/ жесткости стоек и подвесок приняты равными бесконечности, а в схеме № 4 /МКЭ/ жесткости стоек, подвесок и раскосов приняты равными  $\infty$ .

Выводы по результатам сравнительных расчетов свидетельствуют, что практически равноценные приемлемые результаты дает три расчетных схемы и естественно для дальнейших исследований можно применить простейшую из них: трехслойную балку с дискретными связями между фермой и продольными балками, а при расчетах, не требующих большого количества частот вполне приемлема счень простая расчетная схема в виде трехслойной балки с упругим слоем. Используя результаты расчетов, предложено несколько эмпирических зависимостей для вычисления высших частот по известному значению первой собственной частоты. Простейшая из них  $\gamma_{i,1} = \gamma_i \cdot 2,69 \sqrt{i^2}$  дает погрешность не более 5,3%.

Таблица 8.

Способ определения или расчетная схема	Линейная частота в Гц. по форме						
	1	2	3	4	5	6	7
МКЭ схема № 1	3,16	7,93	11,63	12,76	15,04	16,73	17,63
МКЭ схема № 2	3,26	7,56	11,62	12,74	15,07	16,94	17,75
5-ти слойная балка с дискретными связями	2,99	7,77	11,65	14,42	16,33	17,78	18,70
5-ти слойная балка с упругим слоем	3,00	7,86	12,14	15,65	18,77	21,82	24,98
МКЭ схема № 3	3,28	7,88	13,01	16,77	18,81	21,93	23,18
МКЭ схема № 3/ $c_{12} = \infty$ /	3,00	8,01	12,49	15,87	17,88	18,70	19,01
3-х слойная балка с дискретными связями	2,99	7,97	12,45	15,85	17,87	18,75	19,01
3-х слойная балка с упругим слоем	2,99	8,09	13,03	17,55	21,62	25,30	28,79
МКЭ схема № 4	4,09	14,21	25,05	29,72	32,16	33,74	34,97
5-ти слойная балка с дискретными связями без учета факторов	3,83	14,67	26,28	30,63	32,24	33,61	35,36
По приближенной зависимости/ $\nu_{i,r} = \nu_i/l + I, 2$ /	3,16	6,95	10,11	13,27	16,43	19,59	22,75
Эксперимент	3,30	-	-	-	-	-	-

Для регулярных по длине неразрезных ферм, имеющих равные пролеты, решения можно рассматривать отдельно для прямосимметричных и кососимметричных форм. Для кососимметричных форм к каждому из пролетов применима расчетная схема разрезного пролетного строения и решение не вызывает затруднений. Используя рекомендации, приведенные в работе Г. В. Вайкова, при рассмотрении симметричных колебаний меняется лишь значение параметра  $\beta_i$  и вместо его значения  $\beta_i = \frac{\pi}{2} \cdot l$ , следует подставить  $\beta_i = 0,25 \frac{\pi}{2} \cdot 4l + I$ , где  $n$  - общее количество панелей /пролетов в наших расчетных схемах/.

Исследование собственных частот колебаний лишь незначительно усложняет расчеты при применении указанных моделей к неразрезным трехпролетным фермам с неравными пролетами. Уравнения частот и амплитуд в этом случае получаем из условия сопряжения  $\kappa$  и  $\kappa+1$  пролетов с учетом зависимости между параметрами  $\lambda_{\kappa} = \lambda_{\kappa+1} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{\kappa+1} \cdot T_{\kappa+1}}{\mu_{\kappa+1} \cdot T_{\kappa}}}$

Проверка предлагаемых решений для неразрезных ферм проведена на нескольких объектах, по которым имеются экспериментальные данные. Кроме того данные расчеты были выполнены по более простым уравнениям. Учитывая, что при значениях частотного параметра  $\lambda_k \geq 5$  можно положить  $\frac{\sin \alpha_{ij}}{\cos \alpha_{ij} - \cos \beta_i} = 1$ , допуская при этом погрешность менее одного процента, уравнение для пятислойной балки с учетом всех факторов принимает очень простой вид

$$\frac{\sin \alpha_{ij}}{\cos \alpha_{ij} - \cos \beta_i} = \frac{k_{ij} \cdot (c_j' - d \lambda_{ij}^4 - k_{ij} \cdot a_{ij} \cdot f_{ij} - f_{ij}^2 \cdot d_{ij})}{c_j' - d \lambda_{ij}^4} \quad , 70 /$$

Данные расчета собственных частот для четырех типов пролетных строений приведены в таблицах 9 и 10. Данные в табл.9 относятся к пролетным строениям 132+132 м. и 110+132+110 м. соответственно, а в табл.10 к пролетным строениям 72,54+80,26 м. и 112,35+154,0+112,35 м. также соответственно.

Таблица 9.

Способ расчета или расчетная схема	Линейная частота в Гц. по формам						
	1	2	3	4	5	6	7
По МКЭ - "Лира"	2,23	2,96	3,42	-	5,54	6,29	6,67
Пятислойная балка	2,03	2,86	3,26	4,05	5,82	6,86	7,03
С использованием соотношений $\lambda_k, \beta_i$	2,03	2,87	3,26	4,06	5,87	6,95	7,12
Трехслойная балка с дискретными опорами	2,04	2,90	3,30	4,12	6,05	7,24	7,44
Тоже с упругим слоем	2,04	2,90	3,30	4,13	6,08	7,29	7,51
Эксперимент	2,15	2,90	3,26	-	-	-	-
По МКЭ - "Лира"	1,91	2,65	5,40	6,02	8,71	9,09	11,27
Пятислойная балка	1,76	2,58	5,29	6,19	8,65	9,37	11,28
С использованием соотношений $\lambda_k, \beta_i$	1,76	2,58	5,32	6,24	8,81	9,58	11,68
Трехслойная балка с дискретными опорами	1,76	2,59	5,41	6,39	9,29	10,22	12,81
Тоже с упругим слоем	1,76	2,59	5,43	6,43	9,42	10,40	13,24

Указанная методика была применена и для расчета собственных частот мостов других систем: сталежелезобетонных, пролетов с вертикально подъемной проезжей частью, рамно-неразрезных мостов, мостов систем "бегущая лань" и др. В таблице 11 приведены некоторые резуль-

таты расчета для мостов, по которым имеются экспериментальные данные. На рис. 24 приведены образцы теоретических форм колебаний для пролетного строения II0+I32+II0 м., полученные при расчете методом конечных элементов.

Таблица 10.

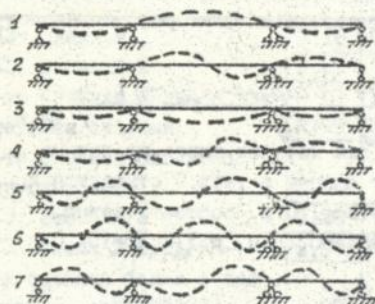


Рис. 24

Способ расчета и расчетная схема	Линейная частота Гц.	
	1	2
Через коэффициенты приведения/Д.К.Запорожец/ Трехслойная балка Эксперимент	3,40	5,50
	3,23	5,33
	3,16	5,10
Через коэффициенты приведения/Д.К.Запорожец/ Трехслойная балка Эксперимент	1,69	3,41
	1,66	3,39
	1,62	3,30

Таблица 11.

Краткая характеристика объекта	Расчетная схема	Частота в Гц.	
		Расчет	Эксперим.
Сталежелезобетонное неразрезное автодорожное пролетное строение / 3х3,0 и 4х3,0 м /	Регулярная балка на жестких опорах	1,37/2,14	1,30/2,08
	Трехслойная балка	1,28/2,06	1,30/2,08
Пролетное строение разводного моста с вертикально подъемной проезжей частью	Регулярная балка на упругих опорах	13,31	13,50
	Трехслойная балка	13,42	13,50
Рамно-неразрезные автодорожные мосты / 16,9+20,0+16,9 м. 20,3+3х22,5+20,3 м. /	Рама с распределенными параметрами	4,53/3,34	4,90/4,13
	Регулярная балка на упругих опорах	4,84/3,49	-
	МКЭ	4,52/3,39	-

## 5. Регулярные модели в расчетах пространственных колебаний мостов.

Изучение свободных пространственных колебаний мостов связано в основном с разработкой различных методик определения максимальных допустимых амплитуд исходя из критерия горизонтальной жесткости и обеспечения безопасности движения подвижной нагрузки. Особое значение данные факторы приобретают для высоких и временных мостов, имеющих, как правило, низкую горизонтальную жесткость опор.

Разработанные модели расчетных схем нашли широкое применение при определении собственных частот горизонтальных колебаний в качестве альтернативных к нашедшей распространение расчетной схеме в виде шарнирной цепи. Автор являлся научным консультантом диссертационных работ по данным направлениям / высокие виадуки и временные мосты/, что позволило провести всестороннюю оценку предлагаемых расчетных схем.

### 5.1. Высокие балочные виадуки.

Исследованию пространственных колебаний высоких виадуков посвящено небольшое число работ К.К. Якобсона, В.С. Усольцева, Г.Н. Яковлева, В.Г. Галушки и др. и вопрос определения собственных частот является доминирующим в решении данной проблемы в целом. Именно по этой причине расчетная схема была принята не волевым решением, а на основании анализа расчетных схем, из которых детально проверены численным экспериментом четыре:

- неразрезная балка на упругих опорах с сосредоточенными дополнительными массами в местах опор /опора участвует совместно с пролетными строениями в колебательном процессе /;
- неразрезная балка на сплошном упругом основании;
- шарнирная цепь на упругих опорах;
- однопролетная балка на упругих/или жестких / опорах.

Предполагалось, что две первые расчетные схемы могут реально иметь место при малой жесткости опор, а также за счет жесткости пути и трения в опорных частях.

Сравнительные расчеты по первым трем расчетным схемам были выполнены для двух-, трех-, четырех- и пятипролетных схем при четырех значениях высоты опор: 11, 3м., 22, 3м., 33, 3м., 44, 3м. и трех типах балочных пролетных строений: 23, 6м., 27, 6м., 33, 6м. и позволили установить.

1. При высоте опор выше 20 м. вполне приемлема простая расчетная схема в виде балки на сплошном упругом основании при всех рассмотренных типах и количестве пролетных строений. Расхождение в частотах

по схеме балки на упругих опорах не превышает 1,5%.

2. При высоте опор II,3м. расхождение в частотах по тем же расчетным схемам увеличивается и составляет от 6 до 36% ,увеличиваясь к тому же и с увеличением длин пролетов. При данной высоте опор и ниже хорошие результаты дает расчетная схема в виде балки на упругих опорах / и даже жестких/. Сравнительные графики зависимостей  $\omega_1 = f(H, \epsilon)$  приведены на рис.25. Расчетная схема в виде отдельно стоящего пролетного строения дает практически неприемлемые решения.

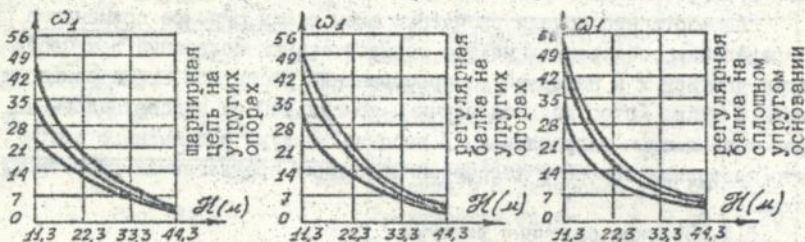


Рис.25

В качестве реального объекта для проверки предлагаемых решений взят пример из работы К.К.Якобсона и В.С.Усольцева, в которой решение авторов к тому же сравнивается с экспериментом. Данные расчета собственных частот приведены в табл.12.

Таблица 12

Высота опор/м./	Частота в Гц. для расчетных схем			Данные К.К.Якобсона и В.С.Усольцева	
	Нерезная балка на упругих опорах	Балка на сплошном упругом основании	Шарнирная цепь	Теория	Эксперимент
44,3	5,7	5,7	5,3	5,8	5,7
33,3	8,0	8,0	7,6	8,1	8,1

Данные расчетов подтверждают возможность применения простейших расчетных схем, дающих практически равноценные результаты. Однако однозначно подтвержден и тот факт, что необходимо рассматривать расчетные схемы, учитывающие все количество пролетов моста.

### 5.2. Высокие арочные виадуки.

Очевидно, что к указанной системе может быть применен тот же подход и те же расчетные схемы с той лишь разницей, что набор одно-

типных арочных пролетных строений не дает нам еще регулярную систему поскольку арка имеет переменное сечение по длине. Следовательно мы имеем дело с системой близкой к регулярной. На основании наших исследований систем близких к регулярным весовая и жесткостная нерегулярность оказывает влияние на изменение частоты значительно меньшее, чем нерегулярность по длинам пролетов. На этом основании регулярные модели могут быть рассмотрены в качестве вариантов и возможных расчетных схем.

Как мы уже отмечали в качестве основного критерия оценки пространственной динамической жесткости пролетных строений может служить максимальная амплитуда горизонтальных колебаний, методика вероятностного подхода для определения которой подробно освещена Г.Н. Яковлевым в его докторской диссертации и хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Указанная методика предполагает в качестве основного параметра частоту собственных горизонтальных колебаний сооружения. Не останавливаясь на самой методике, отметим только, что собственная частота используется в данном случае для нахождения критической скорости

$$V_{кр} = \frac{\omega_i}{0,4} \text{ (м/с)} \quad / 71 /$$

и коэффициента нарастания амплитуд

$$1 + \mu = \frac{\omega_i}{2\varepsilon} \cdot (1 - e^{-\varepsilon t}), \quad / 72 /$$

а критическая скорость в свою очередь является основой для определения возмущающей силы  $Q$ , которая в сочетании с коэффициентом нарастания амплитуд и составляет амплитуду колебаний. Отсюда понятно, что точное определение собственной частоты существенно влияет на конечный результат.

Объектом детального исследования послужил одиннадцатипролетный арочный виадук через р. Черная речка /Красноуфимск/, испытанный лабораторией дважды: в 1965 и 1969 г.г. Арки сборные, подъемистые  $\zeta_p = 53,0\text{м}$ . Продольные балки надарочного пролетного строения выполнены неразрезными по длине пролета, высота опор до 50м.

Для данного сооружения, кроме упомянутых выше расчетных схем, были выполнены расчеты энергетическим методом, методом приведения масс и методом моделирования на ЭМСС-7М. Данные расчетов сведены в табл. 13. Расчеты указанными выше методами выполнены Л.Н. Карповым.

Существенная разница в результатах расчета может быть объяснена многими очевидными факторами, однако все указанные модели тем не менее

дают вполне приемлемые результаты не только по частоте, но и по максимальной амплитуде, которая была зафиксирована при испытаниях.

Таблица 13.

Методика или расчетная схема	Частота Гц.	Методика или расчетная схема	Частота Гц.
Энергетический метод	0,93	Метод приведения масс	0,92
ЭМСС-7.1	0,88	Неразрезная балка на упругих опорах	1,28
Неразрезная балка на сплошном упругом основании	1,13	Шарнирная цепь на упругих опорах	1,14
Эксперимент 1965 г.	1,10	Эксперимент 1969 г.	1,17

### 5.3. Временные мосты.

При проектировании восстановления мостов широкое применение находят металлические пролетные строения облегченной конструкции с ездой поверху и деревянные опоры на высоком свайном ростверке. Жесткость таких опор значительно ниже жесткости массивных капитальных опор. Низкая жесткость моста в целом в поперечном направлении, увеличение веса и скоростей движения поездов, способствуют появлению недопустимых горизонтальных перемещений даже при невысоких скоростях движения.

Как и в предыдущих исследованиях, в качестве основных расчетных схем для определения собственных частот приняты: шарнирная цепь, неразрезная балка на сплошном упругом основании и неразрезная балка на упругих опорах.

Фундаментальная работа Г.К.Гольста по данному виду мостов, не давала тем не менее ответа на многие вопросы нормирования горизонтальной жесткости, максимальных амплитуд и др. и была продолжена и доведена до логического завершения Г.Н.Яковлевым, В.П.Кисляком и др.

Важный этап выбора расчетной схемы включал проведение эксперимента на двух мостах Свердловской жел. дороги.

Результаты расчетов и сравнение с экспериментом в данном случае однозначно подтвердили преимущества расчетной схемы в виде шарнирной цепи на упругих опорах. Две другие расчетные схемы давали погрешность в сравнении с экспериментом 30-39%. Расхождение же данных эксперимента и расчета по схеме шарнирной цепи не превышало 5-7%.

При испытаниях двух мостов были отмечены некоторые важные особенности их динамической работы:

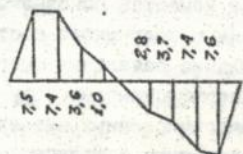
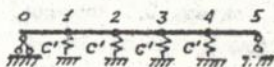


Рис. 26

- ни в одном из опытов не были зафиксированы колебания по первой форме во всем реализованном диапазоне скоростей до 57 км/ч;
- оба моста имеют в своем составе по пять пролетных строений длиной 23,6 м. и опоры практически одинаковой жесткости. Тем не менее наличие на мосту № 1 одной опоры значительно более жесткой, предопределило основную форму колебаний - третью, на объекте № 2 это была вторая форма / рис. 26 /;
- ни в одном из опытов не были зафиксированы иные формы колебаний;
- амплитуды горизонтальных колебаний при проходе одиночного локомотива составляли 5,7 мм., а при проходе состава - 7,5 мм.;
- критическая скорость в диапазоне 34-42 км/ч.

## 6. Экспериментальное изучение взаимодействия железнодорожных мостов с подвижным составом.

Вопросы взаимодействия пролетных строений мостов с подвижным составом не могли не заинтересовать ученых вслед за тем как в 60-е годы в результате серьезных экспериментально-теоретических исследований в области динамики мостов, проводимых ЦНИИСоМ, НИИ мостов ЛИИЖТа, ДИИТОМ, трудами ученых Н.Н. Безухова, В.В. Болотина, Н.Г. Бондаря, Г.К. Гольста, И.И. Казея, Д.Г. Козьмина, С.И. Конашенко, Б.Ф. Лесохина, А.Ф. Смирнова, Г.Н. Яковлева, Л.Фрѣбѣ, В. Колоушека и др. была создана предпосылка перехода от собственно динамики мостов к рассмотрению динамики единой системы "мост-поезд" при взаимодействии. Указанный переход являлся актуальным для проектной практики и эксплуатации в связи с ростом скоростей движения вводимых новых типов подвижной нагрузки. Кроме того изучение чисто динамики мостов давало одностороннюю информацию, хотя и обширную. Стыковка обещала дать и дела важную дополнительную информацию так необходимую не только для проектирования мостов, но и для разработки нового высокоскоростного транспорта. В течение десятилетия 70-80 годов взаимодействие мостов и подвижного состава сформировалось в самостоятельное научное направление благодаря интенсивной работе двух институтов ДИИТа и ЛИИЖТа, а также большой заинтересованности МПС. Круг исследователей, стоявших у истоков данной работы иссле-

дования динамики именно мостов и внесших серьезный вклад в решение данной проблемы в эти годы не так обширен: Н.Г.Бондарь, Ю.Г.Козьмин, З.Г.Ройтбурд, В.П.Тарасенко, Л.Фрйба /ЧССР/. В меньшей мере это можно отнести к десяткам исследователей, внесших посильный вклад в решение отдельных вопросов взаимодействия.

Экспериментальные исследования играют ведущую роль в решении данной проблемы в целом, поскольку работа, нацеленная в будущее, предполагала бесстыковой путь, высокие скорости движения, новые виды тепловозной и электровозной тяги, т.е. те условия, когда в качестве основного фактора, вызывающего колебания пролетного строения и подвижного состава, принимается кинематическое возбуждение, а влияние остальных многочисленных факторов оценивается корректирующими коэффициентами, полученными в результате статистической обработки многочисленных экспериментальных данных. Соискатель являлся непосредственным исполнителем при проведении экспериментов в качестве руководителя отделения испытаний и руководителя лаборатории в период с 1971 по 1978 г.г.

#### 6.1. Методика экспериментальных исследований.

В соответствии с целями и задачами исследования проводились как бы по трем направлениям: чисто теоретические разработки, численный эксперимент на ЭВМ с использованием различных математических моделей и натурный эксперимент. Именно натурный эксперимент предусматривал получение достоверной информации о поведении системы "мост-поезд" с максимально возможным количеством измеряемых параметров как на мосту так и на подвижном составе. И хотя каждое испытание имело свою специфику, свой набор измеряемых величин — общая методика сохранялась, совершенствуясь от эксперимента к эксперименту и совершенствуясь в свою очередь теоретические решения, математические модели. Набор измеряемых параметров соответствовал сложности решаемой задачи и включал измерение большого количества величин на мосту и на подвижном составе при синхронной записи измеряемых процессов. Испытания при больших скоростях движения потребовали разработки комплекса аппаратуры с блоком автоматического одновременного включения всех регистрирующих приборов. Разработанная в ДИИТе установка отвечала указанным требованиям и позволяла фиксировать на подвижном составе:

- горизонтальные и вертикальные составляющие рамного давления;
- вертикальные ускорения по буксам тележки ЦНИИ-ХЗ-С;
- вертикальные и горизонтальные ускорения кузова вагона;
- вертикальные и горизонтальные деформации рессорного комплекта;
- вертикальные перемещения кузова относительно надрессорной балки;

- скорость движения нагрузки и положение нагрузки в любой момент времени;

а на пролетных строениях моста соответственно:

- вертикальные прогибы по обеим фермам в середине и в четвертях каждого из пролетных строений;
- горизонтальные перемещения в серединах пролетных строений по нижнему и верхнему поясам по обеим фермам;
- напряжения в различных элементах ферм, балочной клетки, в рельсах;
- положение подвижной нагрузки на мосту в любой момент времени.

В качестве датчиков использовались электрические и индуктивные прогибомеры с проволоочной связью, горизонтальные маятники с индуктивными датчиками перемещений, вибродатчики больших перемещений, малогабаритные датчики ускорений, датчики углов поворота, стационарные и съемные тензодатчики и др.

Для проведения испытаний в каждом конкретном случае формировался специальный испытательный поезд, в зависимости от длины моста и длин пролетных строений, который пропущался по мосту методом "челночной" езды с различными скоростями, включая и "проползание", соответствующее статическому нагружению пролетных строений моста.

#### 6.2. Объекты экспериментов.

Тщательный выбор объектов предусматривал своей целью получение наиболее полной информации о поведении системы "мост-поезд" при взаимодействии различных систем мостов, типов пролетных строений и испытательных поездов. Краткий перечень объектов приведен в табл. I4.

Таблица I4.

№ объекта	Схема моста	Схема испытательного поезда	Диапазон скоростей км/час
I	2x127,68+2x127,68+ 6x23,6+55,0 м.	ТЭ-3+ВЛ+10ПВ+ТЭ-3	40-102
II	3x66,0 м.	ТЭП-60+6ПВ+ВЛ	60-100
III	3x66,0 м.	ТЭ-3+6ПВ+ВЛ+ЭВ+5ПВ+ТЭ-3 ТЭ-3+11ПВ+ВЛ+ЭВ+ТЭ-3	50-95
IV	5x33,6 м.	ТЭП-60+ПЛ+ПВ+ВЛ+ПЛ ТЭП-60+ПЛ+ПВ+ВЛ+ПЛ+ПВ	50-75
V	5x23,6 м.	Скоростной вагон-лаборатория	80-220
VI	55,0 м.	-	60-100
VII	2x55,0+2x55,0 м.	-	45-85

ПВ-полувагон, ВЛ-вагон-лаборатория, ЭВ-эталонный вагон, ПЛ-платформа.

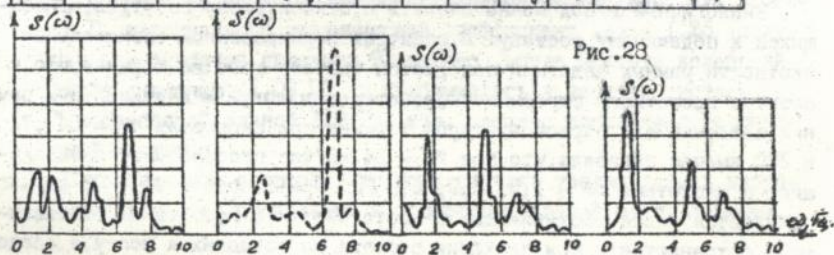
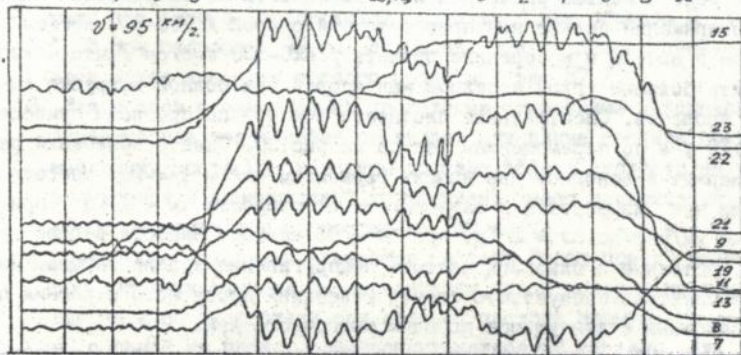
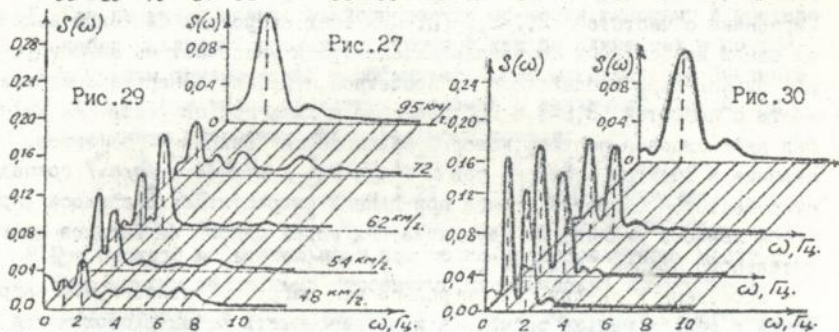
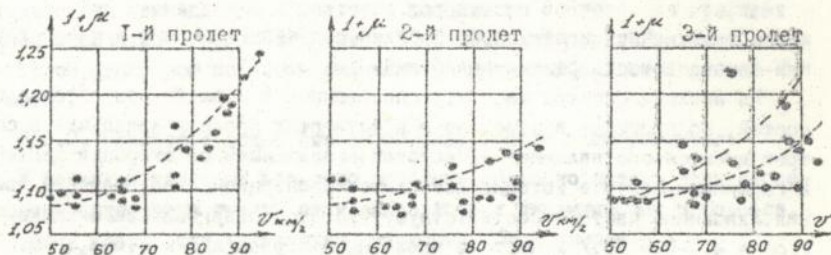
### 6.3. Результаты экспериментальных исследований.

Проведение обширных экспериментов на мостах позволило в конечном итоге получить так необходимые количественные оценки влияния различных многочисленных факторов, являющихся причиной колебаний.

Численные эксперименты, реализованные на ЭВМ с использованием различных математических моделей, не могли служить в этом плане основой для разработки рекомендаций проектировщикам и эксплуатационникам и естественно постоянно нуждались в корректировке со стороны натурного эксперимента. Тем более, что математические модели не отличались однообразием и постоянно корректировались. Основными факторами, влияющими на динамическую работу пролетных строений мостов, считались: скорость движения подвижной нагрузки, тип нагрузки, состояние пути на подходах, состояние верхнего строения пути на мосту/неровности/, строительный подъем, тип пролетного строения. Каждый из указанных факторов необходимо было оценить количественно.

#### 6.3.1. Взаимодействие подвижного состава с равнопролетными мостами.

Уже начиная с 1972 года направление исследований взаимодействия сместилось в сторону проведения натуральных экспериментов на мостах, имеющих равные пролеты в своем составе, поскольку именно такой набор приводил к возможности появления резонансных режимов. В этом плане показательными являются эксперименты проведенные дважды на мосту через р. Орель, имеющем в своем составе три однотипных пролетных строения / объект П, Ш /. При испытаниях использовалось три схемы испытательного поезда. Испытания, проведенные при коротком испытательном поезде, показали, что поведение системы "мост.-поезд" существенно зависит от соотношения длин моста и проходящего состава. Указанный состав не перекрывал даже двух пролетов и при всех реализованных скоростях до 100 км/час динамический коэффициент не превышал величины 1,03. Совершенно иная картина проявилась при длине поезда в 225,4 м. В данном случае характер изменения динамического коэффициента во первых был различным для всех пролетных строений, а во вторых - динамическая добавка возросла в три раза. Характер изменения динамического коэффициента для каждого из пролетов приведен на рис. 27. Анализ осциллограммы прогибов, записанной при скорости  $v = 95$  км/час./рис. 28 / показывает, что максимальное динамическое воздействие пролетное строение испытывает при одночастотных колебаниях и подтверждает правомерность применения для теоретических исследований взаимодействия математической модели пролетного строения



в виде трехслойной и пятислойной балки, полученных именно в предположении одночастотного режима колебаний.

Из анализа спектра частот, расположенных в порядке возрастания скоростей, по прогибам в середине и в четвертях пролета видно, что в спектрах имеются составляющие с частотой не зависящей от скорости движения и гармоника, частота которых изменяется пропорционально скорости движения. Указанные частоты соответствуют частоте подпрыгивания экипажа  $\omega = 2,1-2,3$  Гц./ и частоте пролетного строения  $\omega = 3,6-3,8$  Гц./ . Гармоника с частотой  $2,1-2,3$  Гц. при всех скоростях движения является одной из основных составляющих спектра и указывает на доминирующее влияние при воздействии на пролетное строение. Энергия колебаний моста с частотой  $3,6-3,8$  Гц. невелика и лишь при скорости  $72$  км/час был зафиксирован всплеск, который объясняется "балочным" эффектом. Наличие в спектре всплеска при  $\omega = 4,4$  Гц. /  $v = 43$  км/час. / совпадает с частотой оборотов колеса при данной скорости. Как оказалось, причиной явилось наличие на двух колесных парах одного из вагонов испытательного поезда "ползуна".

Проведенный анализ работы рельса под нагрузкой показал, что напряжения в рельсе меньше расчетных и в зависимости от их расположения на мосту, напряжения больше над промежуточной опорой /  $700-900$  кгс/см<sup>2</sup> / и меньше в начале и в середине пролета /  $420-530$  кгс/см<sup>2</sup> /, что можно объяснить большим углом перелома над опорой при полной загрузке соседних пролетов. Спектральные плотности частот по прогибам приведены на рис. 29, а по перемещениям рельса на рис. 30. Спектр колебаний рельса содержит в основном две низших гармоники  $\omega = 1-2$  Гц. Частота одной из них изменяется в зависимости от скорости  $\omega = 1$  Гц. при  $v = 48$  км/час до  $\omega = 2$  Гц. при  $v = 95$  км/час. Частота второй гармоники постоянна и близка к частоте подпрыгивания кузова вагона. Из анализа спектров следует, что спектр колебаний пролетного строения при взаимодействии с движущимся поездом многочастотный.

Аналогичный вывод можно сделать и относительно спектров, относящихся к подвижному составу. В спектрах нормированной спектральной плотности рамных давлений содержатся частоты того же порядка, что и в спектре пролетного строения. Обработка осциллограмм вертикальных рамных давлений для первой и второй тележек при скоростях  $v = 54, 72$  и  $100$  км/час показала, что при  $v = 54$  км/час преобладают составляющие с частотами  $\omega = 1,5; 4,9; 6,8$  Гц. При скорости  $v = 72$  км/час появляется новая составляющая с частотой  $2,5$  Гц. Эти же составляющие сохраняются и при движении состава на подходах к мосту, а, следо-

вательно они принадлежат к частотам подвижного состава. На графиках образцов спектров / рис.31 / точка 2 принадлежит первой тележке, точка 4 - второй, пунктиром показаны значения на подходах, сплошной линией - на мосту.

### 6.3.2. Некоторые общие выводы по результатам экспериментов.

В короткой главе не возможно осветить подробно анализ всех экспериментов, содержащих тысячи записей различных динамических процессов, а поэтому кратко охарактеризуем некоторые общие выводы.

1. При движении испытательного поезда по мосту, имеющему в составе набор различных пролетных строений как по длине так и по конструкции, динамический коэффициент имеет максимальные значения для разных типов пролетных строений с различной длиной при различных скоростях испытательного поезда:

$$l_1 = 2 \times 127,68 \text{ м} \quad , \quad I_{+ \mu} = 1,05 \quad , \quad v = 45 \pm 55 \text{ км/час};$$

$$l_2 = 23,6 \text{ м} \quad , \quad I_{+ \mu} = 1,21 \quad , \quad v = 90 \pm 100 \text{ км/час};$$

$$l_3 = 55,0 \text{ м} \quad , \quad I_{+ \mu} = 1,16 \quad , \quad v = 80 \pm 90 \text{ км/час}.$$

2. При проходе испытательного поезда по многопролетному мосту с однотипными пролетными строениями, динамический коэффициент увеличивается с возрастанием скорости и достигает своего максимума при строго определенной скорости / для объекта П  $I_{+ \mu} = 1,25$  при скорости 95 км/час. Однако эта тенденция прослеживается четко лишь для первого пролета / рис.27 /.

3. Для мостов с однотипными пролетными строениями максимальное динамическое воздействие наступает при длине состава, превышающей длину моста. При коротком составе эффект скорости не реализуется и динамический коэффициент имеет практически одинаковые значения при скоростях до 100 км/час /  $I_{+ \mu} = 1,08$  /.

4. Наибольшие колебания элементов системы "мост-поезд" вызываются при движении экипажа по неровностям, длины которых кратны базе вагона и со скоростями, при которых частота возмущения совпадает с одной из частот собственных колебаний системы. Для объекта П максимальный динамический коэффициент  $I_{+ \mu} = 1,25$  получен при скорости движения 95 км/час, когда частота колебаний имела значение 1,89 Гц. и приближалась к частоте системы "мост-поезд" равной 1,7 Гц., т.е. процесс носил явно резонансный характер.

5. С увеличением скоростей во всех случаях увеличивались вибрации элементов продольных и поперечных связей между фермами.

6. Наличие неровностей на верхнем строении пути пролетных строений моста вызывает значительное возрастание динамики в элементах системы "мост-поезд".
7. Максимальные амплитуды прогибов рессор полувагонов, при прохождении испытательного поезда по пролетным строениям и на подходах, мало отличаются /соответственно 12,7 мм. и 12,3 мм./.
8. Вертикальные и горизонтальные ускорения кузова вагона при прохождении по мосту и на прямом участке подходов имеют близкие значения и составляют в долях  $\rho$  соответственно 0,39±0,41 и 0,23±0,45 для горизонтальных ускорений, 0,21±0,50 и 0,33±0,40 для вертикальных.
9. В большинстве опытов на всех объектах рессоры при скоростях движения до 60 км/час как упругие элементы не работали, а активно начинали работать в диапазоне скоростей 80-100 км/час, резко повышая динамику системы в целом. Наибольшие перемещения зафиксированы при скоростях 85-90 км/час и в зависимости от положения поезда на мосту и типа пролетных строений составили: 14,5 мм. при движении по шести малым пролетным строениям и 9,1 мм. при движении по пролетному строению 55,0 м./для объекта I табл. 14/.

Приведенные в табл. 13 главы 5 результаты расчета частот и форм пространственных колебаний в данной главе были использованы для исследования взаимодействия арочных мостов с подвижной нагрузкой. Проведенный расчет максимальных амплитуд горизонтальных колебаний II-пролетного виадука при взаимодействии с испытательным поездом /2ТЭ-3+4ПВ+2ТЭ-3/ показал хорошее совпадение расчетных значений амплитуд замка арок с экспериментальными / табл. 15/.

Таблица 15

Доверительная вероятность $\alpha$	Доверительный интервал	Амплитуды горизонтальных колебаний замка арок в мм.		
		Теория	Эксперимент	расход. %
0,997	3σ	8,9	9,49	- 6,1
0,90	2σ	6,6	7,09	- 6,8
0,63	σ	5,4	5,11	+ 5,7

### ВЫВОДЫ.

Предлагаемый набор регулярных моделей показал их надежность в расчетах колебаний и устойчивости мостовых конструкций и, очевидно, с таким же успехом может быть применен в других областях. Решения, убедительно подкрепленные расчетами и экспериментами на натуральных объектах, позволяют надеяться на широкое применение моделей в практике проектных и исследовательских организаций.

Сформулированный общий вывод обоснованно базируется на результатах, полученных в работе при разработке единого подхода и единой методики расчета регулярных упругих систем применительно к мостовым конструкциями в задачах динамики и устойчивости. Конечный элемент в виде "модульного" стержня позволил сконструировать целый набор сложных моделей, пригодных для решения серьезных задач строительной механики, динамики и устойчивости мостовых и строительных конструкций, получить в итоге ряд важных и новых результатов.

1. Получены точные решения для частот и форм собственных колебаний "модульного" стержня на упругих опорах с учетом всевозможных факторов. Указанное решение распространено на сложные модели: перекрестные балки, слоистые системы и др.

2. Используя динамический способ исследования статической устойчивости, получены точные решения для параметра критической силы и форм потери устойчивости для указанных в п. 1 расчетных схем.

3. Численным экспериментом исследовано влияние инерции вращения, деформаций сдвига, продольных сил, дополнительных сосредоточенных масс в местах упругих опор для моделей, приведенных в п. 1 и 2.

4. Получено точное решение для границ "критической" жесткости упругих опор при свободных колебаниях и потере устойчивости.

5. В рамках точной постановки решены некоторые известные задачи устойчивости: об устойчивом коэффициенте опорности многопролетного упруго опертого стержня/задача И.Г. Бубнова/, о критической силе при потере устойчивости многопролетным стержнем на жестких и упругих опорах, о минимальной жесткости упругих опор многопролетного стержня до потери устойчивости, об устойчивости сжатого пояса открытого моста /задача Ф.С. Ясинского/ и др.

6. Определены предельные границы нерегулярности параметров систем близких к регулярным, позволяющие на этой основе применять к ним решения и модели, полученные для регулярных систем.

7. Для использования непосредственно в проектной практике, разработаны графики, номограммы и таблицы для определения собственных частот и форм колебаний, критической силы при проектировании реальных мостовых конструкций.

8. Предложен целый набор расчетных моделей с решениями для динамического расчета мостов различных систем и мостовых конструкций: балки проезжей части железнодорожных мостов, вантовые системы, висячие мосты различных систем, равно-неразрезные мосты, пролеты с вертикально-подъемной проезжей частью, балочные и арочные виадуки, временные мосты, гиская арка с жесткой балкой, "бугущая лань", монорельсовые дороги и др.

9. Проведено более 60 крупномасштабных экспериментов на мостках сети железных дорог СНГ и за рубежом/Республика Куба/.

Основное содержание диссертации отражено в следующих публикациях.

1. Солдатов К.И. Частные случаи задачи о собственных колебаниях регулярных упруго опертых балок /Труды ДИИТа, вып.127 "Вопросы статической и динамической работы мостов", Дн-ск, 1972, стр.72-79/.
2. Солдатов К.И. Анализ влияния продольной силы, инерции вращения и деформаций сдвига на собственные колебания упруго опертых балок / Труды ДИИТа, вып.144 "Прикладная теория колебаний и динамика мостов", Дн-ск, 1972, стр.152-168/.
3. Солдатов К.И. Применение одного точного метода к определению собственных колебаний балок проезжей части железнодорожных мостов/Труды ДИИТа, вып.116 "Строительная механика и мосты", Дн-ск, 1971, стр.63-77/.
4. Солдатов К.И. Свободные колебания регулярных балок и некоторых мостовых конструкций на упругих опорах /Автореферат кандидатской диссертации, Дн-ск, 1971, стр. 19/.
5. Солдатов К.И. Определение собственных колебаний мостовых конструкций на упругих опорах /Тезисы доклада Юбилейной конференции, Дн-ск, 1970, стр.6-7/.
6. Солдатов К.И., Казакевич И.И. Определение собственных частот колебаний однопролетных внешне распорных радиально-вантовых систем /Реферативный сборник "Межотраслевые вопросы строительства", № 8, Москва, 1970, стр. /.
7. Солдатов К.И. Свободные колебания регулярных балок и некоторых мостовых конструкций на упругих опорах /Кандидатская диссертация, Дн-ск, 1971, стр.220 /.
8. Солдатов К.И. Приближенный метод определения собственных частот колебаний висячих мостов /Тезисы доклада Всесоюзной конференции, МЦИ, Москва, 1974, стр.4 /.
9. Солдатов К.И. Применение метода деформаций к определению собственных частот колебаний балок на упруго-оседающих опорах /Труды ДИИТа, вып.110, "Строительная механика и мосты", Дн-ск, 1970, стр.48-56/.
10. Солдатов К.И. К вопросу о формах колебаний балок на упругих опорах / Межвузовский сборник научных трудов "Вопросы динамики мостов и теории колебаний", вып.200/22, Дн-ск, 1978, стр.108-112 /.
11. Солдатов К.И. О равенстве частот балок на упругих опорах /Труды ДИИТа, вып.186 "Динамика мостов и теория колебаний", Дн-ск, 1977, стр.78-82 /.
12. Солдатов К.И. Колебания слоистых систем с учетом инерции вращения и деформаций сдвига / Межвузовский сборник научных трудов "Вопросы динамики мостов и теории колебаний", вып.207, Дн-ск, стр.85-91/.

13. Солдатов К.И., Антимонов Г.В. Исследование свободных колебаний сжато-растянутой трехслойной балки / Межвузовский сборник научных трудов "Вопросы статической и динамической работы, оценки грузоподъемности и эксплуатационной надежности мостов", Дн-ск, 1986, стр. 71-82.

14. Солдатов К.И. Некоторые вопросы определения собственных частот колебаний мостов применительно к проектированию / Межвузовский сборник научных трудов "Вопросы статики и динамики мостов", Дн-ск, 1987, стр. 94-103 /.

15. Солдатов К.И. Исследование статической устойчивости упруго опертых балок / Труды ДИИТа, вып. 150, "Вопросы теории колебаний и динамики мостов", Дн-ск, 1973, стр. 86-94 /.

16. Солдатов К.И. О "Критической" жесткости упругих опор регулярных балок при свободных колебаниях и потере устойчивости / Труды ДИИТа, вып. 150, "Вопросы теории колебаний и динамики мостов", стр. 94-105 /.

17. Солдатов К.И. Устойчивость сжатого пояса открытого моста / Труды ДИИТа, вып. 157 "Динамика мостов и теория колебаний", Дн-ск, 1975, стр. 101-105 /.

18. Солдатов К.И. Устойчивость слоистой системы при действии сжимающих и растягивающих продольных сил / Межвузовский сборник научных трудов "Исследование статики и динамики мостов", Дн-ск, 1985, стр. 75-82 /.

19. Солдатов К.И. К вопросу о собственных частотах колебаний мостовых конструкций на упругих опорах / Труды ДИИТа, вып. 116 "Вопросы прикладной теории колебаний", Дн-ск, 1972, стр. 97-119 /.

20. Солдатов К.И., Едвабный В.И. К вопросу о колебаниях балок проезжей части железнодорожных мостов / Тезисы доклада I-й Республиканской конференции молодых ученых железнодорожников, Дн-ск, 1969, стр. 158-159 /.

21. Солдатов К.И., Бездетко П.В. Экспериментально-теоретическое исследование статической и динамической работы неразрезного сталежелезобетонного пролетного строения автодорожного моста / Труды ДИИТа, "Вопросы прикладной механики и мостов", Дн-ск, 1969, стр. 120-128 /.

22. Солдатов К.И., Черевачкий Б.П. Колебания и устойчивость многослойных регулярных балок на упругих опорах при действии продольных сил / Труды ДИИТа, вып. 169/19 "Вопросы теории колебаний и динамики мостов", Дн-ск, 1975, стр. 25-32 /.

23. Солдатов К.И., Распопов А.С. Об одном подходе к определению параметров свободных вертикальных колебаний пролетных строений со сквозными фермами / Межвузовский сборник "Вопросы статической и динамической работы мостов", Дн-ск, 1989, стр. 54-66. /.

- 24.Распопов А.С.,Солдатов К.И. Свободные колебания неразрезных ферм железнодорожных мостов / Там же,стр.47-53 /.
- 25.Солдатов К.И.,Хохлов А.А.,Крисько А.Ю. О допустимой длине консоли при навесном монтаже пролетных строений / Межвузовский сборник "Теория колебаний, статика и динамика мостов", Дн-ск, 1991, стр.52-59/.
- 26.Беев С.В.,Солдатов К.И. Об автоколебательных режимах при надвижке пролетных строений /Межвузовский сборник "Вопросы динамики мостов и теории колебаний", вып.200/22, Дн-ск, 1978, стр. II5-II9 /.
- 27.Яковлев Г.Н.,Солдатов К.И.,Галушко В.Г. К вопросу о свободных пространственных колебаниях виадуков / Труды ДИИТа, вып. I57 "Динамика мостов и теория колебаний", Дн-ск, 1975, стр.52-56 /.
- 28.Яковлев Г.Н.,Солдатов К.И. Исследование пространственных колебаний пролетного строения железнодорожного арочного виадука / Труды ДИИТа, вып. I27"Вопросы статической и динамической работы мостов", Дн-ск, 1972, стр.3-II /.
- 29.Снитко И.Д.,Солдатов К.И. Исследование ортотропной плиты висячего моста / Труды ДИИТа, вып. I65/I9" вопросы теории колебаний и динамики мостов", Дн-ск, 1975, стр. I33-I38 /.
- 30.Кисляк В.П.,Солдатов К.И. К вопросу о горизонтальной жесткости опор временных мостов / Межвузовский сборник "Вопросы динамики мостов и теории колебаний, вып.202/23, Дн-ск, 1979, стр. II0-II7 /.
- 31.Солдатов К.И.,Кисляк В.П. Исследование динамической работы временных железнодорожных мостов / Там же, стр. II7-I22 /.
- 32.Снитко И.Д.,Солдатов К.И. Экспериментально-теоретическое исследование пролетного строения висячего моста / Тезисы доклада Всесоюзной конференции, Ленинград, 1975, стр.3 /.
- 33.Распопов А.С.,Солдатов К.И. Об одной модели динамического расчета балок проезжей части железнодорожных мостов /Межвузовский сборник "Вопросы статики и динамики мостов", Дн-ск, 1987, стр.39-45 /.
- 34.Егоров В.Б.,Слоним Э.Я.,Солдатов К.И. Висячий пешеходный переход через р.Суру в г.Пензе /Транспортное строительство, № IO, Москва, стр.7-8 /.
- 35.Солдатов К.И.,Мадатов В.И.,Льсков А.И. Результаты испытаний пешеходного висячего моста / Транспортное строительство, № I2, Москва, стр.5-6 /.
- 36.Солдатов К.И.,Гуржий К.В. Особенности динамики систем близких к регулярным применительно к двухпролетным неразрезным балкам с промежуточной упругой опорой/ Межвузовский сборник ,стр.8 /в печати/.

37. Гуржий К.В., Солдатов К.И. Исследование влияния незначительных нерегулярностей на изменение собственных частот неразрезных балок на жестких опорах /Межвузовский сборник, Дн-ск, 1992, стр.10 /.

38. Марзык В.М., Финкельштейн И.А., Солдатов К.И., Мадатов В.И., Эйхе Г.Н. Натурные поэтапные испытания и исследования на моделях совместной работы ездового полотна с балками автодорожных пролетных строений, Сборник НИИСК Госстроя УССР, Киев, 1973, стр.7 /.

39. Авраимов В.Ф., Петренко А.П., Солдатов К.И. Экспериментальные исследования работы равно-неразрезного автодорожного моста под движущейся нагрузкой /Труды ДИИТа, вып.178/20 "Динамика мостов и теория колебаний", Дн-ск, 1976, стр.79-85 /.

40. Запорожец Д.К., Солдатов К.И. Экспериментальные исследования динамической работы металлического моста с неразрезными пролетными строениями неравных пролетов /Труды ДИИТа, вып.92 "Вопросы прикладной механики и мостов", Дн-ск, 1969, стр.99-108 /.

41. Патлян В.В., Тарасенко В.П., Солдатов К.И. Экспериментальное исследование пространственной работы двухпутного пролетного строения комбинированной системы со сквозными арками с затяжкой / Труды ДИИТа, вып.116, "Строительная механика и мосты", Дн-ск, 1971, стр.109-123 /.

42. Солдатов К.И., Гуржий К.В. О построении линий влияния усилий в элементах неразрезных двухпролетных ферм / Межвузовский сборник "Вопросы статической и динамической работы мостов", Дн-ск, 1990, стр.73-81/.

43. Мостовой И.Н., Солдатов К.И., Борцов В.И. Новое в практике тензометрии НИИ динамики мостов /Тезисы доклада Юбилейной конференции ДИИТа, Дн-ск, 1970, стр.12-14 /.

44. Захаров В.Н., Ройтбурд Э.Г., Солдатов К.И., Тарасенко В.П., Тененбаум Э.М. Экспериментальные исследования взаимодействия пролетных строений и подвижного состава /Труды ДИИТа, вып.157 "Динамика мостов и теория колебаний", Дн-ск, 1975, стр.82-86 /.

45. Тарасенко В.П., Эйхе Г.Н., Черевачкий Б.П., Захаров В.Н., Солдатов К.И., Ройтбурд Э.Г. Экспериментальное исследование взаимодействия металлических балочных пролетных строений и подвижного состава в условиях высоких скоростей движения /Труды ДИИТа, вып.144 "Прикладная теория колебаний и динамика мостов", Дн-ск, 1972, стр.119-136/.

46. Тарасенко В.П., Эйхе Г.Н., Черевачкий Б.П., Захаров В.Н., Солдатов К.И. Экспериментальные исследования динамики железнодорожного подвижного состава на мостах /Тезисы 33 Всесоюзной конференции, Брянск, 1972, стр.64 /.

47. Ройтбурд Э.Г., Радиховский Ю.А., Тененбаум Э.М., Солдатов К.И., Результаты экспериментальных исследований взаимодействия пролетных строений с подвижным составом /Труды ДИИТа, Дн-ск, 1975, стр.89-99/.

AB 27.576

AB 27.576

48. Soldatov K., Ruzin Y., Ivashkevitch S., Rodriguez G., Ruzayor V., "Resultados de un estudio tico y dinamico a un puente de los Ferrocarriles de Cuba", 35 Congreso Panamericano de Ferrocarriles, Mexico, 1972.
49. Солдатов К.И., Журбенко М.К., Пархоменко В.В., Рыкин В.И., Мороз Г.Г. Комплекс аппаратуры для исследования взаимодействия подвижного состава с пролетными строениями мостов / Межвузовский сборник научных трудов, вып. 200/23, "Вопросы динамики мостов и теории колебаний", Днепропетровск, 1973, стр. 112-115.
50. Незальзов О.Р., Солдатов К.И. Электронные устройства для расчета рам и ферм / Труды Академии Наук Украины, Киев, 1967, дипломная работа, стр. 56-79 /.



Подписано к печати 18.03.93 . Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 100 экз. Заказ 170. Бесплатно.

Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта  
 Адрес института и участка оперативной полиграфии: 320700, ГСП, Днепропетровск, 10, ул. Акад. В.А. Лазаряна, 2.