

КЛІВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

ЛЕБЕДЕВА

Ірина Валеріївна

КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ПРИ ИХ ВРАЩАТЕЛЬНОМ
ДВИЖЕНИИ

01.02.04

механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

К и е в - 1 9 9 3



робота виконана в Київському університеті ім. Тараса Шевченка

чний керівник - член-корреспондент АН України,
доктор фізико-математических наук,
професор УЛИТКО А.Ф.

ціальні споненти - доктор фізико-математических наук,
професор КАРНАУХОВ В.Г.
кандидат фізико-математических наук,
доцент БОРИСЕТКО В.А.

дуюча організація - Київський політехнічний інститут

Захита состоится "30" июня 1993 г. в "15" часов
на заседании специализированного совета К 038.18.09 в Киевском
университете им. Тараса Шевченко по адресу: 252 127 г. Киев-127,
проспект Академика Глушкова, 6, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского
университета им. Тараса Шевченко.

Автореферат разослан "26" мая 1993 г.

Ученый секретарь
специализированного совета кандидат В. КОВАЛЬЧУК В.Ф.
фізико-математических наук

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследования динамики вращающихся тонко - стенных оболочек интенсивно развиваются с начала 70-х годов. Актуальность этих исследований обусловлена использованием эффектов, возникающих в колеблющихся оболочках при вращении, при создании ряда новых технических устройств, в том числе, волновых твердотельных гироскопов, волновых двигателей и др. Создание таких устройств стало возможным благодаря использованию различных пьезокерамических материалов, позволяющих возбуждать волновые процессы в оболочках путем специального приложения поверхностных и внутренних сил.

Изучение колебаний вращающихся тонких колец и оболочек явилось предметом целого ряда теоретических и экспериментальных исследований. В работах В.Ф.Журавлева и Д.М.Климова, А.Сринивасана и Г.Лаутербаха, Дж.Падованна, А.Д.Смирнова и др. излагаются результаты анализа движения узлов стоячих волн во вращающихся кольцах и цилиндрических оболочках, а также обсуждается вопрос об использовании этого эффекта для создания волновых гироскопов. Экспериментальные данные о явлении прецессии стоячих волн во вращающихся оболочках содержатся в работах У.Скотта, М.Эндо и др., И.В.Батова и др. Менее изучены колебания вращающихся сферических и полусферических оболочек. Эти задачи рассматривались В.Ф.Журавлевым и Н.Б.Егарминым.

Динамические явления в оболочках, вращающихся с переменной угловой скоростью, изучены мало и представлены очень незначительным числом работ В.Ф.Журавлева. Исследование переходных процессов в цилиндрических оболочках, обусловленных неравномерностью вращения, представляет собой новую задачу динамики оболочек.

Целью работы является изучение переходных процессов в тонкой

упругой цилиндрической оболочке при ее равноускоренном вращении и анализ расщепления форм колебаний вращающейся сферической оболочки.

Научная новизна диссертационной работы состоит в построении уравнений движения сферической и цилиндрической оболочек в неинерциальной системе координат на основании теории упругости при конечных перемещениях Треффца-Гамеля-Каппуса и исследовании динамики ускоренно вращающихся оболочек.

На защиту выносятся:

-уравнения колебаний вращающихся сферической и цилиндрической оболочек в неинерциальной системе координат и взаимосвязанные с ними уравнения движения Эйлера,

-результаты исследования нормальных мод осесимметричных колебаний вращающейся тонкой сферической оболочки,

-анализ переходных процессов в тонкой цилиндрической оболочке при ее равноускоренном вращении.

- Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием современных физически обоснованных математических моделей применением к решению задач точных аналитических и математически обоснованных численных методов, контролем точности выполнения граничных условий в ходе вычислений.

Практическая ценность работы состоит в построении итерационного алгоритма для решения задач данного типа и в применимости полученных результатов для оценок точности гироскопических приборов, использующих в качестве чувствительных элементов вращающиеся оболочки.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались и обсуждались: -на конференциях молодых ученых Киевского университета /Киев, 1988, 1989 гг./;

-на XVII Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек /Казань, 1990 г./;

-на Республиканской конференции "Динамика твердого тела и устойчивость движения" /Донецк, 1990 г./;

-на научном семинаре "Современные проблемы механики" в Киевском университете им. Тараса Шевченко.

Публикации. По материалам диссертации опубликованы 3 работы.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, двух приложений, списка литературы и содержит 105 страниц машинописного текста, 34 рисунков. Список литературы состоит из 88 наименований; всего 142 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен обзор и анализ работ по исследованию динамики вращающихся оболочек в инерциальных и неинерциальных системах координат, сформулирована цель работы и изложено ее краткое содержание по главам.

В первой главе диссертации построены уравнения движения вращающихся тонких сферической и цилиндрической оболочек как модификаций общих уравнений А.Ф. Улитко применительно к рассматриваемому случаю, определены две основные задачи динамики оболочки в неинерциальной системе координат.

Для описания пространственного движения деформируемых упругих тел использовалась теория упругости при конечных перемещениях Треффца-Гамеля-Каппуса. В соответствии с этой теорией уравнения колебаний вращающихся тонкой пьезокерамической сферической оболочки радиуса a , толщины h , плотности ρ относительно компонент u, v, w вектора упругих перемещений \bar{u} представляются в виде

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (\operatorname{div} \bar{u}) + (1-\nu) \left(\omega_{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial \omega_{\tau}}{\partial \varphi} \right) + D \frac{\partial}{\partial \nu} (\nabla^2 W + \operatorname{div} \bar{u} + 2W) -$$

$$-(1+\nu) a d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = \frac{\rho h a^2}{D_N} \bar{e}_\varphi \cdot \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + 2(\bar{\rho} \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}) + \bar{\rho} \times (\bar{\rho} \times \bar{u}) + (\bar{\rho} \times \bar{u}) \right]; \quad (I)$$

$$\frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{div} \bar{u}) + (1-\nu) (\omega_\varphi - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi}) + \frac{D}{\sin \nu} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^2 W + \operatorname{div} \bar{u} + 2W) + (1+\nu) \frac{\alpha d_{31}}{\sin \nu} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = \frac{\rho h a^2}{D_N} \bar{e}_\varphi \cdot \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + 2(\bar{\rho} \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}) + \bar{\rho} \times (\bar{\rho} \times \bar{u}) + (\bar{\rho} \times \bar{u}) \right];$$

$$(1+\nu) \operatorname{div} \bar{u} - D [(\nabla^2 + (1-\nu))(\nabla^2 W + \operatorname{div} \bar{u} + 2W)] - 2(1+\nu) \alpha d_{31} E_z = \frac{\rho h a^2}{D_N} \bar{e}_r \cdot \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + 2(\bar{\rho} \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}) + \bar{\rho} \times (\bar{\rho} \times \bar{u}) + (\bar{\rho} \times \bar{u}) \right].$$

Здесь \bar{D} - жесткость оболочки при изгибе, D_N - жесткость при растяжении, $D = D/D_N$, E_z - напряженность электрического поля вдоль оси OZ .

Уравнения колебаний вращающейся цилиндрической оболочки радиуса a , толщины h , плотности ρ в подвижной системе координат на основании теории упругости при конечных перемещениях записываются следующим образом

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + a \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \nu a \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\rho h a^2}{D_N} \bar{k} \cdot \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + 2(\bar{\rho} \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}) + \bar{\rho} \times (\bar{\rho} \times \bar{u}) + (\bar{\rho} \times \bar{u}) \right];$$

$$a \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + a^2 \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \quad (2)$$

$$= \frac{\rho \hbar a^2}{D_N} \bar{e}_r \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + 2(\bar{\Omega} \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}) + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{u}) + (\dot{\bar{\Omega}} \times \bar{u}) \right];$$

$$\nu a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w - \frac{\hbar^2}{12} \left(a^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 W}{\partial \varphi^4} \right) =$$

$$= \frac{\rho \hbar a^2}{D_N} \bar{e}_r \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + 2(\bar{\Omega} \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}) + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{u}) + (\dot{\bar{\Omega}} \times \bar{u}) \right].$$

Уравнения (1) и (2) дополняются векторным уравнением Эйлера относительно проекций p, q, r вектора мгновенной угловой скорости $\bar{\Omega}$ вращения неинерциальной системы координат на орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ подвижных осей. Уравнение Эйлера определяет движение неинерциальной системы координат и представляется в виде

$$\begin{aligned} & \bar{i} \left\{ \frac{d}{dt} [pA - qF - rE] - q\dot{f} + r\dot{e} - \dot{a} + qr(C-B) - pqE + \right. \\ & \left. + prF - (q^2 - r^2)D \right\} + \bar{j} \left\{ \frac{d}{dt} [qB - rD - pF] + p\dot{f} - rd - \dot{e} + \right. \\ & \left. + pr(A-C) + pqD - qrF - (r^2 - p^2)E \right\} + \bar{k} \left\{ \frac{d}{dt} [rC - pE - \right. \\ & \left. - qD] - p\dot{e} + q\dot{D} - \dot{f} + pq(B-A) + qrE - prD - (p^2 - q^2)F \right\} = \\ & = \oint_{(S)} (\bar{r} + \bar{u}) \times \bar{F}_n dS + \iiint_{(V)} [(\bar{r} + \bar{u}) \times \bar{P}] dV. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь компоненты тензора инерции вычисляются по формулам типа

$$\begin{aligned} A(t) &= \iiint_{(V)} \rho [(y + u_y)^2 + (z + u_z)^2] dV \\ D(t) &= \iiint_{(V)} \rho [(y + u_y)(z + u_z)] dV, \end{aligned} \quad (4)$$

a $d(t)$, $e(t)$ и $f(t)$ определяются выражениями вида

$$d(t) = \iiint_{(V_0)} \rho [(x + u_x)\dot{u}_y - (y + u_y)\dot{u}_x] dV \quad (5)$$

В (3), (4), (5) введены следующие обозначения:

$\bar{u} = \bar{i}u_x + \bar{j}u_y + \bar{k}u_z$ - вектор смещения, учитывающий отклонения точек срединной поверхности деформируемой оболочки от тех положений, которые имели бы эти точки в абсолютно твердой оболочке;

$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$ - радиус-вектор в подвижной системе координат той точки, которая имеет те же координаты x, y, z в подвижных осях, что и выбранная точка в начальном неподвижном базисе;

\bar{F}_n - вектор напряжения внешних поверхностных сил в расчете на единицу площади первоначальной поверхности S_0 ;

\bar{P} - объемные силы, определяемые по элементам начального объема V_0 .

Приведенное уравнение Эйлера (3) построено на основании теорем о движении центра масс и об изменении момента количества движения для деформируемых оболочек.

В общем случае уравнения упругих колебаний оболочек в неинерциальной системе координат и уравнение Эйлера, описывающее движение этой системы, взаимосвязаны. Их совместное решение представляет трудную математическую задачу, поскольку в начальные моменты времени угловая скорость вращения определяется сложными законами формирования волнового поля в оболочке.

Во второй главе рассмотрены собственные колебания равномерно вращающейся тонкой пьезокерамической сферической оболочки. Для исследования этой задачи использовался метод собственных векторных функций для упругой сферы, берущий свое начало в работах Ламе. В соответствии с этим методом решение уравнений (I) движения упругой сферической оболочки представляется в виде суперпозиции нормальных мод колебаний

$$\bar{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left[u_n^{(k)} \bar{L}_n^{(k)}(\vartheta, \varphi) + V_n^{(k)} \bar{M}_n^{(k)}(\vartheta, \varphi) + W_n^{(k)} \bar{N}_n^{(k)}(\vartheta, \varphi) \right] e^{i\omega t} \quad (5)$$

Здесь $\bar{L}_n^{(k)}$, $\bar{M}_n^{(k)}$ и $\bar{N}_n^{(k)}$ - векторные гармоники:

$$\bar{L}_n^{(k)} = -\bar{e}_r S_n^{(k)}, \quad \bar{M}_n^{(k)} = r \operatorname{grad} S_n^{(k)}, \quad \bar{N}_n^{(k)} = r \operatorname{rot} [\bar{e}_r S_n^{(k)}] \quad (7)$$

$S_n^{(k)}(\vartheta, \varphi)$ - ортонормированные функции Лапласа, ω - частота нормальной моды. Амплитудные функции $u_n^{(k)}(\omega)$, $V_n^{(k)}(\omega)$ и $W_n^{(k)}(\omega)$ определяются из бесконечной цепочки линейных алгебраических уравнений, получаемых в результате подстановки представления (5) в систему (1). Правые части этих уравнений содержат слагаемые с $u_{n-1}^{(k)}$, $u_{n+1}^{(k)}$, $V_{n-1}^{(k)}$, $V_{n+1}^{(k)}$, $W_{n-1}^{(k)}$ и $W_{n+1}^{(k)}$, которые возникают в связи с наличием в (1) членов, описывающих влияние сил Кориолиса на колебания сферической оболочки при ее равномерном вращении. Это свидетельствует о том, что следствием такого вращения является расщепление нормальной моды колебаний, искажение ее формы из-за появления в движении соседних мод колебаний.

Для частного случая /чисто радиальные колебания сферической оболочки: $n = k = 0$ / в результате решения бесконечной системы алгебраических уравнений установлено, что следствием равномерного вращения сферической оболочки является возникновение побочного движения - крутильных колебаний. При этом амплитуды основного и побочного движений $u_0^{(0)}$ и $W_1^{(0)}$ соответственно пропорциональны с коэффициентом порядка ϵ - отношения скорости вращения оболочки к частоте чисто радиальных колебаний при отсутствии вращения. Результатом вращения является также возрастание частоты радиальных колебаний в зависимости от отношения Ω/c , по закону

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{3 a^2 \Omega^2}{3(1-\nu^2)c^2}} \quad (6)$$

Третья глава содержит постановку и решение задач о колебаниях тонких упругих цилиндрических оболочек конечной и бесконечной длины, вращающихся равноускоренно.

В первой задаче исследуются переходные процессы в цилиндрической оболочке длины l , вращающейся под действием приложенного к ее нижнему торцу постоянного момента $2\pi h a^2 \alpha$. В безразмерных обозначениях $\bar{u} = u/a$, $\bar{v} = v/a$, $\bar{w} = w/a$, $\bar{x} = x/l$, $\tau = t c_2/l$ /черточка в последующих выкладках опускается/ эта задача свелась к рассмотрению уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{l}{a} \frac{\partial W}{\partial x} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (9, a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \alpha^2 v + (1-W)\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha} \frac{\partial W}{\partial \tau}$$

$$\nu \frac{l}{a} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{l^2}{a^2} w - \frac{h^2}{12 l^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \alpha^2 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + (1-W)\alpha^2 + \ddot{\alpha} v + 2\dot{\alpha} \frac{\partial v}{\partial \tau} \right]$$

$$\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha} \int_0^1 \frac{\partial W}{\partial \tau} dx + \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} dx = \frac{l}{a} \frac{\tau}{G}, \quad (9, b)$$

которые описывают продольные, окружные и радиальные смещения точек срединной поверхности оболочки в неинерциальной системе координат, а также движение последней. Здесь и далее точкой обозначается обыкновенная производная по безразмерному времени τ .

Система (9) решалась методом последовательных приближений. В первом приближении безразмерное угловое ускорение оболочки, найде-

нное из последнего уравнения, представляется выражением $\varepsilon = \alpha' = -l\tau/a\theta$, а решения уравнений (9,а) имеют следующий вид

$$v = -2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi T \cos k\pi x}{(k\pi)^2} - \frac{\varepsilon}{2} \left[(x-l)^2 - \frac{1}{3} \right]; \quad (10)$$

$$u = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\nu l k \pi A_k^{(1)} \cos \lambda_k^{(1)} T}{a [(k\pi)^2 - (\alpha \lambda_k^{(1)})^2]} + \frac{\nu l k \pi A_k^{(2)} \cos \lambda_k^{(2)} T}{a [(k\pi)^2 - (\alpha \lambda_k^{(2)})^2]} + B_k^{(1)} \cos k\pi T + C_k^{(1)} T \sin k\pi T + u_k^{(1)} \right\} \sin k\pi x; \quad (11)$$

$$W = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k^{(1)} \cos \lambda_k^{(1)} T + A_k^{(2)} \cos \lambda_k^{(2)} T + B_k^{(2)} \cos k\pi T + C_k^{(2)} T \sin k\pi T + W_k^{(1)} \right\} \cos k\pi x - \left(\frac{\varepsilon \alpha a}{l} \right)^2 \left[T^2 - 2 \left(\frac{\alpha a}{l} \right)^2 \right] \quad (12)$$

В решениях (11), (12) частоты $\lambda_k^{(1)}$ и $\lambda_k^{(2)}$ определяются по формулам

$$\lambda_k^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{d_k + \left(\frac{k\pi}{\alpha} \right)^2 \pm \sqrt{\left[d_k + \left(\frac{k\pi}{\alpha} \right)^2 \right]^2 - 4 \left(\frac{k\pi}{\alpha} \right)^2 \left[d_k - \left(\frac{\nu l}{\alpha a} \right)^2 \right]}, \quad (13)$$

$$d_k = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l\alpha} \right)^2 (k\pi)^4 + \left(\frac{l}{a\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{c_2}{c_1},$$

а постоянные интегрирования $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ находятся из начальных условий, соответствующих состоянию покоя в момент начала движения.

Проведен численный анализ аналитических решений (10)-(12), нормированных на величину $a\tau/D_1$ для значений параметров $\nu = 0,31$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $l = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\rho = 7,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $E = 13,9 \cdot 10^{10}$ Нм, $\frac{\tau}{\theta} = 5 \cdot 10^{-12}$, $x = l/2$. Количество членов в рядах (10)-(12) при расчетах равнялось 20. На основании этого анализа ус-

тановлен ряд интересных свойств колебательного движения цилиндрической оболочки конечной длины, вращающейся равноускоренно. Так,

показано, что имеет место ее квазистатическое деформирование, обусловленное возрастающими значениями сил инерции при разгоне, а также колебания оболочки в окрестностях квазистатического деформированного состояния.

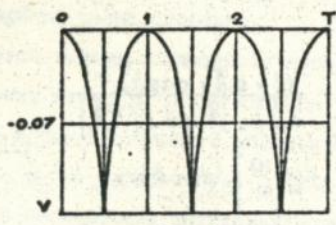


Рис.1

Крутильные колебания осуществляются около положения равновесия статически закрученной вдоль оси оболочки / V

изменяется по параболическому закону/. Во всех сечениях крутильные колебания представляются бегущими волнами с конечными скачками скоростей и напряжений на фронтах волн.

Амплитуды крутильных колебаний с точностью до малых второго порядка остаются постоянными и пропорциональными угловому ускорению /рис.1/.

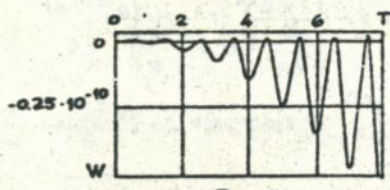


Рис.2

Исходя из рис.2 отмечено, что радиальные колебания цилиндрической оболочки происходят около квазистатического положения равновесия, обусловленного ее радиальным деформированием: увеличивающимися центробежными силами.

Амплитуды радиальных колебаний при разгоне секулярно возрастают во времени. Амплитуды продольных колебаний,

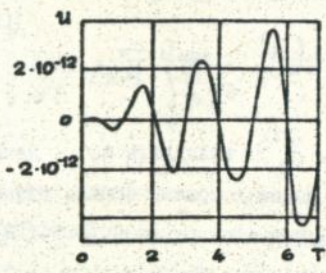


Рис.3

Амплитуды продольных колебаний, обусловленного ее радиальным деформированием: увеличивающимися центробежными силами. Амплитуды радиальных колебаний при разгоне секулярно возрастают во времени. Амплитуды продольных колебаний,

как следует из рис.3, также возрастают; они на несколько порядков меньше амплитуд радиальных колебаний. Наибольшими же в начальные моменты времени являются амплитуды крутильных колебаний. Для больших временных интервалов амплитуды всех трех составляющих вектора упругих смещений могут стать соизмеримыми.

Построенное в диссертации второе приближение для окружных смещений отличается от первого приближения (10) членами второго порядка малости.

Во второй задаче рассматривается бесконечно длинная цилиндрическая оболочка, совершающая колебания на второй окружной нормальной моде по закону

$$\dot{Y} = A \sin 2\varphi \cos \omega T, \quad \dot{W} = B \cos 2\varphi \cos \omega T \quad (14)$$

и приводящаяся в равноускоренное вращение равномерно распределенными по ее поверхности касательными силами τ . В этом случае движение оболочки описывается следующими безразмерными уравнениями

$$\frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial T^2} + (1 - \dot{W}) \ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha} \frac{\partial \dot{W}}{\partial T} - \dot{\alpha}^2 \dot{Y} \quad (15, a)$$

$$\frac{\partial \dot{Y}}{\partial \varphi} - \dot{W} - \beta^2 \frac{\partial^4 \dot{W}}{\partial \varphi^4} = \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial T^2} + (1 - \dot{Y}) \dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha} \dot{Y} + 2\dot{\alpha} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial T};$$

$$\ddot{\alpha} - 2 \frac{\partial \dot{W}}{\partial T} \dot{\alpha} + \frac{\partial^2 \dot{Y}}{\partial T^2} = \frac{a}{\alpha^2 h} \frac{\tau}{G}. \quad (15, b)$$

Здесь введены обозначения

$$\dot{Y} = \frac{Y}{a}, \quad \dot{W} = \frac{W}{a}, \quad \tau = \frac{1c_1}{a}, \quad \beta^2 = \frac{h^2}{12a^2}, \quad \alpha^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}. \quad (16)$$

Начальные условия в этой задаче соответствуют колебаниям цилиндрической оболочки по закону (14) в момент начала вращения:

$$\dot{Y}|_{\tau=0} = A \sin 2\varphi, \quad \dot{W}|_{\tau=0} = B \cos 2\varphi, \quad \left. \frac{\partial \dot{Y}}{\partial T} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial \dot{W}}{\partial T} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (17, a)$$

$$\alpha|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\alpha}|_{\tau=0} = 0. \quad (17, б)$$

Система (15) решается методом последовательных приближений. В первом приближении безразмерное ускорение вращения бесконечно длинной цилиндрической оболочки, найденное из уравнения (15, б), представляется выражением $\epsilon = \ddot{\alpha} = \alpha \omega^2 \tau / h Q$. С учетом этого общее решение граничной задачи (15, а), (17, а) ищется в виде

$$\dot{Y}(\varphi, T) = \Delta(\omega) B \sin 2\varphi \cos \omega T + V_1(T) \sin 2\varphi + V_2(T) \cos 2\varphi + Y^{(4)}(T) \quad (18)$$

$$\dot{W}(\varphi, T) = B \cos 2\varphi \cos \omega T + W_1(T) \cos 2\varphi + W_2(T) \sin 2\varphi + W^{(4)}(T).$$

Частные решения $Y^{(4)}(T)$ и $W^{(4)}(T)$ уравнений (15, а), соответствующие слагаемым, не содержащим $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$ после подстановки в эти уравнения выражений (18), представляются степенными рядами. Коэффициенты этих рядов определяются с помощью рекуррентных формул.

Нахождение функций $V_1(T)$, $V_2(T)$ и $W_1(T)$, $W_2(T)$ в представлениях (18) сведено к интегрированию следующих уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{V}_1 + (4 - \epsilon^2 T^2) V_1 - \epsilon(2T \dot{W}_2 + W_2) - 2W_1 &= \epsilon^2 T^2 \Delta(\omega) B \cos \omega T \\ \ddot{V}_2 + (4 - \epsilon^2 T^2) V_2 - \epsilon(2T \dot{W}_1 + W_1) + 2W_2 &= \epsilon B (\cos \omega T - 2T \sin \omega T) \\ \ddot{W}_1 + [(1 + 16j^2) - \epsilon^2 T^2] W_1 + \epsilon(2T \dot{V}_2 + V_2) - 2V_1 &= \\ &= \epsilon^2 T^2 B \cos \omega T \\ \ddot{W}_2 + [(1 + 16j^2) - \epsilon^2 T^2] W_2 + \epsilon(2T \dot{V}_1 + V_1) + 2V_2 &= \\ &= -\epsilon \Delta(\omega) B (\cos \omega T - 2T \sin \omega T) \end{aligned} \quad (19)$$

На основании построенных численно методом Рунге-Кутты решений системы (19) функции $Y_1(T) \sin 2\varphi + Y_2(T) \cos 2\varphi$ и $W_1(T) \cos 2\varphi + W_2(T) \sin 2\varphi$ с достаточной степенью точности могут быть аппроксимированы функциями $V_0 T^2 \cos 2\varphi \sin \omega T$ и $W_0 T^2 \sin 2\varphi \sin \omega T$ соответственно. Таким образом, общее решение (18) представимо в виде

$$\dot{Y}(\varphi, T) = [A(\omega)B - V_0 T^2] \sin 2\varphi \cos \omega T + V_0 T^2 \sin(\omega T + 2\varphi) + V^{(4)}(T) \quad (20)$$

$$\dot{W}(\varphi, T) = [B - W_0 T^2] \cos 2\varphi \cos \omega T + W_0 T^2 \cos(\omega T - 2\varphi) + W^{(4)}(T)$$

Из выражений (20) следует, что в результате возмущений, обусловленных равноускоренным вращательным движением, стоячая изгибная волна, возбужденная в бесконечно длинной цилиндрической оболочке до вращения, трансформируется в суперпозицию стоячей волны с убывающей амплитудой и прямой бегущей волны с амплитудой, возрастающей по квадратичному закону. Аналогичное явление имеет место и для стоячей крутильной волны с одной лишь разницей, что возникающая вследствие вращения бегущая волна является обратной. Частоты всех описанных выше волн одинаковы и совпадают с частотой исходных стоячих волн.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации :

I. На основании общих уравнений пространственного движения упругих тел выведены уравнения колебаний тонкостенных сферических и цилиндрических оболочек с учетом их вращательного движения. Установлено, что при неравномерном вращении оболочек уравнения колебаний и уравнения вращательного движения Эйлера являются взаимосвязанными. Раскрыт смысл понятия угловой скорости вращения для тех начальных моментов времени, когда волновое поле образуется лишь в части объема оболочки, и вращательное движение ее как единого целого еще отсутствует.

2. С использованием метода собственных векторных функций изучено явление расщепления нормальных мод колебаний тонкостенной сферической оболочки при ее равномерном вращательном движении. Найдено, что имеет место не только расщепление, но и трансформация различных, независимых в неподвижной оболочке, типов колебаний. Проведен анализ трансформации чисто радиальных колебаний в крутильные колебания сферической оболочки.

3. Изучена задача о равноускоренном вращательном движении цилиндрической оболочки конечной длины при нагружении постоянным крутящим моментом на нижнем торце. По методу последовательных приближений вычислена статическая крутильная деформация и волновое поле в оболочке. Установлен закон изменения прогибов оболочки для различных сечений с течением времени. Наряду с квазистатической составляющей прогибов имеют место их значительные осцилляции с частотой, соответствующей первой частоте собственных крутильных колебаний. Показано, что крутильные волны и радиальные осцилляции приводят к нерегулярности вращательного движения оболочки.

4. Как обобщение известной задачи Брайана рассмотрено равноускоренное вращательное движение цилиндрической оболочки, колеблющейся на второй окружной нормальной моде. Решение построено численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Частное решение для центробежных сил найдено в виде степенных рядов. Анализировались два случая равноускоренного вращения оболочки — для относительно малых и больших угловых ускорений. Найдено, что для малых ускорений колебательный процесс оболочки в начальные моменты времени можно представить суперпозицией стоячей волны с медленно убывающей амплитудой и бегущей волны с нарастающей амплитудой. С течением времени радиальные перемещения точек оболочки от центробежных сил становятся столь значительными, что колебательными движениями практически можно пренебречь. Для больших ускорений уже с начальных

моментов времени амплитуды колебаний пренебрежимо малы по сравнению с перемещениями от центробежных сил.

В приложениях I, 2 приведены соответственно программа построения графиков на основании имеющихся аналитических решений, программа численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка, а также графики зависимостей безразмерных компонент вектора упругих смещений цилиндрической оболочки от безразмерного времени.

Основные результаты работы отражены в следующих публикациях:

1. Лебедева И.В., Пятацкий В.А., Улитко А.Ф. Расщепление нормальных мод колебаний тонкостенной пьезокерамической оболочки при ее вращательном движении. - В кн.: Тр. XVII Всесоюз. конференции по теории пластин и оболочек /Казань, 1990 г./ - Казань, 1990, т.2
2. Лебедева И.В. Собственные колебания вращающейся пьезокерамической сферической оболочки. - В сб.: Динамика твердого тела и устойчивость движения. Тезисы докладов республиканской конференции. - Донецк, 1990, с.55.
3. Улитко А.Ф., Лебедева И.В. Колебательные процессы в ускоренно вращающейся тонкой упругой цилиндрической оболочке. - Докл. АН Украины, сер.А, 1992, №4, с.44-48.

И.Л.

Подписано к печати 06.05.93.

Формат 60x84/16. Бум. тип. № 1.

Офсетная печать. Бесплатно.

Ус.п.л. I, I. Заказ 704

Тир. 100 экз.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

U65914

AV 27.717