

На правах рукописи

ОЛЕЙНИК Виктор Михайлович

РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ
ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

Специальность 01.04.07 - физика твердого тела

Специальность 01.02.04 - механика деформируемого
твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

СУМЫ - 1993

Работа выполнена в Сумском физико

ЛНБ України ім. В. Стефаника



00814772 (Т)

Научный руководитель - доктор физико-математических наук,
профессор ФИЛЬШТИНСКИЙ Леонид Аншелович

Официальные оппоненты - доктор технических наук,
академик АН Украины
КОСМОДАМИАНСКИЙ Александр Сергеевич
- доктор физико-математических наук,
профессор ОСАДЧУК Василий Антонович

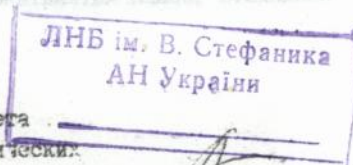
Ведущая организация - Киевский государственный университет

Защита диссертации состоится "2" июня 1993 года в 15 часов
ауд. 216 на заседании Специализированного Совета К 068.49.02 по
присуждению ученой степени кандидата физико - математических наук
в Сумском физико-технологическом институте по адресу: 244007,
Украина, г. Сумы-7, ул. Римского- Корсакова, 2

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке названного
института.

Автореферат разослан "2" июня 1993г.

Ученый секретарь
Специализированного Совета
кандидат физико-математических
наук



А. Я. Флат

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. В последние годы появилось значительное число работ, посвященных различным проблемам электроупругости. Это является свидетельством того, что именно пьезоэлектрикам и родственным им материалам уделяется большое внимание как в практических, так и в теоретических разработках. Еще в работах У. Мэзона, У. Кэди, Д. Берлинкура и др. описываются свойства пьезоэлектриков, а также обобщается материал связанный с их применением.

Линеаризация уравнений электроупругости для пьезоактивных материалов приведенная У. Мезоном, а также экспериментальные данные показывают, что в отношении механических и электрических свойств пьезокерамики ведут себя как трансверсально-изотропные тела. Ось симметрии совпадает с направлением поля предварительной поляризации. Так как пьезокерамика является хрупким материалом с незначительным размером пластической зоны у вершины трещины и вплоть до разрушения ведет себя как упругий материал, то это позволяет с высокой степенью точности описывать кинематику среды линейным тензором деформации. Линеаризация уравнений электроупругости приводит к более простым выражениям и позволяет применять различные методы решения краевых задач.

Один из эффективных методов решения задач электроупругости состоит в сведении их к краевым задачам теории функций комплексного переменного. Это проделано в работах А. С. Космодамианского, В. Н. Ложкина, А. П. Кравченко, И. А. Вековичевой, Л. В. Белокопытовой, О. А. Иваненко, Л. А. Фильштинского и др.

Существенным является вопрос о постановке электрических граничных условий как на берегах трещины, так и на границе раздела двух сред. В своих работах И. Б. Половинкина, А. Ф. Улитко, Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракитин, Л. П. Бицадзе и др. рассматривают этот вопрос и приводят несколько вариантов граничных условий.

Задачи связанные с механикой разрушения для различных тел содержатся в монографиях Ю. Н. Работнова, Г. П. Черепанова, В. З. Партона, Е. М. Морозова, А. С. Космодамианского, Г. Г. Писаренко, Д. Брозка, Т. Ексобри, М. Я. Леонова, Ф. Макклиптока, А. Аргона, Дж. Нотта, К. Хеллана, Л. С. Мороза, М. Сиротори, Т. Мнеси, Х. Мадисига, Н. В. Ромалиса, В. П. Тамуж, Л. В. Качанова, А. Н. Гузя и др. в семитомном издании "Разрушение" под общей редакцией Г. Либовица, в справочном пособии под общей редакцией В. В. Панасюка и др.

Существуют различные методы решения краевых задач для тел с трещинами. Соответствующие обзоры можно найти в четырехтомном издании под общей редакцией В. В. Панасюка, в монографиях Л. Т. Бережничного, В. В. Панасюка, Н. Г. Сташук, М. П. Саврука, А. П. Дацышин, Г. Я. Попова, в обзоре Л. А. Фильштинского др. Одним из эффективных способов решения таких задач является метод сингулярных интегральных уравнений. Л. А. Фильштинский впервые предложил подходы к решению краевых задач для анизотропной среды с криволинейными разрезами. Он также построил представления соответствующих аналитических функций, которые обеспечивали скачок перемещений и непрерывность вектора напряжений при переходе через разрез. Был проведен асимптотический анализ интегральных представлений решений. В последующих работах была показана эффективность метода интегральных уравнений как для решения задач теории упругости, так и для задач учитывающих пьезоэлектрический эффект.

Решение плоских задач теории упругости для многосвязных изотропных и анизотропных тел с трещинами при помощи комплексных потенциалов приведено в работах С. А. Калоера.

Различные подходы к интегрированию уравнений равновесия для упругого слоя обсуждались в работах А. И. Лурье, Г. С. Шапиро, И. Снеддона, Я. С. Уфлянда, И. И. Воровича, В. М. Александрова, В. А. Бабешко, А. С. Космодамианского, В. А. Шалдырвана, С. Г. Лехниченко, О. К. Аксентяна, О. С. Малкиной и др.

Приближенный анализ трехмерного распределения напряжений в толстой плите, ослабленной прямоугольными и полубесконечными сквозными трещинами при помощи различных подходов рассматривается в работах П. П. Ворошко, D. A. Ayzes, E. S. Folias, R. J. Hartranft, G. S. Sih, M. N. Rao, M. L. Williams, J. L. Swedlow, G. Villareal, G. F. Benitez, Z. S. Alterman, Y. Yamamoto, Y. Sumi, T. A. Cruse и др.

Новый метод решения пространственной задачи теории упругости для изотропного слоя со сквозными трещинами, дающий возможность свести граничную задачу к бесконечной системе одномерных сингулярных интегральных уравнений, предложен Л. А. Фильштинским.

При решении всех этих задач возникает проблема связанная с нахождением различных компонент напряженно-деформированного состояния в точке выхода трещины на свободную поверхность. Как показано в работах J. P. Benthem и др., при выходе трещины ортогонально к границе тела порядок сингулярности в окрестности точки пересечения будет зависеть от свойств среды и может не совпадать с

особенность во внутренних точках фронта трещины.

Связь между механическими и электрическими величинами вносит дополнительные трудности при решении пространственных задач электроупругости. При помощи матрично-операторного метода Б.А. Кудрявцев, В.Э. Партон сводят трехмерные задачи электроупругости для плит общей анизотропии к двумерным. Для решения пространственных задач электроупругости успешно используется также метод собственных вектор-функций, развитый В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко.

При помощи метода А.И. Лурье, В.Е. Жиров получил однородное решение для пьезоэлектрической плиты. Он показал, что однородное решение электроупругости (как и в упругом случае) можно представить в виде суммы трех решений: сгармонического, потенциального и вихревого. Был проведен асимптотический анализ этих решений. Далее в своих работах В.Е. Жиров и Ю.А. Устинов исследовали влияние электрических граничных условий, заданных на торцах, на электроупругое состояние в толстой плите.

Целью диссертации является разработка алгоритма решения плоских и пространственных задач электроупругости при различных типах электрических граничных условий; задач управления параметрами разрушения за счет внешних воздействий; метода решения пространственной задачи для слоя ослабленного сквозными разрезами; получение формул для коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин; исследование взаимодействия дефектов типа трещин в пьезокерамической среде; влияния конфигурации разреза, типа воздействия, а также близости границы на напряженно-деформированное состояние среды.

Общая методика выполнения исследований. С использованием фундаментального решения (функции Грина) для неограниченной и полуограниченной области, записываются интегральные представления решений соответствующих краевых задач, которые затем сводятся к смешанным системам интегральных и алгебраических уравнений. При решении пространственных задач краевые задачи сводятся к бесконечным системам одномерных сингулярных интегральных уравнений, которые в совокупности с дополнительными физическими условиями, реализуются численно.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- 1) Рассмотрены новые задачи электроупругости для неограниченной среды, ослабленной двумя трещинами. Показано, что имеет место

эффект взаимного упрочнения трещин.

2) Рассмотрены задачи управления параметрами разрушения в пьезокерамической полуплоскости с разрезом за счет внешних воздействий. Показана принципиальная возможность такого управления.

3) Разработан алгоритм решения пространственных краевых задач для пьезокерамического слоя и полуслоя со сквозными дефектами типа трещин, состоящий из следующих блоков:

- получение интегральных представлений решений трехмерных задач электроупругости для тел с разрезами;
- сведение граничной задачи к бесконечной системе одномерных сингулярных уравнений;
- разработка схемы численного решения этой системы.

4) Получены новые числовые данные как для задач управления параметрами разрушения, так и для коэффициентов интенсивности механических и электрических величин в пьезокерамическом слое и полуслое, ослабленных сквозными разрезами.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью постановки задач; использованием обоснованных, математически корректных методов их решения; апробированными схемами численной реализации; физической интерпретацией результатов вычислений; сравнением с имеющимися в литературе данными.

Практическая ценность. На основе полученных результатов можно оценить срок службы элементов пьезокерамических преобразователей, а также учесть влияние различных дефектов на электромеханические свойства пьезоэлектрической среды. Разработаны процедуры расчетов коэффициентов интенсивности напряжений и управления ими за счет механической или электрической нагрузки на границе тела.

Результаты работы могут быть использованы в НИИ, занимающихся проектированием приборов из пьезокерамики и разработкой новых пьезокерамических материалов, при прогнозировании долговечности материала и приборов при различных условиях нагружения.

Настоящая диссертационная работа выполнялась в рамках Координационного плана АН УССР № 43 от 17 декабря 1979 года по комплексной проблеме " физико - химическая механика разрушения конструкционных материалов " (Гос. рег. № 01822010418).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на 1 Всесоюзной конференции по механике разрушения (г. Львов, 1987), на 6 Всесоюзной конференции по управлению в механических системах (г. Львов, 1988). Диссертационная работа в

целом обсуждалась на семинаре кафедры прикладной математики СФТИ "Методы прикладной математики в технике" под руководством проф. Л. А. Фильштинского (Сумы, 1992), на научном семинаре механико-математического факультета Киевского государственного университета под руководством чл.-корр. АН Украины А. Ф. Улитко (Киев, 1992), на семинаре кафедры теории упругости и вычислительной математики Донецкого государственного университета под руководством академика АН Украины А. С. Космодамианского (Донецк, 1993), на научном семинаре отдела механики неоднородных тел Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача АН Украины (Львов, 1993).

Публикации. По результатам диссертационной работы опубликовано 6 научных статей.

Объем работы. Диссертационная работа изложена на 124 страницах машинописного текста и состоит из введения, четырех глав, заключения. Содержит 52 рисунка, список литературы из 160 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ.

Во введении дан обзор работ, посвященный исследованию в области электроупругости; показана актуальность выполненной работы. Кратко изложено содержание и основные результаты диссертации.

В первой главе приведены основные соотношения линейной электроупругости, а также общие представления механических и электрических величин в комплексных переменных.

Рассмотрим неограниченную пьезокерамическую среду, отнесенную к декартовой системе координат $ox_1x_2x_3$ (x_3 - ось поляризации) и ослабленную туннельными вдоль оси x_2 трещинами. На берегах трещин и на бесконечности может действовать механическая и электрическая нагрузка.

Используя уравнения состояния, уравнения равновесия, а также уравнения Максвелла (учитывая, что в пьезокерамике отсутствуют свободные электрические заряды и пренебрегая магнитными эффектами), находим решение задачи электроупругости.

Механические и электрические составляющие выражаются через три аналитические функции своих комплексных переменных.

С использованием аналитического представления этих функций, краевые задачи электроупругости сводятся к смешанной системе сингулярных интегральных и алгебраических уравнений.

В этой главе выводятся коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) для пьезоэлектрической среды, содержащей криволинейные тре-

шины, с учетом взаимного расположения дефектов, а также различных типов электрических условий на берегах трещины.

С использованием удельной работы разрушения, строится поверхность разрушающих напряжений. Для этого находим интенсивность потока энергии в вершину трещины

$$\mathfrak{E} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^r (X_n \Delta u_1 + Z_n \Delta u_3 - D_n \Delta \varphi_2) dr \quad (1)$$

где X_n , Z_n , D_n - компоненты векторов механических напряжений и электрической индукции на продолжении за вершину трещины; Δu_1 , Δu_3 , $\Delta \varphi_2$ - скачки механических перемещений и потенциала электрического поля на фронте трещины в окрестности вершины.

Энергетический критерий Гриффитса $\mathfrak{E} = 2\gamma$ (γ - плотность поверхностной энергии), определяет поверхность разрушающих напряжений в пространстве нагружения.

Численная реализация разрешающей системы интегральных и алгебраических уравнений производилась методом механических квадратур.

Из анализа полученных результатов можно сделать вывод, что выбор различных электрических граничных условий на берегах трещины вносит небольшие изменения в величину индукции электрического поля около вершины трещины и практически не влияет на механические коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} .

Во второй главе рассматриваются прямые и (в некотором смысле) обратные задачи электроупругости для пьезокерамической полуплоскости, ослабленной дефектами типа трещин.

Рассматриваются задачи о нахождении коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от кривизны трещины, а также близости ее к границе полуплоскости.

Искомые аналитические функции представляются в виде

$$\phi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_k(t)}{t_k - z_k} dt_k + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^3 \bar{b}_{kn} \int_L \frac{\bar{\omega}_n(t)}{\bar{t}_n - z_k} dt_n \quad (2)$$

функции $\phi_k(z_k)$ обеспечивают автоматическое удовлетворение механических и электрических краевых условий на границе полуплоскости $x_3 = 0$ (граница полуплоскости свободна от сил и незлектризована).

Подставляя предельные значения (2) в краевые условия приходим

к смешанной системе интегральных и алгебраических уравнений, численное решение которых осуществляем при помощи метода механических квадратур.

При переходе от сосредоточенной в какой либо точке нагрузки к распределенной на некотором интервале V , решение ищется в виде свертки от полученного решения для сосредоточенной силы или заряда с интенсивностью $P(x)$ распределения нагрузки.

В соответствии со сказанным представим коэффициенты интенсивности в виде:

$$K_i^{\pm} = \int_V P(x) f_i(\pm 1, x) dx \quad (3)$$

$$f_i(\pm 1, x) = \int_{k=1}^3 R_k \rho_k^0(\pm 1, x) \quad , \quad (i=1, 3)$$

$$R_1 = \pm \sqrt{s'(\pm 1)} \alpha_k(\psi) \gamma_k \quad ; \quad R_2 = \pm \sqrt{s'(\pm 1)} \alpha_k(\psi) \gamma_k (\mu_k \sin \psi + \cos \psi)$$

$$R_3 = \pm \sqrt{s'(\pm 1)} \alpha_k(\psi) \gamma_k \quad ; \quad s' = \frac{ds}{dB} > 0 \quad , \quad K_3^{\pm} = K_0^{\pm}$$

Значения $\rho_k^0(\pm 1, x)$ находится в результате решения соответствующей прямой задачи для сосредоточенной силы или заряда на границе полуплоскости.

На основе решения прямых задач, рассматриваются задачи оптимального управления коэффициентами интенсивности напряжений за счет внешних воздействий.

В третьей главе используется метод предложенный Л. А. Фильштинским при решении пространственной задачи теории упругости для изотропного слоя, имеющего сквозные криволинейные разрезы. При помощи этого подхода краевая задача для слоя или цилиндра с туннельными неоднородностями сводится к бесконечной системе одномерных сингулярных интегральных уравнений.

В этой главе, с использованием данного метода, решается более общая граничная задачи для пьезокерамического слоя ослабленного сквозными трещинами.

Рассматривается пьезокерамический слой, отнесенный к декартовой системе координат $ox_1x_2x_3$ ($-\infty < x_1, x_2 < \infty$; $x_3 = \bar{x}_3/h$; $|x_3| \leq 1$; $2h$ - толщина слоя, x_3 - ось поляризации). Электроупругое состояние данного материала описывается соотношениями:

уравнения состояния

$$\sigma_{11} = C_{11}^E S_{11} + C_{12}^E S_{22} + C_{13}^E S_{33} - e_{31} E_3$$

$$\sigma_{22} = C_{12}^E S_{11} + C_{11}^E S_{22} + C_{13}^E S_{33} - e_{31} E_3$$

$$\sigma_{33} = C_{13}^E S_{11} + C_{13}^E S_{22} + C_{33}^E S_{33} - e_{33} E_3$$

$$\sigma_{12} = (C_{11}^E - C_{12}^E) S_{12} = 2C_{66}^E S_{12} \quad (4)$$

$$\sigma_{13} = 2C_{44}^E S_{13} - e_{15} E_1$$

$$D_i = 2e_{15} S_{13} + \epsilon_{11}^* E_i \quad (i=1,2)$$

$$D_3 = e_{31} (S_{11} + S_{22}) + e_{33} S_{33} + \epsilon_{33}^* E_3$$

уравнения равновесия

$$\sigma_{i,j,i} = 0 \quad (i, j=1, 3) \quad (5)$$

уравнения Максвелла

$$\text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{rot} \vec{E} = 0 \quad (\vec{E} = -\text{grad} \varphi_2) \quad (6)$$

Граничные условия на торцах слоя зададим в виде

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \varphi_2 = \pm V_0 = \text{const}, \quad x_3 = \pm l \quad (7)$$

В работах Ю. А. Устинова, В. Е. Жирова было показано, что однородное решение для пьезокерамического слоя, как и в упругом случае, складывается из суммы трех решений: бигармонического, потенциального и вихревого.

Выпишем каждое из этих решений для симметричного случая нагружения пьезокерамической плиты в комплексной форме.

Бигармоническое решение:

$$u_1 - iu_2 = -2h \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right), \quad u_3 = h^2 g_1 P_1 v^2$$

$$u_4 = 0, \quad \sigma_{13} - i\sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad D_1 - iD_2 = 0 \quad (8)$$

$$E_1 - iE_2 = 0, \quad D_3 = hA(2x - 1)v^2$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2a_{66} h \nabla^2 \varphi ; \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 8a_{66} h \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

где

$$F = \varphi + h^2 g_0 P_2 \nabla^2 \varphi, \quad \partial_z^2 F_1 = -\partial_z^2 F_2 = x^2 \varphi$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad x = (a_{11} - a_{13}^2/a_{33}) / (a_{11} + a_{12} - 2a_{13}^2/a_{33})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0.5(\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial_k = \partial/\partial x_k, \quad (k=1,2), \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

$$g_0 = -a_{13}(2x-1)/(3a_{66}), \quad g_1 = 3g_0, \quad A = (b_{31}a_{33} - a_{13}b_{33})/a_{33}$$

$P_1(x)$ - полиномы Лежандра, F_1 - гармоническая функция, ψ -плоская сгармоническая функция, a_{ij}, b_{ij} - параметры материала.
Вихревое решение:

$$u_1 - iu_2 = 2hi \sum_{n=1}^{\infty} \cos(s_n \gamma_n \bar{x}_3) \partial_{\varphi_n} / \partial z, \quad u_3 = u_4 = 0$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 0, \quad D_3 = 0, \quad E_1 - iE_2 = 0, \quad \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -8a_{66} h \sum_{n=1}^{\infty} \cos(s_n \gamma_n \bar{x}_3) \partial^2 \varphi_n / \partial z^2, \quad (9)$$

$$D_1 - iD_2 = -2b_{15} i \pi \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(s_n \gamma_n \bar{x}_3) \partial_{\varphi_n} / \partial z$$

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = -2a_{44} i \pi \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(s_n \gamma_n \bar{x}_3) \partial_{\varphi_n} / \partial z$$

где

$$\gamma_n = n\pi / (s_n h), \quad (\nabla^2 - \gamma_n^2) \varphi_n = 0, \quad s_n^2 = a_{66} / a_{44}$$

Потенциальное решение:

$$u_1 - iu_2 = 2h \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_3) \psi_k, \quad u_3 = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x_3) \psi_k$$

$$u_4 = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} L_k(x_3) \psi_k, \quad \sigma_{13} - i\sigma_{23} = \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} x_k(x_3) \psi_k, \quad (10)$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2a_{66} h \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x_3) \psi_k$$

$$D_1 - iD_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Gamma_k(x_3) \frac{\partial v_k}{\partial z} + \bar{\Gamma}_k(x_3) \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial z} \right\},$$

$$D_3 = 1/h \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(x_3) \psi_k, \quad (v^2 - \lambda_k^2) \psi_k = 0, \quad \lambda_k = \delta_k / h,$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -4\alpha_0 h \frac{\partial^2}{\partial z^2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x_3) \psi_k,$$

$$E_1 - iE_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ L_k(x_3) \frac{\partial v_k}{\partial z} + \bar{L}_k(x_3) \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial z} \right\}, \quad \sigma_{33} = 1/h \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(x_3) \psi_k$$

где $\alpha_k(x_3), \beta_k(x_3), \gamma_k(x_3), \mu_k(x_3), \Gamma_k(x_3), \eta_k(x_3)$ - находятся из решения соответствующей спектральной задачи.

При рассмотрении пьезокерамической плиты, ослабленной вдоль толщинной координаты x_3 сквозными трещинами L_j ($j=1, n$) (в недеформированном состоянии трещины ассоциируются с математическим разрезом) полагаем, что на берегах разрезов действует поверхностная нагрузка X_ν^\pm ($X_\nu^+ = -X_\nu^- = X_\nu, \nu=1, 3$), а на свободных от механической нагрузки торцах слоя задан электрический потенциал (7). На бесконечности зададим однородное поле механических напряжений σ_{11}^0 . Предположим, что кривизны дуг и функции X_ν удовлетворяют условию Гельдера на L_j и, кроме того X_ν разлагается в ряд Фурье по координате \bar{x}_3 на $[-h, h]$.

Запишем краевые условия на берегах разрезов следующим образом:

$$\begin{cases} (\sigma_{11} + \sigma_{22})^\pm - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})^\pm = \pm 2e^{i\psi} (X_1 - iX_2)^\pm \\ \operatorname{Re} [e^{i\psi} (\sigma_{13} - i\sigma_{23})^\pm] = \pm X_3^\pm \\ E_s^* = E_s^-; \quad D_n^* = D_n^- \end{cases} \quad (11)$$

Интегральные представления входящих в соотношение (8)-(12) гармонических и метагармонических функций должны обеспечивать существование скачков перемещений, а также непрерывность векторов механических напряжений и электрической индукции при переходе

через разрез. Необходимо, чтобы эти представления удовлетворяли условиям затухания перемещений и напряжений, а также электрической напряженности и индукции на бесконечности.

Запишем эти представления, корректные в указанном выше смысле, в виде:

$$\varphi(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \int_L \left[P \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} d\zeta + P_k \frac{\partial}{\partial \zeta} \Delta^2 \sigma d\zeta \right] + \int_L q \Delta^2 \sigma ds$$

$$F_1(x_1, x_2) = -2\pi \operatorname{Re} \int_L P \left[(\zeta - z) (\ln(\zeta - z) - 1) \right] d\zeta \quad (12)$$

$$\varphi_k(x_1, x_2) = \int_L \left[P_k \frac{\partial K_0(\lambda_k r)}{\partial \zeta} d\zeta + P_k^* \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\lambda_k r) d\zeta \right] + \int_L q_k K_0(\lambda_k r) ds$$

$$\varphi_n(x_1, x_2) = \int_L q_n^* K_0(\gamma_n r) ds + 2\operatorname{Re} \int_L R_n \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\gamma_n r) d\zeta$$

где $K_m(x)$ - функция Макдональда m -го порядка

$$\sigma = r^2 \ln r, \quad r = |\zeta - z|, \quad L = \bigcup_{j=1}^n L_j, \quad \zeta - z = re^{i\alpha}$$

$$\operatorname{Im} q_n^* = 0, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L, \quad z = x_1 + ix_2 \quad (13)$$

Интегральные представления для напряжений и электрической индукции получим, вводя в соотношения (8)-(10) формулы для фигурирующих там функций из (12). Удовлетворяя граничным условиям (11) и раскладывая найденные выражения в ряды Фурье, приходим к бесконечной системе одномерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

Главная часть этой системы имеет вид (регулярную часть системы, ввиду ее громоздкости, здесь не выписываем):

$$\int_L \left\{ \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \right) e^{i\psi} \frac{d[u_1^m - iu_2^m]}{ds} + i m \frac{\alpha_{13}[u_3^m]}{\alpha_{11}h} \right\} \delta(\zeta, \zeta_0) ds + \dots = F_m^*(\zeta_0) \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (13)$$

$$\int_L \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{d[u_3^m]}{ds} + 2m([u_1^m] \sin \psi - [u_2^m] \cos \psi) / h \right\} \delta(\zeta, \zeta_0) ds + \dots = F_m^*(\zeta_0) \quad (m=1,2,\dots)$$

где

$$c_{66}^E F_0^*(\zeta_0) = N^0 - iT^0 - 1/2(G_{11}^0 + G_{22}^0 - e^{2i\psi}(G_{22}^0 - G_{11}^0 + 2iG_{12}^0)) + \\ + \frac{e_{15} c_{32}^E - e_{33} c_{13}^E}{c_{33}^E} \frac{V_0}{h} \cdot \delta(\zeta, \zeta_0) = i m \frac{e^{i\psi}}{\zeta - \zeta_0}$$

$$c_{66}^E F_m^*(\zeta_0) = N^m - iT^m, \quad c_{44}^E F_m^*(\zeta_0) = X_3^m, \quad N^m - iT^m = e^{i\psi} (X_1^m - iX_2^m)$$

Структура системы (13) такова, что все неизвестные "завязаны" в ее регулярной части, характеристическая часть системы при каждом фиксированном $m=1,2,\dots$ содержит ровно три функции $[u_1^m], [u_2^m], [u_3^m]$, а при $m=0$ - две функции $[u_1^0], [u_2^0]$.

В силу того, что скачки перемещений на концах разреза должны обращаться в ноль, неизвестные $d[u_p^m]/ds$, разыскиваем в классе h_0 функций неограниченных на концах L .

$$\frac{d[u_p^m]}{ds} = \frac{\rho_p^m(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2} s'(\beta)}, \quad (p=1,3; m=0,1,2,\dots)$$

Поэтому для замыкания алгоритма систему (13) необходимо рассматривать совместно с дополнительными условиями:

$$\int_L d[u_1^m - iu_2^m] = 0, \quad \int_L d[u_j^m] = 0, \quad (j=\overline{1,n}; m=0,1,2,\dots) \quad (14)$$

В результате асимптотического анализа электрических и механических величин в окрестности дефекта получим

$$K_1^{\bar{z}} - iK_{11}^{\bar{z}} = \frac{c_{66}^E \sqrt{\pi}}{\sqrt{S'(\bar{z}_1)}} (1 + c_{12}^E / c_{11}^E) \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1^n(\bar{z}_1) - i \rho_2^n(\bar{z}_1) \cos(s_{01} \bar{x}_3)$$

$$K_{111}^{\bar{z}} = - \frac{h \sqrt{\pi}}{2\sqrt{S'(\bar{z}_1)}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{44}^E \rho_3^n(\bar{z}_1) \sin(s_{01} \bar{x}_3) \quad (15)$$

$$K_{0n} = - \frac{h \sqrt{\pi}}{2\sqrt{S'(\bar{z}_1)}} \sum_{n=1}^{\infty} e_{15} \rho_3^n(\bar{z}_1) \sin(s_{01} \bar{x}_3)$$

Система интегральных уравнений (13) решалась методом редукции с последующим применением метода механических квадратур. В результате задача сводилась к системе линейных алгебраических уравнений.

Приведено распределение относительных коэффициентов интенсивности по толщине пластины ($|x_3| \leq 0.95$) в зависимости от типа приложенной нагрузки, отношения h/l ($2l$ -длина трещины) и конфигурации трещины.

В четвертой главе рассматривается пьезокерамический полуслой, содержащий внутреннюю сквозную трещину. Будем предполагать, что на берегах трещины действует поверхностная нагрузка K_0^{\pm} . Краевые условия на берегах разреза зададим в виде (11), на торгах плиты - (7), а на границе полуплоскости следующим образом:

$$u_2 = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, D_2 = 0; \quad x_2 = 0 \quad (16)$$

или

$$u_1 = u_3 = \sigma_{22} = 0, \varphi_2 = 0; \quad x_2 = 0 \quad (17)$$

Для нахождения напряженно-деформированного состояния в пьезокерамическом полуслое, запишем представления искомых функций

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) &= \varphi^{(1)}(x_1, x_2) + A\varphi^{(2)}(x_1, x_2) \\ \psi_k(x_1, x_2) &= \psi_k^{(1)}(x_1, x_2) + A\psi_k^{(2)}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\phi(x_1, x_2) = \phi^{(1)}(x_1, x_2) - A\phi^{(2)}(x_1, x_2)$$

$$F_1(x_1, x_2) = F_1^{(1)}(x_1, x_2) + AF_1^{(2)}(x_1, x_2)$$

Здесь при $A=0$ - получается задача для слоя; при $A=1$, $A=-1$ - задача для полуслоя с краевыми условиями (16) или (17) соответственно. Представления, содержащие дополнительный источник, записываются аналогично тому как это делалось для слоя.

Численная реализация полученной системы интегро-дифференциальных уравнений осуществлялась как и ранее методом механических квадратур.

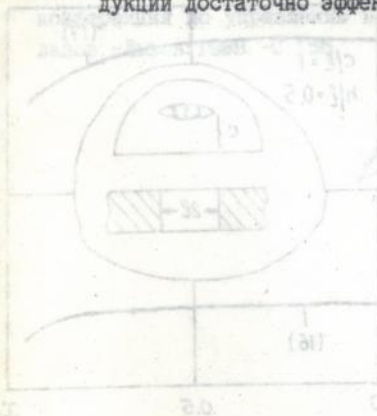
Показано, что при удалении поверхности трещины от границы полуслоя на расстояние $s/l \geq 8$ (s - расстояние до границы полуплоскости), результаты для полуслоя практически совпадают с результатами, полученными при решении соответствующей задачи для слоя.

В заключении сформулированы основные результаты работы и краткие выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ РАБОТЫ.

1. Разработан единый подход к решению двух- и трехмерных краевых задач электроупругости основанный на:
 - а) построении интегральных представлений для электрических и механических величин;
 - б) сведении соответствующих краевых задач к одномерным сингулярным интегральным уравнениям;
 - в) численной реализации полученных алгоритмов.
2. Данный подход позволяет определить сопряженные механические и электрические поля в телах с дефектами, а также построить асимптотику механических и электрических величин в окрестности дефектов.
3. Рассмотрены постановки и схемы решения некоторых обратных задач электроупругости об оптимальном управлении коэффициентами интенсивности за счет внешних воздействий.
4. На основании предложенных подходов получены следующие результаты:
 - а) решена задача о растяжении неограниченной пьезоэлектрической среды ослабленной трещиной, при различных электрических условиях на ее берегах;
 - б) построена поверхность разрушающих напряжений для пьезоэлектрической пластинки, ослабленной двумя трещинами;
 - в) получены данные об оптимальном распределении поверхностных нагрузок, обеспечивающих максимальное значение линейной комбинации КИН или заданные значения КИН в вершинах дефектов;

- г) граничные задачи электроупругости для пьезокерамического слоя и полуслоя со сквозными туннельными разрезами сведены к системам одномерных сингулярных интегральных уравнений;
- д) получены формулы для КИН в виде функционалов, построенных на решениях этих систем.
5. Приводятся новые численные данные характеризующие зависимость параметров разрушения от типа электрических граничных условий на берегах трещин, их конфигурации и взаимного расположения, а также близости границы тела.
6. На основании этих исследований сделаны выводы:
- а) вариация электрических граничных условий на берегах трещины вносит небольшие изменения в индукцию электрического поля в вершине трещины и практически не влияет на коэффициенты интенсивности механических напряжений K_I и K_{II} ;
 - б) механическое растяжение слоя поперек прямолинейной трещины интенсивностью $\sigma_{22}^0 = 15 \text{ н/м}^2$ равносильно электрической нагрузке $V_0/h = 1 \text{ в/м}$, приложенной к торцам плиты;
 - в) влияние границы полуслоя в пьезокерамической среде практически не сказывается на КИН при $c/l \geq 8$;
 - г) численные эксперименты, проведенные над системой интегральных уравнений (13) показали, что решение ее методом редукции достаточно эффективно в интервале $|x_2| \leq 0.95$.



ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Рис. 4

Рис. 3

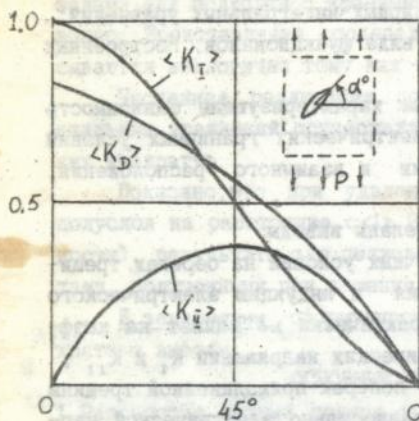


Рис. 1

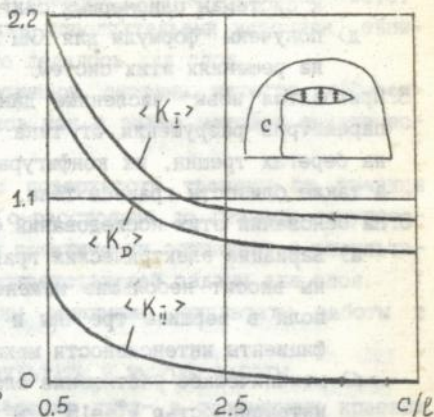


Рис. 2

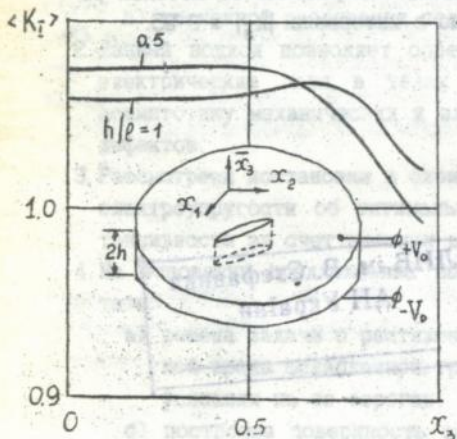


Рис. 3

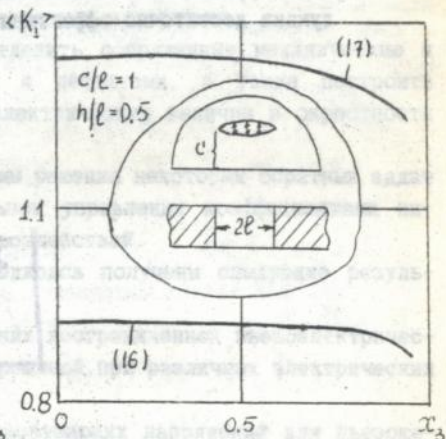


Рис. 4

Основное содержание диссертации отражено в следующих публикациях:

1. Иваненко О. А., Олейник В. М., Фильштинский Л. А. Взаимодействие трещин в пьезокерамике // Динамика и прочность машин. -1983. - Вып. 38. -С.119-121.
2. Фильштинский Л. А., Олейник В. М. Краевая задача электроупругости для слоя с туннельными сквозными разрезами // Прикл. механика. - 1991. -27, №2. -С. 21-26.
3. Фильштинский Л. А., Олейник В. М. К определению поверхности разрушающих напряжений пьезоэлектрической среды в вершине трещины // Физико-химическая механика материалов. -1987. -№5. - С. 96-99.
4. Фильштинский Л. А., Олейник В. М. Пространственная задача электроупругости для слоя с туннельными трещинами // Физико-химическая механика материалов. -1991. -27, №4. -С. 66-72.
5. Фильштинский Л. А., Олейник В. М., Фильштинский Л. А. Об управлении параметрами разрушения тел с трещинами //1 Всесоюзная конференция. Механика разрушения материалов. Тезисы доклада. -Львов: 1987. -С. 89.
6. Фильштинский М. Л., Олейник В. М., Фильштинский Л. А. Оптимальное управление статическими и динамическими коэффициентами напряжений в пьезоэлектрическом полупространстве // Шестая Всесоюзная конференция по управлению в механических системах. Тезисы докладов. -Львов: 1988. -С. 156.

Ваш

Ав 27.637

КАТЕГОРИЯ И ОБЪЕМ РАБОТЫ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ

ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОТЕ



Рис. 3

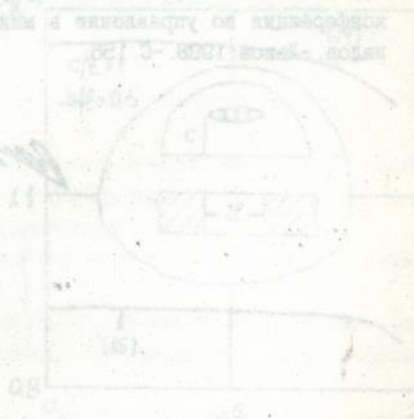


Рис. 4