ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. Ю. ФЕДЬКОВИЧА

На правах рукопису

Попова Лариса Володимирівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ У F-ПРОСТОРАХ

ІЗ НУЛЬОВИМ СПРЯЖЕНИМ

01.01.02 - диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня

кандидата фізико-математичних наук

ЧЕРНІВЦІ - 1993

Робота виконана в Запорізькому державному університеті.

Науковий керівник - кандидат фізико-математичних наук, доцент Маслюченко В. К.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук Самойленко Ю. С.
кандидат фізико-математичних наук Городецький В. В.

Провідна організація - Сімферопольський державний університет

Захист відбудеться "11" червня 1993р. о "14" год. на засіданні спеціалізованої ради К 068.16.05 в Чернівецькому державному університеті ім. Ю. Федьковича (274012 м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2).

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Чернівецького державного університету (вул. Лесі Українки).

Автореферат розіслано "10" травня 1993р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Садовяк А. М.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Якісна теорія диференціальних рівнянь зазнала великого підйому в середині 20-го століття завдяки інтенсивним дослідженням диференціальних рівнянь у банахових просторах (роботи К. Іосіди, М. А. Красносельського, М. А. Крейна, С. Г. Крейна та ін.) Систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dots & ; \quad t \in [a,b] \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases}$$

де $x_i(t): [a,b] \to \mathbb{R}$, природньо замінити одним рівнянням

$$\dot{x} = f(x,t),$$

де $x(t): [a,b] \to \mathbb{R}^n$; i-та координата вектора $x(t)$ співпадає з $x_i(t)$, а $f(x,t): \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Якщо рівнянь та невідомих у вихідній системі нескінченно багато, то ми приходимо до рівняння у нескінченновимірному просторі з однією невідомою функцією $x(t): [a,b] \to X$. Однак в цьому випадку поняття похідної $\dot{x}(t)$ потребує уточнення, оскільки її означення грунтується на границі функції, що приймає значення у нескінченновимірному лінійному просторі.

Нарешті, границя потребує наявність в X топології. Найпростішими з точки зору дослідження диференціальних рівнянь є локально опуклі топологічні векторні простори (зокрема, банахові простори). На випадок функцій, що приймають значення у таких просторах, переносяться багато теорем з класичного аналізу за допомогою теореми Гана-Банаха.

Інша ситуація, коли на топологічному векторному просторі X немає ненульових лінійних неперервних функціоналів. Диференціальні рівняння у таких просторах майже не вивчались. Зокрема, було відомо, що існують ненульові розв'язки тривіальної задачі Коші $x'(t) = 0$; $x(0) = 0$. Однак не було досліджено множину всіх розв'язків тривіальної задачі Коші. Не було також досліджено питання існування розв'язків простих диференціальних рівнянь у цих просторах.

В дисертації була зроблена спроба дослідити найпростіші диференціальні рівняння у F-просторах із нульовим спряженим. При цьому навіть прості питання часом викликали серйозні труднощі. Так, до цього моменту не з'ясовано, чи кожна неперервна функція $y: [0,1] \to X$, де $X^* = \{0\}$, має первісну.

До питань, що досліджувалися в дисертаційній роботі, виявляли зацікавленість провідні фахівці в галузі теорії F-просторів - Н. Калтон та С. Ролевич.

Ціль роботи. Дослідження питань існування та опису множини розв'язків простих диференціальних рівнянь у F-просторах із нульовим спряженим.

Методи досліджень. В роботі застосовувались методи дослідження диференціальних рівнянь в банахових просторах, методи функціонального аналізу (зокрема, властивості F-просторів із нульовим спряженим)

Наукова новизна. Досліджена множина розв'язків тривіального диференціального рівняння у F-просторах із нульовим спряженим. Побудовано приклад неперервної, інтегровної за Ріманом L_p-значної ($0<p<1$) функції, для якої інтеграл зі змінною верхньою межею - не диференційовна функція. Описано деякий клас розв'язків рівнянь з постійним оператором у p-банахових просторах ($0<p<1$).

Теоретична та практична цінність. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути покладені в основу теоретичних досліджень диференціальних рівнянь у не локально опуклих просторах, теорія яких на сьогодні ще не розроблена.

Апробація роботи. Результати дисертації регулярно обговорювались на семінарі з функціонального аналізу в Запорізькому університеті (керівник - доц. Шевчик В.В.); доповідались та обговорювались на школах з теорії операторів в функціональних просторах: в Ульяновську у

1990р. та в Нижньому Новгороді у 1991р., а також на семінарі з теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними в Чернівцях у 1992р. (керівник - проф. Івасишен С.Д.).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 5 наукових праць.

Об'єм роботи. Робота складається з вступу та трьох глав; всього 82 сторінки друкованого тексту. Список літератури містить 28 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ. Глава 1 присвячена опису множини $\Theta(X)$ розв'язків тривіальної задачі Коші:

$$\begin{cases} x'(t)=0 \\ x(0)=0 \end{cases} \quad t\in[0,1]$$

Ми вводимо поняття м'якого простору: F-простір X будемо називати м'яким, якщо для довільного елементу $x_0\in X\setminus\{0\}$ існує константа $K>0$ така, що для будь-якого $y_0\in X$ знайдеться лінійний неперервний оператор $T:X\to X$, для якого $Tx_0=y_0$ і $\|T\|\le K\|y_0\|$. Зокрема, в дисертації доведено, що L_p $(0<p<1)$ - м'який простір. Далі ми доводимо, що якщо X -м'який простір із нульовим спряженим, то лінійний простір $\Theta(X)$ щільний в просторі $C_0([0,1],X)$ всіх неперервних функцій $y:[0,1]\to X$ з умовою

$y(0)=0$ відносно рівномірної F-норми

$$\|y\| = \max_{0\le t\le 1} \|y(t)\|.$$

Далі ми наводимо опис $\Theta(L_p)$ при $0<p<1$. Легко бачити, що простір $\mathcal{L}_p$ всіх функцій $x:[0,1]\to L_p$, які задовольняють умову Ліпшиця:

$$\|x(t)-x(s)\| \le M\,|t-s|$$

з p-нормою - найкраща константа M в умові Ліпшиця, причому $x(0)=0$, міститься в $\Theta(X)$. Ми доводимо ізометричність трьох p-банахових просторів: $\mathcal{L}(L_p)$, $\mathcal{L}_p$ та простору M_p всіх L_p-значних двійкових мартингалів $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, для яких скінченна величина :

$$\|\{u_n\}_{n=0}^{\infty}\| = \sup_n \left\{2^{n(1-p)} \sup_{0\le t\le 1} \|u_n(t)\|\right\}.$$

Ми доводимо також в главі 1, що $\Theta(L_p)$ є замкнений підпростір p-банахового простору Γ_p всіх функцій $x:[0,1]\to L_p$ $(0<p<1)$, виходячих з нуля: $x(0)=0$, що задовольняють умову Гельдера з показником p:

$$\|x(t)-x(s)\| \le M\,|t-s|^p$$

відносно p-норми - найменшої константи в умові Гельдера.

У главі 2 ми досліджуємо питання існування розв'язків найпростіших рівнянь. Перше найпростіше питання існування розв'язку рівняння $x'(t)=y(t)$ із заданою функцією $y(t)$ (фактично - питання існування первісної для $y(t)$) призводить до наступної проблеми, на яку не знають сьогодні відповіді провідні фахівці в цій галузі (Н. Калтон, С. Ролевич, Д. Паляшке).

ПРОБЛЕМА. Чи кожна неперервна функція $y:[0,1]\to L_p$ $(0<p<1)$ має первісну?

Один з класичних прийомів знаходження первісної - перехід до інтеграла Рімана зі змінною верхньою межею :

$$x(t)=\int_0^t y(\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

Але цей прийом діє тільки в локально опуклих просторах. Як вже відмічалося вище, якщо X - не локально опуклий F-простір, то існує неперервна функція $y:[0,1]\to X$, яка не інтегровна за Ріманом. Але навіть і для класу неперервних інтегровних за Ріманом функцій формула (1) не завжди дає первісну. Ми будуємо приклад неперервної інтегровної за Ріманом функції $y:[0,1]\to L_p$ $(p<1)$, для якої функція (1) не диференційовна. Серед позитивних результатів відмітимо існування первісної кожної функції, яка задовольняє умову Ліпшиця. Крім того, вдається наближенно знаходити первісні: для кожної неперервної функції $y:[0,1]\to L_p$ і для кожного $\varepsilon>0$ існує диференційовна функція $x:[0,1]\to L_p$ така, що $\|x'(t)-y(t)\|<\varepsilon$ для кожного

$t \in [0,1]$.

Зовсім небагато вдається одержати позитивних тверджень. Основні з них складають зміст третьої глави. У p-банахових просторах дуже просто знайти один з розв'язків задачі Коші для лінійного рівняння з постійним обмеженим оператором:

$$\begin{cases} x' = Tx \\ x(0) = x_0 , \end{cases} \qquad (2)$$

де $T \in \mathcal{L}(X)$. Як і в випадку банахових просторів, цей розв'язок подається у вигляді

$$x(t) = \left(e^{tT}\right) x_0 = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} T^n x_0 .$$

Важче знайти всі розв'язки задачі Коші (2) . В теоремі 3.2.3 вдається знайти клас розв'язків задачі (2) (але не всіх розв'язків) для випадку, коли T - оператор множення на істотно обмежену функцію, та $X = L_p$ при $0 < p < 1$.

Кілька слів про структуру дисертації. Всі теореми, леми, твердження мають спільну потрійну нумерацію (номер глави - номер параграфа - номер твердження). Література нумерується в порядку слідування посилань.

Автор висловлює подяку Н. Калтону, В. К. Маслюченко.

М. М. Попову та С. Ролевичу за допомогу в роботі.

Основні результати та висновки.

1. Доведено, що у F-просторах з певною властивістю множина розв'язків тривіального диференціального рівняння щільна в множині всіх неперервних функцій з рівномірною нормою, що приймають значення у цьому просторі (наприклад, такою властивістю володіють L_p при $p<1$);

2. Доведено ізометричність трьох p-банахових просторів: простору $\mathcal{L}(L_p)$ всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі L_p; простору $\mathcal{Y}_p$ всіх L_p-значних функцій, що виходять із нуля та задовольняють умову Ліпшиця; простору M_p всіх L_p-значних двійкових мартингалів, p-норма яких прямує до нуля з швидкістю експоненти з показником $n(1-p)$.

3. Побудовано приклад неперервної, інтегровної за Ріманом функції, що приймає значення в просторі L_p $(p<1)$, для якої інтеграл зі змінною верхньою межею - недиференційовна функція.

4. Описано деякий клас розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійним оператором у p-банахових просторах $(0<p<1)$.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Попова Л.В. О тривиальном дифференциальном уравнении в L_p, $0<p<1$ / В кн.: XV Всесоюз. шк. по теории операторов в функц. пространствах: Тез. докл., Ульяновск, 1990. -ч. II. -С. 51.

2. Попова Л.В. Замечание об интегральном исчислении в F-пространствах L_p, $0<p<1$ /В кн.: XVI Всесоюз. шк. по теории операторов в функц. пространствах: Тез. докл., Нижний Новгород, 1991. -С. 180.

3. Попова Л.В. Вопросы существования первообразных некоторых классов L_p-значных функций /$0<p<1$/. -Запорожье, 1991г. -13с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, №1094-Ук91 Деп.

4. Попова Л.В. Об интегрируемых по Риману L_p-значных функциях. -Запорожье, 1991г. -18с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, №1095-Ук91 Деп.

5. Попова Л.В. Про тривіальне диференціальне рівняння у просторах L_p, $0<p<1$ // Укр. мат. ж. -1992. -44, №9. -С. 1238-1242.