Інститут проблем машинобудування
АН України

На правах рукопису

Єременко Сергій Юрійович

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ БУДІВЕЛЬНИХ І МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНИХ СТРУКТУРНИХ І РІВНОВАЖНИХ МЕТОДІВ

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

05.13.16 - Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів в наукових дослідженнях
01.02.04 - Механіка деформівного твердого тіла

Харків - 1993

Робота виконана на кафедрі автоматизації виробництва та проектування у Харківському інженерно-будівельному інституті

Науковий консультант: академік АН України, доктор фізико-математичних наук Рвачов В.Л.

Офіційні опоненти: академік АН України, доктор технічних наук Космодаміанський О.С., доктор технічних наук, професор Пискунов В.Г., доктор технічних наук, доцент Курпа Л.В.

Провідна установа - Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача АН України /м.Львів/

Захист відбудеться "15" вересня 1993 р. о 14 год. в ауд. №III2 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 016.22.02 при Інституті проблем машинобудування АН України за адресою: 310046, Харків, вул. Пожарського, 2/10

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту проблем машинобудування АН України

Автореферат розісланий 20.07.93

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради — докт.техн.наук Т.І.Шейко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми: Одним з основних напрямів розвитку науково-технічного прогресу в нашій країні та в світі є розробка нових високоефективних конструкцій і машин різного призначення- будівельних, машинобудівних, авіаційних та інших. Якість виробів насамперед визначається якістю їх проектування, яка безпосередньо залежить від уміння конструктора моделювати роботу конструкції при різного роду впливах -силових, теплових, електромагнітних та ін. Одним із розділів загального моделювання є математичне комп'ютерне моделювання, яке дозволяє шляхом реалізації на комп'ютері математичних моделей у формі крайових задач досліджувати особливості деформування конструкцій. Дисертація присвячена реалізації таких етапів математичного моделювання процесів деформування будівельних і машинобудівних конструкцій: розробка методів і алгоритмів розв'язку крайових задач механіки, реалізація цих алгоритмів на сучасних комп'ютерах, дослідження особливостей деформування конструкцій різного призначення. Особлива увага приділяється питанням розробки нових варіантів дискретних методів, що допускають ефективне спряження з методом скінченних елементів у рамках єдиної програмної реалізації.

Дисертація виконана у відповідності до цільової комплексної програми Міністерства вищої освіти УРСР " Створення та розвиток систем автоматизованого проектування /САПР/ і їх підсистем" на 1986-1990 рр., республіканської цільової комплексної науково-технічної програми Міністерства вищої освіти УРСР "Матеріалоємність" РН.55.08.Ц.07.08 /завдання РН 55.08.Ц.02.05.Т6/, а також тематики науково-дослідних робіт Харківського інженерно-будівельного інституту з підприємствами ВО атомного турбобудування "Харківський турбінний завод",Запорізького ВО "Моторобудівник","Харківські теплові мережі".

Метою дисертації є розвиток наукового напряму розробки та застосування нових варіантів дискретних методів і програмних комплексів для математичного моделювання процесів деформування будівельних і машинобудівних конструкцій.

Для досягнення цієї мети в дисертації були поставлені такі задачі.

I. Розробити новий варіант граничних варіаційних методів-метод рівноважних граничних елементів.

2. Розробити дискретний варіант структурного методу R-функцій - структурний метод скінченних елементів.

3. Розробити методику розрахунку статики та динаміки тонких і нетонких анізотропних оболонок подвійної кривизни на основі методу гібридних скінченних елементів з аналітичним обчисленням матриць жорсткості.

4. Розробити та впровадити в практику обчислювальний комплекс нового покоління, що реалізує у рамках єдиної програмної системи відомі й нові варіанти дискретних методів.

5. Провести математичне моделювання процесів деформування різних елементів будівельних і машинобудівних конструкцій.

Наукова новизна дисертації полягає в:

- розробці одного з варіантів граничних варіаційних методів розв'язку крайових задач, що списуються системами диференціальних рівнянь в частинних похідних з кусково-постійними коефіцієнтами - методу рівноважних граничних елементів;

- розробці числово-аналітичного методу розв'язку крайових задач механіки та математичної фізики- структурного методу скінченних елементів /СМСЕ/;

- розробці методики розрахунку статики та динаміки тонких і нетонких пологих анізотропних оболонок подвійної кривизни на основі методу гібридних скінченних елементів з аналітичним обчисленням матриць жорсткості;

- побудові узагальнюючих відомі інтегральних рівностей теорії пружності;

- розробці компактного матричного способу побудови пучків функцій, що точно враховують силові та кінематичні граничні умови для тривимірного анізотропного пружного тіла довільної форми;

- розробці теорії гібридного варіанта структурного методу для розв'язання крайових задач з мішаними граничними умовами;

- розробці ефективних способів аналітичного врахування особливостей поведінки розв'язків в методах скінченних елементів.

Вірогідність отриманих результатів підтверджується:

- порівнянням з точними розв'язками та розв'язками інших авторів;

- аналізом збіжності результатів при згущуванні сітки скінченних і граничних елементів та плавності зміни кольорів ізоліній, відображуваних на екрані комп'ютера;

- доведенням збіжності та одерж...нням оцінок швидкостей збіжності одного з варіантів структурного методу скінченних елементів;

- використанням для розрахунку таких типів скінченних елементів і схе : методу, для яких доведено збіжність;

- застосуванням для розв'язання однієї і тієї ж крайової задачі різних варіантів дискретних методів;

- використанням для задач розрахунку оболонок таких теорій, для яких доведено збіжність до дійсного розв'язку "зверху" та "знизу", що визначає діапазон, всередині якого знаходиться точний розв'язок;

- відомим з літератури експ. иментальним підтвердженням ряду досліджених механічних ефектів і близьких до них, наприклад ефектів незалежності деяких власних частот від міри анізотропії, ударного руйнування шаруватої балки з тильної сторони, термовиблення шаруватих пластин по асиметричних формах, існування критичного значення кривизни оболонки з максимальним термовигином та ін.;

- прямим експериментальним підтвердженням деяких розрахованих характеристик на підприємствах, де впроваджено результати дисертації.

Практична цінність роботи полягає в тому, що:

- розроблена для комп'ютерів типу IBM PC/AT, VAX програмуюча система АСТРА може бути застосована у різних галузях науки й техніки для математичного моделювання лінійних і нелінійних, статичних і динамічних процесів деформування широкого класу одно-, дво-, тривимірних, осесиметричних та оболонкових конструкцій різного призначення;

- розроблений програмний комплекс РАСТР може бути застосований в енергетиці, хімічній і нафтопереробній промисловості для проектування за допомогою IBM PC/AT міцних розгалужених просторових трубопроводів води, пари, газу, нафти та інших продуктів;

- проведені розрахунки статичного напружено-деформованого стану скручуваних стержнів, згинальних пластин, плоских областей з вирізами; грунту з підземною виробкою , гофрованої оболонки хвилястого компенсатора, статики й динаміки оболонки з вирізом;

власних коливань пера компресорної лопатки двигуна; динаміки шаруватої балки при поперечному ударі; терможолоблення плоских шаруватих панелей і відсіку циліндричної оболонки; міцності та компенсації реальних трубопроводів гарячої води м.Харкова дозволяють краще зрозуміти особливості деформування конструкцій та кількісно і якісно оцінити оптимальність проекту конструкції за міцнісними та жорсткісними характеристиками;

- виявлені та досліджені механічні ефекти, зокрема незалежності деяких власних частот повздовжніх коливань пластини від міри анізотропії ; згущування спектра власних частот областей волокнистої будови у вузьких частотних діапазонах; існування критичного значення кривизни циліндричної панелі з максимальним терможолобленням та інші розширють арсенал знань матеріалознавців і конструкторів про особливості поведінки матеріалів і конструкцій при складних процесах навантаження.

Впровадження. Прикладні програмні комплекси для САПР впроваджено на виробничому об'єднанні атомного турбобудування "Харківський турбінний завод" у 1988 р. з участю на паях автора у створенні економічного ефекту 47000 крб./рік. Методика і пакети прикладних програм для САПР елементів газотурбінних двигунів впроваджено на Запорізькому виробничому об'єднанні "Моторобудівник" у 1990 р. з участю на паях автора у створенні економічного ефекту 124400 крб./рік. Методики й алгоритми розрахунку трубопровідних систем, реалізуючий їх програмний комплекс РАСТР і практичні рекомендації по удосконалюванню конструктивно-технологічних рішень впроваджено на підприємстві "Харківські теплові мережі" у 1992 р. з економічним ефектом 850000 крб./рік /за цінами 1991 р./. Методики та програми розрахунку елементів будівельних конструкцій впроваджено в учбовий процес Харківського інженерно-будівельного інституту у 1991 р.

Апробація роботи. Дисертація у повному обсягові доповідалась: на спільному семінарі кафедри теорії пружності Донецького університету та Інституту прикладної математики і механіки АН України /Донецьк, 1992 /, науковому семінарі Інституту механіки АН України з напряму" Будівельна механіка тонкостінних оболонок"/Київ, 1992/; на спільному семінарі Інституту прикладних проблем математики та механіки АН України, кафедри прикладної математики Львівського політехнічного інституту та Львівського університету /Львів, 1992/; на семінарі кафедри опору матеріалів Київського автодорожнього інституту /Київ, 1992/; на семінарі кафедри динаміки та міцності машин Харківського політехнічного інституту /Харків, 1992/; на семінарі механіки суцільного середовища ім. Л.О.Галіна в Інституті проблем механіки Російської академії наук /Москва, 1993/.

Окремі частини дисертації доповідались на науково-технічних конференціях професорсько-викладацького складу Харківського інженерно-будівельного інституту /Харків, 1987-1992/, на семінарі АН СРСР в МДТУ ім.Баумана /Москва, 1988/, на І-му радянсько-американському симпозіумі з механіки композитних матеріалів /Рига, 1989/, на республіканській науково-технічній конференції "Ефективні чисельні методи розв'язку крайових задач механіки деформівного твердого тіла /Харків, 1990/, на міжреспубліканській науково-технічній конференції "Чисельні методи розв'язку крайових задач теорії пружності та пластичності /Волгоград, 1990/, на 10-й школі-семінарі "МСЕ-92" /Одеса, 1992/.

Публікації. Результати дисертації опубліковано в 20 працях, що включають 2 монографії, 2 учбових посібники, 6 статей у всесоюзних журналах, 1 статтю у міжнародному журналі, 3 депонованих рукописи, 4 тези доповідей, 2 методичні вказівки.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, 6 розділів, висновку, списку літератури з 227 найменувань, 58 рисунків, 11 таблиць, усього 270 стор.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми, сформульовані мета та задачі, наукова новизна та практична цінність дисертації.

У першому розділі приведено матричне формулювання крайових задач теорії пружності та сформульовано інтегральні рівності теорії пружності, із яких безпосередньо можуть бути одержані багато відомих і ще не розроблених варіаційних та неваріаційних методик розв'язку крайових задач механіки. Більш частинні інтегральні співвідношення були отримані раніше Л.О.Розіним.

Під впливом заданих об'ємних сил у тілі об'єму V, виникають напруження $\sigma=\{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T$, деформації $\varepsilon=\{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T$, переміщення $\vec{u}=\{u_x u_y u_z\}^T$, поверхневі зусилля $\vec{p}=\{p_x p_y p_z\}^T$, причому всередині тіла справедливі співвідношення $\varepsilon = R\vec{u}$ /1/, $\sigma = D\varepsilon$ /2/, $\vec{p}=C\sigma$ на S_1 /3/, $R^T\sigma+\vec{F}=0$ /4/, а на ділянках межі S_1 та S_2 - граничні умови

$\vec{u}=\vec{u}^*$ на S_1; /5/ $\quad \vec{p}=C\sigma=\vec{p}^*$ на S_2. /6/

D /6 x 6/ - це матриця пружних сталих анізотропного матеріалу, R -диференціальний оператор, C - матриця напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі $S = S_1 + S_2$:

$$R^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad /7/ \qquad C = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}. \quad /8/$$

Крайова задача теорії пружності в переміщеннях визначається диференціальними рівняннями рівноваги та граничними умовами:

$$[R^T D R]\vec{u} + \vec{F} = 0 \quad /9/, \qquad \vec{u} = \vec{u}^* \text{ на } S_1 \quad /10/,$$
$$C D R \vec{u} = \vec{p}^* \text{ на } S_2 \quad /11/.$$

Пряма інтегральна рівність і її модифікована форма відповідно мають вигляд:

$$\int_V \{\vec{u}_1^T(R^T\sigma + \vec{F}) + \varepsilon_1^T(\sigma - D\varepsilon) + \sigma_1^T(\varepsilon - R\vec{u})\} dV + \int_S \vec{u}_1^T(\vec{p} - C\sigma) dS - \quad /12/$$
$$- \int_{S_1} \vec{u}_1^T(\vec{p} - \vec{p}^*) dS + \int_{S_1} \vec{p}_1^T(\vec{u} - \vec{u}^*) dS = 0;$$

$$\int_V \{-(R\vec{u}_1)^T\sigma + \vec{u}_1^T\vec{F} + \varepsilon_1^T(\sigma - D\varepsilon) + \sigma_1^T(\varepsilon - R\vec{u})\} dV + \quad /13/$$
$$\int_{S_2} \vec{u}_1^T \vec{p}^* dS + \int_{S_1} \vec{p}_1^T(\vec{u} - \vec{u}^*) dS = 0.$$

Тотожне виконання цих інтегральних рівностей можливе у тому випадку, коли переміщення $\vec{u}_1$, деформації ε_1 , напруження σ_1 та зусилля $\vec{p}_1$ є розв'язками спряженої крайової задачі з деякими об'ємними силами F_1 :

$$R^T\sigma_1 + F_1 = 0 \quad /14/, \quad \sigma_1 = D\varepsilon_1 \quad /15/, \quad \varepsilon_1 = R\vec{u}_1 \quad /16/,$$
$$\vec{p}_1 = C\sigma_1 \text{ на } S \quad /17/,$$
$$\int_V \vec{u}^T F_1 dV + \int_S \vec{u}^T \vec{p}_1 dS = \int_V \vec{u}_1^T F dV + \int_S \vec{u}_1^T \vec{p} dS$$

при $\vec{u} = \vec{u}^*$ на S_1 , $\vec{p} = \vec{p}^*$ на S_2. /18/

Обернена інтегральна рівність одержується з прямої інтегруванням по частинах

$$\int_V \{\vec{u}^T(R^T\sigma_1 + F_1) + \varepsilon^T(\sigma_1 - D\varepsilon_1) + \sigma^T(\varepsilon_1 - R\vec{u}_1) - \vec{u}^T F_1 + \vec{u}_1^T F\} dV +$$
$$+ \int_S \vec{u}^T(\vec{p}_1 - C\sigma_1) dS + \int_{S_1} (\vec{u}_1^T \vec{p}^* - \vec{p}_1^T \vec{u}^*) dS + \int_{S_1} (\vec{u}_1 \vec{p} - \vec{p}_1^T \vec{u}^*) dS = 0. \quad /19/$$

Фіксуванням тих чи інших співвідношень /14/-/18/ та прийняттям певних припущень відносно спряжених функцій отримується той чи інший наближений метод розв'язку крайової задачі /1/-/6/. Наприклад, якщо покласти $\vec{u}_1 = 0$ на S_1 і вважати спряжені функції варіаціями вихідних функцій, тобто

$$\vec{u}_1 = \delta\vec{u},\ \varepsilon_1 = \delta\varepsilon,\ \sigma_1 = \delta\sigma,\ \vec{p}_1 = \delta\vec{p}, \qquad /20/$$

то з прямої інтегральної рівності /13/ безпосередньо отримується відоме рівняння узагальненого варіаційного принципу Ху - Васідзу з функціоналом

$$\delta\Pi_w = 0,\ \Pi_w(\vec{u},\varepsilon,\sigma,\vec{p}) = \int\{\tfrac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon - \sigma^T(\varepsilon - R\vec{u}) - \vec{u}^T\vec{F}\}dV_t - \int_{S_t}\vec{u}^T\vec{p}^* dS_t - \int_{S_1}\vec{p}^T({}^v\vec{u} - \vec{u}^*)dS = 0, \qquad /21/$$

і, як окремі випадки, варіаційні рівняння Хеллінгера-Рейсснера, Кастільяна, Лагранжа, Трефтца, принципів віртуальних і додаткових робіт, тотожності Бетті та ін. Пряма інтегральна рівність /12/ є основою узагальненого методу зважених нев'язок, проекційних методів типу Бубнова-Гальоркіна, моментів, штрафних функцій, визначальних станів.

Обернена інтегральна рівність /19/є, зокрема, основою методів типу граничних інтегральних рівнянь /граничних елементів/. Вона перетворюється у відому граничну тотожність Сомільяни, якщо вибирати спряжені функції $\vec{u}_1, \varepsilon_1, \sigma_1, \vec{p}_1$ з класу фундаментальних розв'язків, що відповідають об'ємній силі F_1 у формі дельта-функції. У так званому рівноважному варіанті методу граничних елементів [1] вважається $F_1 = 0$.

Отже, із різних модифікованих форм єдиної інтегральної рівності теорії пружності вдається одержати і варіаційні, і проекційні, і гранично-інтегральні методи.

У другому розділі зроблено короткий огляд найбільш популярних дискретних методів-скінченних і граничних елементів, аналітичних методів однорідних і фундаментальних розв'язків, суперпозиції, рядів, комплексних потенціалів, R - функцій та граничних варіаційних методів типу Трефтца. Обґрунтовано актуальність розробки нових чисельно-аналітичних методів, що поєднують зручність аналітичних розв'язків та універсальність чисельних підходів, зокрема методів, що припускають ефективне спряження з методом скінченних елементів. Зазначено перспективність спряження методу скінченних елементів із структурним методом R - функцій та аналітичних рівноважних методів з методикою скінченно-елементної апроксимації на межі.

У третьому розділі описано метод рівноважних граничних елементів /МРГЕ/ [1,11] , який є одним з граничних варіаційних методів. Відмінність методу від близьких до нього методів розкладання по фундаментальних розв'язках і класичних варіантів варіа-

ційного методу Трефтца полягає в тому, що , ньому вперше в рамках єдиної методики поєднуються такі підходи щодо використання:
- переважно поліноміальних рівноважних апроксимацій;
- енергетичних варіаційних принципів з відомими функціоналами граничних умов;
- процедури дискретизації межі області скінченними елементами.

Таке спряження дозволяє побудувати так звані рівноважні суперелементи, які фактично є великими багатовузловими рівноважними скінченними елементами, для яких також, як і в методі скінченних елементів, вдається побудувати матриці базисних функцій, деформацій, жорсткості та забезпечити стандартне стикування суперелемента з скінченними елементами та іншими суперелементами.

Однорідне тіло або кожна з однорідних підобластей кусково-однорідного тіла зображається одним або розбивається на декілька суперелементів, на межах яких вибирається система m вузлів, що визначає розбиття поверхні суперелемента на численність криволінійних граничних елементів. Всередині суперелемента переміщення зображаються у вигляді суми деякого окремого розв'язку $\vec{u}_0$ неоднорідного матричного диференціального рівняння /9/ та ряду по деякій повній системі частинних розв'язків відповідного однорідного рівняння:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n, \; n = 3m; \qquad /22/$$

$$[R^T D R]\vec{u}_0 + \vec{F} = 0; \quad /23/ \qquad [R^T D R]\vec{u}_i = 0. \quad /24/$$

Методика побудови набору частинних розв'язків рівнянь рівноваги достатньо добре відома й описана у працях П.Ф.Папковича, С.П.Тимошенка, Н.І.Мусхелішвілі, В.Л.Абрамяна, А.Г.Власова, Г.Ю.Джанелідзе, В.Д.Купразде, А.І.Лур'є, В.К.Прокопова, Н.Х.Арутюняна, В.М.Александрова, В.М.Бабича, Б.О.Бондаренка, Г.А.Ваніна, І.І.Воровича, В.Т.Грінченка, О.М.Гузя, О.С.Космодаміанського, С.Г.Лехницького, С.Г.Михліна, В.І.Моссаковського, П.М. Огибалова, Ю.М.Подільчука, Я.С.Підстригача, В.І.Сторожева, А.Ф.Улитка, М.А.Шульги та інших спеціалістів з аналітичних методів теорії пружності. Наприклад, знаючи повну базисну систему степеневих гармонічних поліномів, що задовольняють тривимірне рівняння Лапласа

$$1; x, y, z; \; z^2 - x^2, x^2 - y^2, xy, yz, zx; \; z^3 - 3x^2 z, -x^2 z + y^2 z,$$
$$-3xz^2 + x^3, -x^3 + 3xy^2, yz^2 - x^2 y, -3x^2 y + y^3, xyz; \ldots \qquad /25/$$

за допомогою відомого зображення Папковича-Нейбера загального розв'язку крайової задачі через гармонічні функції φ_i

$$\vec{u} = \vec{\varphi} - \alpha\, grad\,(\varphi_0 + x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3),\ \alpha^{-1} = 4(1-\nu) \qquad /26/$$

неважко побудувати степеневі рівноважні апроксимації /22/. Методика їх побудови для анізотропних двовимірних, динамічних, термопружних та інших задач описана в дисертації.

Підстановка координат кожного з m вузлів до співвідношення /22/ дозволяє з отриманої системи лінійних рівнянь виразити коефіцієнти $C_1, \ldots, C_n$ через вектор переміщень $\{u\}$ граничних вузлів та визначити матрицю рівноважних базисних функцій суперелемента

$$\vec{u} = N\{u\}. \qquad /27/$$

На відміну від базисних функцій звичайного скінченного елемента кожна трійка N_{1i}, N_{2i}, N_{3i} рівноважних базисних функцій точно задовольняє диференціальні рівняння рівноваги /9/, причому деяка компонента вектора переміщень визначається не тільки вузловими значеннями цієї компоненти, але й вузловими значеннями інших компонент.

Знаючи апроксимації переміщень, можна побудувати апроксимації деформацій /I/, напружень /2/ і зусиль /3/ суперелемента :

$$\varepsilon = kN\{u\},\ \sigma = DRN\{u\},\ \vec{p} = CDRN\{u\} = L\{u\}. \qquad /28/$$

Розв'язувальна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$K\{u\} = \{Q\} \qquad /29/$$

з симетричною матрицею жорсткості та вектором навантажень

$$K = \int_{S_2} N^T L\, dS - \int_{S_1} L^T N\, dS, \quad /30/ \quad \{Q\} = \int_{S_2} N^T \vec{p}^{\,*} dS - \int_{S_1} L^T \vec{u}^{\,*} dS \qquad /31/$$

отримується із граничного варіаційного рівняння

$$\int_{S_2} \delta\vec{u}^T(\vec{p} - \vec{p}^{\,*})\, dS - \int_{S_1} \delta\vec{p}^T(\vec{u} - \vec{u}^{\,*})\, dS = 0 \qquad /32/$$

або як умова стаціонарності відомого функціонала граничних умов

$$\Pi_E(\vec{u}) = -\frac{1}{2}\int_V \vec{u}^T F\, dV + \int_{S_2} \vec{u}^T\left(\frac{1}{2}\vec{p} - \vec{p}^{\,*}\right) dS - \int_{S_1} \vec{p}^T\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{u}^{\,*}\right) dS \qquad /33/$$

Описана в дисертації методика спряження сусідніх суперелементів ґрунтується на застосуванні методу множників Лагранжа з додаванням до функціоналу /33/ додатку, що включає переміщення $\vec{u}_{12}$ межі спряження S_{12} :

$$-\int_{S_{12}} \vec{p}^T(\vec{u} - \vec{u}_{12})\, dS. \qquad /34/$$

Обчислювальна ефективність методу пов'язана з невеликим порядком розв'язувальної системи лінійних рівнянь відносно лише граничних переміщень суперелементів, з дискретизацією тільки межі суперелементів, з можливістю оптимального вибору порядку та ширини стрічки матриці розв'язувальної системи за рахунок варіювання кількості та розмірів суперелементів. На відміну від методу граничних елементів, у рівноважному методі нема необхідності в знаннях і оперуванні з сингулярними фундаментальними розв'язками; варіаційна природа методу забезпечує симетричність розв'язувальних систем рівнянь і легкість спряження з іншими варіаційними методами й особливо з методом скінченних елементів.

Зауважимо, що збіжність різних варіантів граничних варіаційних методів доведена С.Г.Михліним, В.Я.Терещенком, В.І.Таракановим.

Для одновимірних крайових задач, які зустрічаються при розрахунках різних стержньових систем, МРГЕ фактично еквівалентний методу рівноважних скінченних елементів [1]. Він є незамінним для розрахунку багатоелементних стержньових і балкових систем, оскільки рівноважний принцип побудови скінченних елементів забезпечує відтворення точних розв'язків на елементах простого вигляду. У дисертації та книзі [1] зроблено огляд застосування методу для розрахунку різних стержньових систем. Зокрема, в роботі [1] побудовано рівноважні скінченні елементи, застосовні для розрахунку розтягу, крутіння та просторового вигину і тонких і нетонких /середньої товщини/ стержнів, у тому числі стержнів із податливих на поперечний зсув матеріалів, наприклад пластиків, композитних матеріалів, армованих бетонів. Приведено розрахунки плоскої ферми та куполоподібної просторової стержньової системи. Рівноважні методики розрахунку багатоелементних стержньових систем зручні для розрахунку напружено-деформованого стану розгалужених трубопроводів, що застосовуються для транспортування гарячої води, пару, нафти чи інших продуктів . Повна методика розрахунку трубопроводів на міцність і компенсацію з урахуванням нелінійних сил тертя, тиску та температури в трубопроводах, специфіки роботи конструктивних елементів трубопроводів типу засувок, компенсаторів, опор реалізована автором у складі обчислювального комплексу РАСТР, опис якого приведено у 6-му розділі дисертації. Там же наведено приклади розрахунків реальних трубопровідних трас м.Харкова.

МРГЕ є ефективним для розв'язання двовимірних крайових за -

дач крутіння стержнів, які, як відомо, зводяться до необхідності розв'язання першої крайової задачі для рівняння Лапласа. Коефіцієнти розкладання розв'язку по гармонічних поліномах I; x, y ; x^2-y^2, $2xy$; x^3-3xy^2,... знаходяться з варіаційного рівняння відносно функції напружень

$$\int_C \frac{\partial}{\partial n} \delta\varphi \cdot \varphi \, dC = 0, \qquad /35/$$

що інтегрується за допомогою розбиття контура C на одновимірні граничні елементи. Розрахунки стержнів еліпсоїдного, прямокутного, трикутного, прапорцеподібного /з врізом/ профілів показали, що при збільшенні числа граничних елементів спостерігається монотонна збіжність наближених розв'язків з точними.

У кінці розділу описано застосування МРГЕ щодо розрахунку вигину тонких ізотропних пластин складної форми. Відоме рівняння Софі Жермен задовольняється точно, якщо прогини задати сумою частинного розв'язку неоднорідного рівняння та бігармонічної функції, яка з допомогою відомої формули Альмансі може бути виражена через дві гармонічні функції, кожна з яких може бути зображена рядом по двовимірних гармонічних поліномах. Розв'язувальне граничне варіаційне рівняння

$$\int_{C_1} \{\delta\theta_x M_x + \delta\theta_y M_y - \delta w Q\} dC - \int_{C_1} \{\delta M_x \theta_x + \delta M_y \theta_y - \delta Q w\} dC + \int_{C_3} \{\delta\theta_x M_x + \delta\theta_y M_y + \delta Q w\} dC = 0 \qquad /36/$$

містить інтеграли по затисненому контуру C_1, вільному контуру C_2 і опертому контуру C_3; M_x, M_y, Q є граничні моменти та сили, що виражаються через звичайні моменти M_{11}, M_{22}, M_{12} і поперечні сили Q_1, Q_2 за формулами

$$M_x = M_{11} n_x + M_{12} n_y; \; M_y = M_{12} n_x + M_{22} n_y; \; Q = Q_1 n_x + Q_2 n_y \qquad /37/$$

Розв'язок тестових задач вигину рівномірним навантаженням круглих і прямокутних затиснених пластин демонструє стійку збіжність прогинів і моментів щодо точних розв'язків, причому задовільні / 1% похибки / розв'язки одержуються при m = 30 граничних елементах /з урахуванням симетрії розв'язку кількість граничних елементів можна скоротити до 8 /. Якщо врахувати, що максимальний час розрахунку на IBM PC/AT одного варіанта не перевищує 2-4 хв., то можна говорити, що створено високоефективну та просту методику розрахунку вигину пластин складної форми. Ефективність методики підтверджується розрахунками більш складних пластин. Зокрема, розрахунок трапецієвидної пластини при m = 36 показав повну відповідність максимальних прогинів і моментів з розрахунком методом R -функцій. Додатково були розраховані трикутні та ромбовидні пластини. Вірогідність результатів підтверджується порівнянням максимальних прогинів і моментів з розрахунками методом скінченних елементів.

Отже, МРГЕ є перспективним числово-аналітичним методом розв'язку крайових задач теорії пружності, що описуються системами диференціальних рівнянь з кусково-постійними коефіцієнтами. Найбільш ефективним слід вважати спільне застосування методів скінченних і рівноважних граничних елементів, коли деякі підобласті тіла зображаються рівноважними суперелементами, а інші - скінченними елементами. На жаль, МРГЕ, як і більшість граничних методів, неефективний для розв'язання крайових задач з перемінними коефіцієнтами диференціальних рівнянь, наприклад для розрахунку пластин перемінної товщини, оболонок, нелінійних проблем механіки.

Четвертий розділ присвячено опису структурного методу скінченних елементів /СМСЕ/, який є чисельно-аналітичним методом, що грунтується на поєднанні методик дискретної скінченно-елементної апроксимації з ідеями аналітичного структурного методу /методу R - функцій/. У створення структурного методу основний внесок зробили В.Л.Рвачов, В.С.Проценко, І.В.Гончарюк, А.П.Слесаренко, О.М.Литвін, В.О.Рвачов, .П.Манько, Л.В.Курпа, О.М.Шевченко, Т.І.Шейко, В.Ф.Кравченко, М.С.Синекоп, Ф.Ф.Коваль та інші. Розроблювачі структурного методу не раз зазначали можливість і перспективність поєднання методу R - функцій з МСЕ. У практичному плані були здійснені роботи щодо обгрунтування та застосування сплайн-апроксимації в структурному методі, при цьому вказувалось на зручність та ефективність її використання для розв'язання різноманітних крайових задач. Тут слід відзначити роботи О.М.Литвіна, В.О.Рвачова, О.О.Федотової. На жаль, до цього часу для побудови сплайнів використовувались лише прямокутні двовимірні носії /фактично; аналоги прямокутних скінченних елементів/, що істотно обмежувало застосовність методу.

Сучасний стан МСЕ дає можливість побудови дискретних апроксимацій на дуже складних областях, зображаючи їх сукупністю скінченних елементів простої форми. При цьому є можливість апроксимації розв'язків , наприклад на криволінійних трикутниках, шестигранниках і т.далі . Тому застосування дискретної скінченно-елементної апроксимації дозволяє істотно розширити діапазон застосовності структурного методу.

Поєднання ідей структурного методу та МСЕ розвиває не лише структурний метод, але й МСЕ. Залучення в МСЕ ідей методу R -функцій дозволяє вирішити такі проблеми принципової важливості:

-точно задовольняти усі або частину кінематичних і силових граничних умов для тіл довільної форми незалежно від числа, форми і характеру розбиття області на скінченні елементи;

- урахувати на аналітичному рівні та привнести до розв'язку особливості поведінки розв'язків в точках з особливим характером навантаження;

- урахувати при розв'язанні крайової задачі результати розв'язку близьких крайових задач.

У працях В.С.Проценка та А.О.Скибіна описано загальну процедуру побудови структурних формул для задач механіки. При цьому рівняння рівноваги та граничні умови формулювались в операторному вигляді. У дисертації і роботах [1, 2, 10] описано розроблений автором матричний спосіб побудови структурних формул, що конкретизує операторний спосіб і дозволяє одержувати структурні формули для переміщень, напружень і деформацій. Застосування матричної алгебри та отримані компактні матричні співвідношення дозволяють значно спрощувати процес побудови структурних формул для задач механіки, у тому числі й для просторових анізотропних тіл довільної форми.

Як відомо, за допомогою теорії R -функцій можна побудувати точні аналітичні рівняння в елементарних функціях дуже широкого класу геометричних фігур. Нехай

$$\omega_1(x,y,z)=0\ ,\quad \omega_2(x,y,z)=0 \qquad /38/$$

є рівняннями ділянок меж S_1 та S_2 відповідно, причому S_1 та S_2 -це ділянки з заданими на них граничними умовами /10/, /11/. При цьому друге рівняння /38/ будемо припускати нормалізованим, так що

$$|grad\,\omega_2|=1 \quad \text{на } S_2\text{, або } \partial\omega_2/\partial x=-n_x\ ,$$
$$\partial\omega_2/\partial y=-n_y\ ,\ \partial\omega_2/\partial z=-n_z\,. \qquad /39/$$

У цьому випадку, враховуючи /7/,/8/, для точок межі S_2 буде справедливим матричне співвідношення

$$-R\omega_2=C^T \quad \text{на } S_2\,. \qquad /40/$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що граничні умови /10/ і /11/ будуть точно виконані незалежно від вибору невизначених функцій $\vec{\Phi}_1$ та $\vec{\Phi}_2$, якщо переміщення шукати у вигляді

$$\vec{u} = \vec{u}^* + \omega_1 \vec{\Phi}_1 = Q_1(\vec{u}^*, \vec{\Phi}_1), \qquad /41/$$

$$\vec{u} = \vec{\Phi}_2 + \omega_2 [CDC^T]^{-1}(CDR\vec{\Phi}_2 - \vec{p}^*) + \omega_2^2 \vec{\Psi} = Q_2(\vec{p}^*, \vec{\Phi}_2). \qquad /42/$$

Слід мати на увазі, що оскільки останнє співвідношення розглядається лише на межі S_2, то в ряді випадків матриця $[CDC]^T$ /3 x 3/ містить тільки константи і її вдається обернути явно. Якщо ж межа складна, то обернення цієї матриці слід провести чисельно, розглядаючи її значення в потрібній точці. Зауважимо, що з урахуванням /40/ матрицю C можна замінити на $-(R\omega_2)^T$. Якщо всередині області матриця C може стати нульовою, то замість напрямних косинусів n_i у матриці C слід використовувати $n_i + \omega_2$. Відзначимо, що для повноти пучка в останній формулі додано доданок з довільною функцією $\vec{\Psi}$. Однак для спрощення методик звичайно її не враховують, припускаючи $\vec{\Psi} = 0$.

Дві останні структури розв'язку за допомогою відомої формули "склейки" можна об'єднати в одну:

$$\vec{u} = \{\omega_1 Q_2(\vec{p}^*, \vec{\Phi}_2) + \omega_2^2 Q_1(\vec{u}^*, \vec{\Phi}_1)\} / (\omega_1 + \omega_2^2). \qquad /43/$$

Загальна структурна формула /43/ просторової крайової задачі теорії пружності анізотропного тіла виражає одну вектор-функцію переміщень u через пару вектор-функцій $\vec{\Phi}_1$ та $\vec{\Phi}_2$ таким чином, що незалежно від вибору останніх кінематичні та силові граничні умови виконуються точно без будь-якої апроксимації.

Для знаходження невизначених компонент структурних формул тривимірне тіло розбивається на множину скінченних елементів простої форми /тетраедри, шестигранники, призми/. На кожному з них проводиться апроксимація, причому для забезпечення неперервності зміни переміщень на міжелементних межах для $\vec{\Phi}_2$ доводиться застосовувати достатньо складні ермітові скінченні елементи /1/ з включенням до вузлових невідомих і значення функції $\vec{\Phi}_2$, і її похідних по координатах. Вузлові невідомі знаходяться із симетричної стрічкової системи лінійних рівнянь.

Однак незважаючи на принципову можливість розв'язання крайової задачі по зазначеній методиці її практична реалізація для тіл складної форми стикається з рядом труднощів. Наявність в структурній формулі / 43 / достатньо складних функцій ω_1, ω_2 та їх похідних, що прямують в нескінченність в нерегулярних точках межі, може настільки "зіпсувати" записані відносно функцій $\vec{\Phi}_1$ і $\vec{\Phi}_2$ функціонал і диференціальні рівняння рівноваги /9/, що для їх "гарного" інтегрального задовільнення буде потрібна надміру густа сітка скінченних елементів. З іншого боку, збільшення густоти сітки призводить до величезного росту числа невідомих /в одному вузлі структурного ермітова тривимірного скінченного елемента І5 вузлових невідомих, у звичайному методі скінченних елементів -3 /.

Для подолання зазначених недоліків у дисертації та книгах [I,2] пропонується застосовувати більш прості варіанти методу. У першому з них, названому спрощеним варіантом СМСЕ, пропонується шляхом побудови простої структурної формули /4I/ точно задовольнити лише кінематичні граничні умови, враховуючи, що застосування варіаційного принципу Лагранжа забезпечує інтегральне виконання силових граничних умов /42/. При цьому достатньо обмежитися простими скінченними елементами лагранжевого типу. У дисертації в строгій математичній постановці доведено збіжність цього варіанта СМСЕ та отримано оцінки швидкості збіжності наближених розв'язків з точними при згущенні сітки скінченних елементів для тіл з гладкими граничними умовами та об'ємними силами. Зокрема, доведена

<u>Теорема</u>. Припустимо, що тіло з гладкими межами розбито на множину структурних скінченних елементів з базисними функціями К-І-го порядку. Тоді точний розв'язок $\vec{\Phi}$ крайової задачі /9/, /I0/,/4I/ з гладкими об'ємними силами відрізняється від наближеного розв'язку $\vec{\Phi}_n$ СМСЕ з n елементами на величину

$$\|\vec{\Phi}-\vec{\Phi}_n\|_0 \le C h^{K} \|\vec{\Phi}\|_K, \qquad /44/$$

причому для помилки справедливі "енергетичні" оцінки

$$\|\vec{\Phi}-\vec{\Phi}_n\|_1 \le C h^{K-1} \|\vec{\Phi}\|_K \qquad /45/,$$

$$\int_V R(\omega(\vec{\Phi}-\vec{\Phi}_n))^T D R(\omega(\vec{\Phi}-\vec{\Phi}_n))\,dV \le C_1 h^{2(K-1)} \|\vec{\Phi}\|_K, \qquad /46/$$

де C, C_1 - константи, h - максимальний діаметр скінченних елементів, $\|\vec{\Phi}\|_i$ - інтегральні норми у просторі функцій, що мають сумовні з квадратом i похідні:

$$\|\vec{\Phi}\|_0 = \left[\int_V \vec{\Phi}^T\vec{\Phi}\,dV\right]^{1/2}, \quad \|\vec{\Phi}\|_1 = \left[\int_V \{\vec{\Phi}^T\vec{\Phi} + (R\vec{\Phi})^T(R\vec{\Phi})\}\,dV\right]^{1/2}, \qquad /47/$$

$$\|\vec{\Phi}\|_2 = \left[\int_V \{\vec{\Phi}^T\vec{\Phi} + (R\vec{\Phi})^T(R\vec{\Phi}) + (R^T R\vec{\Phi})^T(R^T R\vec{\Phi})\}\,dV\right]^{1/2}, \ldots$$

Зауважимо, що показники швидкості збіжності /ступеня h / в СМСЕ такі ж, як і для МСЕ. Аналіз співвідношення /44/ дозволяє зробити висновок, що швидкість збіжності СМСЕ істотно залежить від поведінки невизначеної компоненти $\vec{\Phi}$, яка в силу /41/ є частинним $\vec{\Phi}=\vec{u}/\omega$, де $\vec{u}$ - точний розв'язок крайової задачі . Норма $\|\vec{\Phi}\|_K$ істотно залежить від взаємної поведінки функцій $\vec{u}$ та ω . Нехай, наприклад, точний розв'язок є гладким, а функція ω буде негладкою /такі функції часто використовуються в методі R -функцій/. У цьому випадку норма буде великою, а швидкість збіжності буде край повільною. До такого ж небажаного результату приходимо і в тому випадку , коли, наприклад, функція $\vec{u}$ є зростаючою , а ω - спадає. Зауважимо, що в МСЕ вважається ω = I, тому швидкість збіжності визначається лише поведінкою $\vec{u}$. Високої швидкості збіжності СМСЕ, більшої ніж в МСЕ, вдається досягнути у тому випадку, коли функція ω враховує характер поведінки розв'язків. У дисертації приведено приклади, що підтверджують ці висновки і демонструють те, що при вдалому виборі ω можна істотно зменшити число скінченних елементів для досягнення однакової точності порівняно з МСЕ. Характерним є приклад плоскої задачі теорії пружності для ізотропної квадратної області з круговим отвором, навантаженим внутрішнім тиском. Для її розв'язання будемо використовувати дві структурні формули, що точно враховують кінематичні граничні умови на лініях симетрії квадрата:

$$u_x = x\Phi_x,\ u_y = y\Phi_y; \qquad /48/$$

$$u_x = x\Phi_x/(x^2+y^2),\ u_y = y\Phi_y/(x^2+y^2). \qquad /49/$$

Перша формула є стандартною, друга - враховує особливість поведінки точного розв'язку для порожнини в нескінченній пластині. Розрахунки показують, що при малих радіусах порожнини використання структурної формули / 49 / дозволяє в 4 рази зменшити необхідне число скінченних елементів /з 200 до 50 / для досягнення однакової точності обчислення напружень порівняно з МСЕ та СМСЕ з використанням структури / 48/ . В той же час при великих радіусах отвору, коли використання моделі порожнини у просторі є неправомірним, структура /49/ показує гірші результати порівняно з МСЕ. Аналогічні тестові разрахунки були проведені і для інших задач - одноосьового розтягу пластин, крутіння стержнів трикутного, квадратного, еліптичного профілів, стиску прямокутника з жорстким прямокутним включенням, розтягу циліндра з еліптичним отвором. Розв'язок цих статичних задач і порівняння результатів з точними або розрахованими методом R - функцій підтверджують ефективність реалізації СМСЕ.

У дисертації та роботах [1,2,5-7,9-10] значне місце приділяється розв'язку задач про власні коливання. Переваги СМСЕ порівняно з МСЕ для задач на власні значення пов'язані з тією обставиною, що при любій густоті сітки в СМСЕ точно задовольняються головні граничні умови, що роблять основний внесок у формування спектру власних частот. Зокрема, розв'язок декількох тестових задач про власні повздовжні та згинальні планарні коливання плоских областей показав, що для досягнення однакової точності в СМСЕ потрібне менше число скінченних елементів, ніж в МСЕ.

За допомогою СМСЕ розв'язано достатньо широкий клас задач про власні коливання анізотропних неоднорідних областей шаруватої та волокнистої будови. Результати досліджень детально описані в роботах [5-7,9] і особливо в монографії [2]. У дисертації зроблено огляд цих робіт і сформульовано основні висновки цих досліджень. Зокрема, сформульовано висновок про те, що в спектрі власних частот повздовжніх коливань ортотропної прямокутної пластини існують частоти, що не залежать від співвідношення повздовжнього та поперечного модулів пружності у певному діапазоні його зміни та характеризуються коливаннями у поперечному напрямі. Істотно двовимірний напружено-деформований стан для більшості форм коливань спостерігається в діапазоні зміни параметрів $0,7 \leq \sqrt{E_x/a^2}/\sqrt{E_y/b^2} \leq 1,4$, де a і b - півдовжини боків пластини, E_x, E_y - відповідні модулі пружності. Для визначення власних частот згинальних коливань пластин необхідно враховувати деформації обтиску нормалі, коли довжини хвиль становляться менше ніж 0,8 товщини для пластин з низькою поперечно-зсувною жорсткістю і менше ніж 1,8 товщини для пластин з високою поперечно-зсувною жорсткістю. Інакше похибка визначення власних частот буде перевищувати як мінімум 10 % і, крім того, можливим буде виникнення прогалин власних частот, пов'язаних з товщинними коливаннями пластини. На рис.1 показано побудовані на графопобудувачі форми власних коливань анізотропної прямокутної області при відношенні повздовжнього та поперечного модулів пружності, що дорівнює 10.

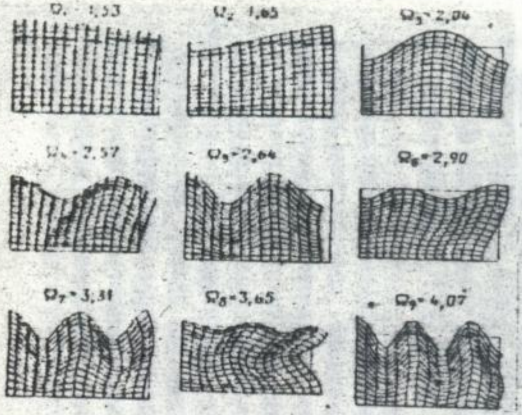

Рис.I

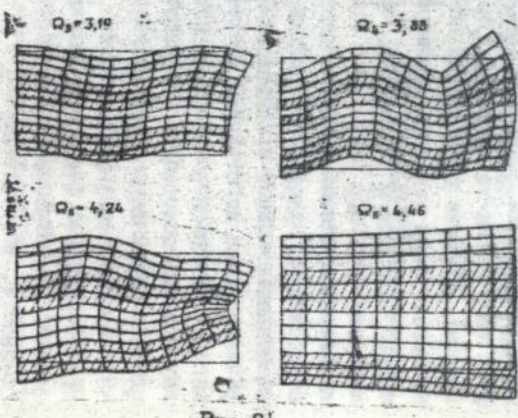

Рис.2

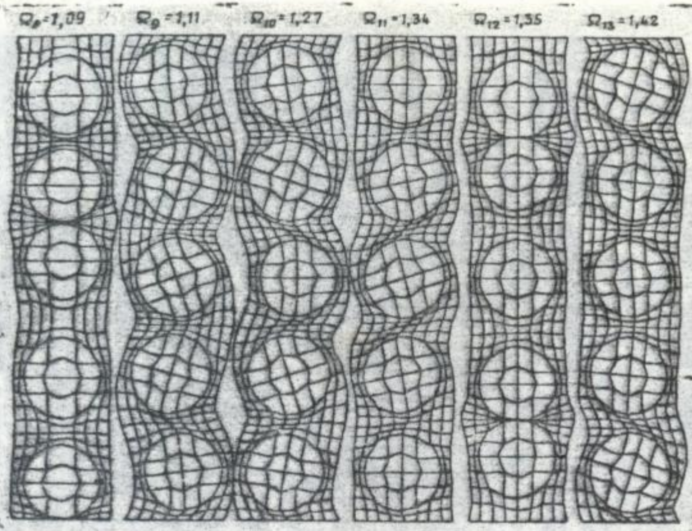

Рис.3

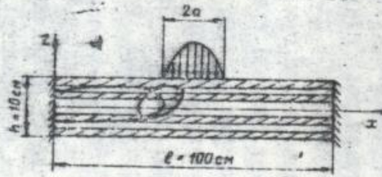

Рис.4

У роботах [2,6,9] розглядаються більш складні задачі-про власні планарні згинальні коливання шаруватих прямокутних областей. Характер згинальних коливань таких областей можна вивчити на основі рис.2 і йому подібних. Досліджено вплив параметрів укладання шарів на особливості власних коливань. Зокрема,показано, що для довжин хвиль, більших ніж 1,8 товщини шаруватого пакета, зміна порядку чергування, числа та пружних властивостей шарів не змінює характер деформування жорстких і м'яких зовнішніх шарів, що працюють на повздовній обтиск і поперечний зсув,і м'яких внутрішніх шарів, що працюють для малого числа шарів як наповнювач. При довжинах хвиль, менших ніж зазначене число,для математичного опису деформування шарів необхідно враховувати усі компоненти деформацій.

У роботах [2,6] розглядаються задачі про власні планарні коливання прямокутних областей волокнистої будови з різними умовами закріплення комірки та числом волокон . Форми власних коливань однієї з таких областей приведено на рис.3. Результати цих розрахунків можуть мати застосування при дослідженні високочастотних коливань армованих композитних матеріалів. Розрахунки у рамках обмежень теорії малих незагасаючих плоскополяризованих коливань показали, що інтенсивні коливання мікроструктури однонапрямлених волокнистих композиційних матеріалів виявляються при півдовжинах хвиль, менших ніж подвоєний діаметр волокон, причому для боро-, скло-та вуглепластиків- в діапазонах високих ультразвукових частот / 1 - 2 МГц/, а для органопластиків і полімерних композитів-в діапазонах частот середнього ультразвуку / 100 -500 КГц/. Для високомодульних волокон характерною є нерівномірність розподілу власних частот комірки по довжині частотного інтервалу, при чому кожний діапазон згущення частот характеризується своїм типом власних коливань комірок. Для перших діапазонів локалізації є характерними поступні та обертальні коливання волокон, а для вищих діапазонів -переважні коливання матриці композитного матеріалу.

Продовжуючи зазначені дослідження, у дисертації в плоскій постановці у рамках обмежень відомої теорії локалізованого низькошвидкісного пружного удару абсолютно твердим тілом розв'язана задача про поперечний удар по в'язкопружній шаруватій балці із вуглепластика /рис.4/. Для описання демпфіруючих властивостей матеріалу використовувалась гіпотеза про пропорціональність матриць пружних і в'язкопружних сталих у моделі Фойгхта. Досліджено дина-

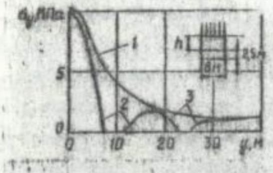

Рис.5

Рис.6

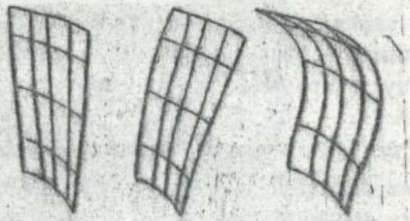

Рис.7

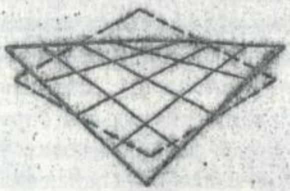

Рис.8

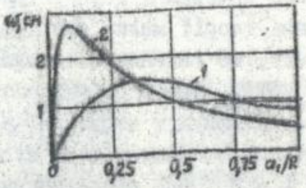

Рис.9

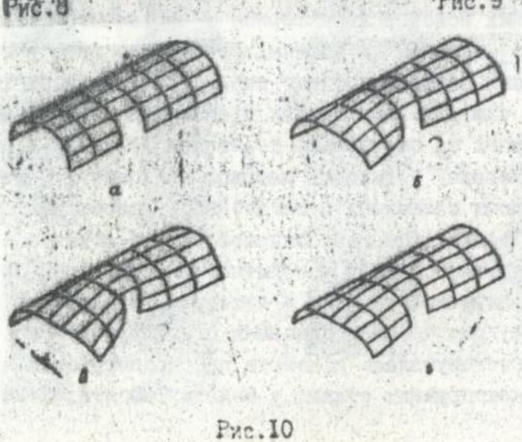

Рис.10

міку руху балки при різному порядку укладання шарів по товщині. Показано, що неврахування ефектів в'язкості значно спотворює характер деформування конструкції при ударі. При ударі по жорсткому шару великі напруження виникають в чотирьох симетричних відносно середньої лінії зонах: безпосередньо під контактною площадкою, з тильної сторони балки і у верхньому та нижньому жорстких шарах поблизу закладання. Саме в цих областях можливі руйнування матеріалу внаслідок розриву волокон. Положення тієї із зазначених зон, де напруження досягають абсолютного максимуму, залежить від порядку укладання шарів, товщини балки, жорсткості закладання та інших факторів. Якщо ж зовнішніми є м'які шари, то максимум напружень досягається у жорсткісному шарі, що є найближчим до тильної сторони балки, а в контактній зоні вони на 5-10% нижчі. Можливі руйнування балки від міжшарових дотичних напруг відбуваються всередині неї в стороні від контактної площадки ближче до закладання. У цілому слід відзначити, що варіант укладання з м'якими зовнішніми шарами великої в'язкості забезпечує велику ударну міцність балки, але меншу жорсткість. Вірогідність результатів розрахунку підтверджується використанням достатньо густої сітки скінченних елементів, згущення якої не приводить до помітного уточнення напружень; використанням скінченних елементів, для яких доведено збіжність апроксимацій з точним розв'язком при згущенні сітки; відомим експериментальним підтвердженням ефектів відколу шаруватих композитів з тильної сторони при ударі; збігом швидкостей поширення повздовжніх та зсувних хвиль з їх теоретичними значеннями; плавністю зміни кольорів ізоліній розподілу напружень, відображуваних на екрані комп'ютера.

Описаний раніше зручний для реалізації спрощений варіант СМСЕ не дозволяє точно задовольнити граничні умови силового типу, а загальний варіант СМСЕ призводить до істотного ускладнення методики розрахунку із-за наявності похідних в структурних формулах. У дисертації описано третій, так званий гібридний варіант СМСЕ, який, в принципі, можна розглядати і без МСЕ і який певним чином розв'язує зазначене протиріччя.

Ідея гібридного варіанта структурного методу, що пропонується, полягає у використанні двох достатньо простих структурних формул. При цьому одна з них /вигляду 4I / - у переміщеннях - точно враховує кінематичні граничні умови /9/, а друга - в напруженнях - силові умови /I0/. Вона має вигляд :

$$\sigma = C^T[CC^T]^{-1}\vec{p}^* + P\Omega_2\theta = H_3(\vec{p}^*, \theta), \qquad /50/$$

де $P(6 \times 6)$ - відома матриця переходу, що зв'язує напруження в осях xyz і в системі координат, пов'язаній з нормаллю та дотичними до межі S_2, $\Omega_2(6 \times 6)$ - матриця з ненульовими елементами $\Omega_2(1;1) = \Omega_2(4,4) = \Omega_2(6,6) = \omega_2$, $\theta(6 \times 1)$ - шукані функції. Взаємопогодженість структурних формул /4I/ і /50/ пропонується забезпечити застосуванням варіаційного принципу Хеллінгера-Рейсснера, що допускає незалежні апроксимації переміщень і напружень. Варте уваги те, що гібридний варіант і дозволяє точно задовольнити обидва типи граничних умов, і не збільшує число невідомих порівняно із звичайним варіантом МСЕ, і дає можливість обійтись простими структурними формулами. У дисертації розглянуто три задачі, що демонструють простоту побудови структурних формул у гібридному варіанті СМСЕ - розтяг стержня, двохосьовий стиск пластини та стиск диску з жорстким включенням. На жаль, збіжність гібридного варіанта СМСЕ строго не доведена.

Однією з важливіших позитивних якостей СМСЕ є можливість врахування особливостей поведінки розв'язків на аналітичному рівні, що дозволяє у ряді випадків не лише істотно спрощувати розв'язування крайової задачі, але й враховувати недоступні МСЕ сингулярності поведінки точних розв'язків окіл особливих точок. Методика аналітичного врахування особливостей поведінки розв'язків у структурному методі відома і не раз використовувалась при розв'язуванні крайових задач методом R -функцій. У дисертації ця методика описана стосовно до СМСЕ. Крім того, запропоновано нові підходи, коли на аналітичному рівні враховуються розв'язки близьких до початкових крайових задач, а також особливості поведінки напружень, а не переміщень, як у стандартній методиці.

Основна ідея полягає в зображенні розв'язку крайової задачі у вигляді структурної формули:

$$\vec{u} = \vec{v}^* + \vec{\Phi}, \qquad /5I/$$

де $\vec{v}^*$ -так званий фоновий розв'язок - деяка відома функція, що враховує, наприклад, функції, які входять в граничні умови або будь-які аналітичні розв'язки, а $\vec{\Phi}$ - шукана невизначена компонента структурної формули. Функція $\vec{\Phi}$ визначає так званий компенсаційний розв'язок, тому цей варіант СМСЕ будемо називати компенсаційним /КСМСЕ/. Розв'язувальне матричне рівняння скінченного елемента об'єму V має вигляд:

$$K\{\Phi\} = \{Q\} - \int\limits_V B^T (CDR\vec{v}^*)\,dV, \qquad /52/$$

де K, B - матриці жорсткості та деформацій відповідно, $\{Q\}$ - вектор навантажень. Видно, що врахування фонового розв'язку у вигляді /51/ приводить до появи додаткових навантажень на скінченно-елементну модель. Рівняння /52/, об'єднані для всіх скінченних елементів, необхідно доповнити дискретизованими головними граничними умовами відносно компенсуючої функції $\vec{\Phi}$:

$$\{\Phi\} = \{\vec{u}^* - \vec{v}^*\} \qquad \text{для вузлів межі } S_1 \qquad /53/.$$

У дисертації розроблено декілька ефективних варіантів КСМСЕ. У першому з них фонові переміщення та напруження точно задовольняють рівняння рівноваги для нескінченного тіла з відомими об'ємними силами, можливо, сингулярними. Тоді для компенсуючого розв'язку одержимо систему лінійних рівнянь, в якій взагалі не буде навантажень від об'ємних сил, дія яких заміниться компенсуючими навантаженнями на поверхні тіла. Ефективність цього варіанта підтверджується приведеними у дисертації розрахунками обертання прямокутної пластини навколо своєї осі. Урахування наближеного одноосьового розв'язку на аналітичному рівні дозволило на порядок в порівнянні з МСЕ скоротити необхідне число скінченних елементів /з 96 до 8/ для досягнення однакової точності. Уже при одному структурному скінченному елементі похибка визначення повздовжніх напружень не перевищує 13 %.

Наступний цікавий випадок -нехай фонові переміщення та напруження є точними аналітичними розв'язками, що відповідають дії поверхневих зусиль на частині межі на напівнескінченне тіло. Такі розв'язки відомі в теорії пружності /фундаментальні розв'язки Буссінеска, Фламана та ін./. Як і в попередньому варіанті, дія цих навантажень, можливо сингулярних, замінюється компенсаційними зусиллями на заданому контурі. Ефективність цього варіанта КСМСЕ підтверджується описаними у дисертації розрахунками напружено-деформованого стану трикутного клину, навантаженого у вершині локальною силою. Застосування точного аналітичного розв'язку С.П.Тимошенка як фонового для нескінченного клину дозволило врахувати недоступні МСЕ сингулярності поведінки розв'язків окіл навантаженої вершини.

Описані варіанти КСМСЕ передбачають знання переміщень деякої близької до початкової крайової задачі. Однак часто побудувати їх важко, наприклад, для анізотропних тіл. Простіше побудувати фоновий розв'язок для напружень. Наприклад, відомий розв'язок Фламана щодо дії зосередженої сили на півпростір має один і той же вигляд і для ізотропного, і для анізотропного матеріалу, в той час, коли переміщення для останнього знайти дуже важко. Побудувати ефективну методику врахування особливостей поведінки напружень дозволяє описуваний у дисертації гібридний варіант КСМСЕ /ГКСМСЕ/. У ньому фоновий розв'язок будується для напружень, а для одержання розв'язальних систем лінійних рівнянь використовуються варіаційні рівняння Хеллінгера-Рейсснера, як і в гібридному варіанті СМСЕ. За допомогою цього методу у дисертації розв'язано задачу про дію двох зосереджених навантажень на горизонтальну та вертикальну грані прямокутної області. Фонові напруження одержуються "склейкою" аналітичних розв'язків Фламана σ_1^* та σ_2^* для відповідних нескінченних півплощин

$$\sigma^* = (\sigma_1^* \omega_2 + \sigma_2^* \omega_1)/(\omega_1 + \omega_2), \qquad /54/$$

де ω_1, ω_2 - функції, що входять до рівняння відповідних навантажених прямолінійних контурів. Напруження /54/ не задовольняють диференціальні рівняння рівноваги, однак врахування їх дозволило значно спростити розв'язок крайової задачі та врахувати недоступні МСЕ особливості поведінки напружень окіл точок навантаження.

За допомогою КСМСЕ у дисертації розв'язано практичну задачу про концентрацію напружень окіл підземної виробки в пружному грунті під будівлею. Як фоновий використовується точний аналітичний розв'язок для стрічкового навантаження на нескінченний масив грунту без виробки. КСМСЕ дозволив легко врахувати жорсткість нескінченного грунту шляхом завдання граничних переміщень із точного розв'язку на достатньому віддаленні від підземної виробки та підошви будівлі. При цьому компенсуюче навантаження прикладається до контуру виробки. Напруження, одержані для 36 структурних скінченних елементів компенсаційного типу, з похибкою менше 2 %, відрізняються від аналогічних результатів, отриманих МСЕ на сітці із 432 елементів [1]. На рис. 5 показано графіки розподілу вертикальних напружень у грунті при різній глибині залягання виробки. СМСЕ рекомендується застосовувати для розв'язання крайових задач математичної фізики, в яких можна врахувати особливості поведінки розв'язку окіл меж тіла та окіл точок з особливим характером навантаження, наприклад для задач про власні коливання, локалізовані навантаження, обертання, концентрації напружень.

<u>У п'ятому розділі</u> описано засновану на методі гібридних скінченних елементів методику розрахунку анізотропних пологих оболонок подвійної кривизни.

Як відомо, для скінченноелементного розрахунку оболонок найбільш ефективними є уточнені теорії, що грунтуються на застосуванні незалежних апроксимацій переміщень і напружень / або деформацій / оболонки та варіаційних рівнянь Хеллінгера-Рейсснера. У працях [1,2,8] і в дисертації пропонується теорія оболонок, що грунтується на застосуванні незалежних апроксимацій переміщень, поворотів нормалі, повздовжніх і поперечно-зсувних деформацій і функціоналів Ху-Васідзу. Використання такої теорії оболонок дозволяє побудувати сумісні скінченні елементи тонких і нетонких оболонок, що є вільними від відомих ефектів хибного збільшення згинальної жорсткості при зменшенні товщини пластини і враховують жорсткі зміщення скінченних елементів. Новизна побудованих елементів порівняно з відомими полягає в тому, що вони можуть використовуватися в задачах динаміки оболонки і в тому, що одержано особливо цінні явні аналітичні вирази для матриць жорсткості, які або взагалі виключають комп'ютерні витрати на числове інтегрування, або зводять їх до мінімуму. Розглядаються трикутні /лінійні та квадратичні/ та чотирикутні /білінійні та біквадратичні/ скінченні елементи.

Ефективність побудованих скінченних елементів підтверджується розв'язком тестових задач вигину тонких пластин і циліндричних оболонок. Показано, що там, де відповідні скінченні елементи лагранжевого типу призводять до величезної похибки, гібридні скінченні елементи демонструють надійні результати.

Із застосуванням побудованих гібридних скінченних елементів у дисертації та в роботах [1,2,9] розв'язано ряд практичних задач статики, термопружності, коливань і динаміки ряду оболонкових конструкцій.

Розв'язано задачу про розтяг тонкої алюмінієвої гофрованої оболонки хвилястого компенсатора трубопровода /рис. 6/. Показано, що при збільшенні періоду хвилі гофру максимальні повздовжні переміщення зростають лінійно, а поперечні - по більш складному закону. Протилежна картина спостерігається при збільшенні висоти хвилі гофру. Вірогідність результатів підтверджується збіжністю згинальних моментів при згущенні сітки скінченних елементів.

Проведено розрахунки частот і форм власних згинальних і крутильних коливань пера компресорної лопатки конкретної газотурбінної установки / рис. 7 /. Вірогідність розрахунку підтверджується згущенням сітки елементів і збігом першої власної частоти з експериментально визначеною на Запорізькому ВО "Моторобудівник".

Далі розглядаються задачі про терможолоблення шаруватих пластин та оболонок. Зокрема, проведено розрахунки термодеформацій при остиганні прямокутних анізотропних шаруватих пластин з скло- та вуглепластика при різних структурах укладання матеріалу по товщині. На рис. 8 показано форму пожолобленої двошарової пластини з різнонапрямленим діагональним армуванням шарів. Проведено широкий параметричний аналіз впливу геометричних розмірів, товщини та структури укладання шарів на прогини та напруження шарів пластини. Вірогідність результатів підтверджується аналізом збіжності при розрахунку на сітках, що послідовно згущуються; якісним збігом форм пожолобленої двошарової пластини з розрахунками інших авторів / для тришарових пластин/ і даними експерименту, що проводився на підприємстві "Ухтомський вертолітний завод ім.І.Камова". Крім пластин, аналогічні задачі терможолоблення розв'язувались для однорідних і шаруватих оболонок. Виявлено та досліджено ефект існування критичного значення кривизни / рис.9 /, якому відповідає максимальний вигин защемленої в плані однорідної та п'ятишаруватої циліндричної панелі при її нагріванні. Достовірність розрахунків підтверджується згущенням сітки елементів і збігом прогинів аналогічної шаруватої оболонки з розрахунками В.Г.Пискунова.

Далі розв'язано статичну задачу про стиск торцевим зусиллям циліндричної графітоепоксидної оболонки з прямокутним вирізом. Наявність вирізу приводить до істотної депланації навантаженого торця, тим більший, чим ближче до нього виріз. Окіл вирізу відбувається концентрація напружень, причому зміщення вирізу ближче до навантаженого краю приводить до збільшення коефіціента концентрації.

Вірогідність розрахунку підтверджується інтегральним виконанням рівнянь рівноваги для поперечних перерізів оболонки - середнє напруження з похибкою I-2 % співпадає з прикладеним торцевим зусиллям.

Ця ж задача розв'язана в динамічній постановці з врахуванням демпфірування по моделі Фойгхта. Згідно з відомими моделями пружного низькошвидкісного удару вважається, що торцеве зусилля змінюється за часом по закону $q=q_0\sqrt{\sin \pi t/t_0}$ при $t \le t_0$ та $q=0$ при $t \ge t_0$, де t_0 - тривалість удару / 5 мс /, q_0 - амплітуда. Покроковий розрахунок по модифікованому алгоритмові Ньюмарка [I,] і порівняння результатів статичних і динамічних розрахунків показали, що при динамічному навантаженні меншими будуть і максимальні переміщення / в 5-6 разів /, і коефіцієнти концентрації напружень / в 1,5 - 2 рази /. Це зв'язано з меншими інтегральними навантаженнями та з врахуванням в'язкості матеріалу, яка заважає оболонці одержувати значну інерцію руху. Характер руху в'язкопружної оболонки при ударі по торцю можна прослежити з допомогою рис.10, на якому показано деформовані форми оболонки в різні моменти часу. Вірогідність розв'язку задачі динаміки підтверджується згущенням сітки в 2 рази / 36 скінченних елементів / і зіставленням результатів розрахунку динаміки анізотропної циліндричної оболонки без вирізу з числовими розрахунками методом сіток / О.Є.Богданович /. Похибка визначення повздовжніх напружень не перевищує 5 %, прогинів - 30 %, причому розраховані прогини ближче до більш точних з урахуванням геометрично нелінійних ефектів, ніж отримані О.Є.Богдановичем у рамках гіпотез Кірхгофа-Лява.

Розділ 6 дисертації присвячено короткому описові програмуючої системи АСТРА, що реалізує на комп'ютерах ІВМ РС/АТ та VAX стандартні та нові дискретні методи розрахунку теплових полів, статики, коливань, динаміки, стійкості, пластичності та повзучості широкого класу будівельних і машинобудівних конструкцій.

У заключній частині сформульовано основні висновки дисертації.

ОСНОВНІ ВИСНОВКИ

1. Отримані в дисертації інтегральні рівності теорії пружності узагальнюють відомі та можуть служити основою формулювання багатьох наближених методів розв'язк крайових задач, зокрема усіх варіаційних методів на основі функціоналів Ху-Васідзу, Хеллінгера-Рейсснера, Лагранжа, Кастільяна, проекційних методів типу Бубнова-Гальоркіна та зважених відхилів, а також методів типу граничних інтегральних рівнянь і потенціалів.

2. Заснований на комбінуванні аналітичних методів побудови повної системи поліноміальних розв'язків диференціальних рівнянь рівноваги, граничних варіаційних рівнянь механіки та методик дискретної скінченно-елементної апроксимації метод рівноважних граничних елементів є ефективним варіаційно-граничним методом розрахунку напружено-деформованого стану тіл, що описується лінійними системами диференціальних рівнянь в частинних похідних з кусково-постійними коефіцієнтами. Висока обчислювальна ефективність методу пов'язана з можливістю вибору оптимального порядку та ширини стрічки розв'язуваних симетричних систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно переміщень тільки граничних вузлів, з дискретизацією лише межі ті-

ла, з легкістю спряження методу з іншими варіаційними методами й особливо з методом скінченних елементів. Проведені на IBM PC/AT розрахунки багатоелементних стержньових систем, розгалужених трубопроводів, крутіння стержнів та прогину пластин підтверджують високу ефективність методу.

3. Поєднання ідей структурного методу R -функцій і принципів дискретної скінченноелементної апроксимації у рамках єдиного структурного методу скінченних елементів дозволяє і розширити можливості структурного методу, зробивши доступними для нього добре опрацьовані методики, алгоритми та програми дискретної апроксимації, і збільшити ефективність скінченноелементних методів за рахунок можливостей точно задовольнити всі чи частини граничних умов і врахування особливостей поведінки розв'язків на аналітичному рівні. При цьому, найбільш ефективними є методики, засновані на точному задовольнянні лише кінематичних граничних умов, або ж гібридні підходи, що дозволяють точно задовольнити і кінематичні, і силові граничні умови шляхом побудови незалежних варіаційно погоджених структурних формул для переміщень і напружень. Математичний аналіз оцінок помилок наближених розв'язків доводить збіжність одного з варіантів структурного методу скінченних елементів. Проведені у дисертації розрахунки концентрації напружень в областях з вирізами та у пружних грунтах, локального навантаження тіл, власних коливань, динаміки неоднорідних анізотропних областей підтверджують обчислювальну ефективність методу для задач математичної фізики, в яких можна врахувати особливості поведінки розв'язку окіл меж тіла та окіл точок з особливим характером навантаження.

4. Заснована на застосуванні змішаних варіаційних принципів гібридна методика розрахунку пологих анізотропних оболонок подвійної кривизни з незалежними апроксимаціями переміщень, поворотів нормалі, повздовжніх і поперечно зсувних деформацій дозволяє аналітично обчислити матриці жорсткості скінченних елементів та ефективно розв'язувати задачі механіки тонких та нетонких /середньої товщини / оболонок, що підтверджується приведеними у дисертації розрахунками статики гофрованої хвилястої оболонки, коливань пера лопатки газотурбінної установки, терможолоблення шаруватих пластин і оболонок, статики та динаміки циліндричної оболонки з вирізом.

5. Впроваджений на ряді підприємств обчислювальний комплекс РАСТР, що реалізує на IBM - сумісних персональних комп'ютерах дискретні рівноважні методики розрахунку трубопроводів, дозволяє розраховувати міцність і компенсацію розгалужених просторових трубопрово-

лів гарячої води, нафти та інших продуктів. Комплекс рекомендується до впровадження в організаціях по проектуванню теплових мереж великих міст, атомних і теплових електростанцій, нафто- і газопроводів.

6. Реалізуюча комплексні дискретні методи розрахунку теплопровідності та термопружності, статики та динаміки, коливань та стійкості, пластичності та повзучості широкого класу одно-, дво-, тривимірних осесиметричних і оболонкових анізотропних конструкцій програмуюча система АСТРА є обчислювальним комплексом для математичного моделювання процесів деформування елементів будівельних, машинобудівних та авіаційних конструкцій на ЕОМ типу VAX , IBM PC/AT та інших. Ефективність системи підтверджується описаними в дисертації та в роботах автора прикладами розрахунків. Система АСТРА впроваджена і рекомендується до дальшого впровадження у будівництво, машинобудування, авіацію як інструмент по проектуванню міцних конструкцій на базі сучасної обчислювальної техніки.

7. Результати дисертації, а саме методи, алгоритми та програми, що реалізують дискретні структурні та рівноважні методи розв'язку крайових задач, рекомендується впроваджувати до багатьох існуючих комплексів програм, що реалізують метод скінченних елементів.

8. Проведені у дисертації дослідження розвивають науковий напрям розробки та застосування нових варіантів дискретних чисельно-аналітичних методів і комплексів програм для математичного моделювання процесів деформування конструкцій. Універсальність математичних формулювань дозволяє застосовувати розроблені методи для дослідження поведінки і немеханічних полів - теплових, електромагнітних, гідромеханічних.

СПИСОК ОСНОВНИХ РОБІТ

1. Єременко С.Ю. Методи скінченних елементів в механіці деформівних тіл.- Харків: Основа, 1991.-273 с.

2. Єременко С.Ю. Власні коливання та динаміка композитних матеріалів і конструкцій.- Київ: Наукова думка, 1992.- 184 с.

3. Єременко С.Ю., Рассоха О.О. Реалізація проблемно-орієнтованих мов в системах автоматизованого проектування будівельних конструкцій.- Київ: Учб.-метод.кабінет вищої освіти, 1989.- 115 с.

4. Єременко С.Ю., Рассоха О.О. Організація міцнісних розрахунків в системах автоматизованого проектування будівельних конструкцій на базі методу скінченних елементів.- Київ: Учб.-метод. кабінет вищої освіти, 1990.- 117 с.

5. Рассоха О.О. Єременко С.Ю. [illegible] і форми власних коливань шаруватих композитів // Механіка композит.матеріалів.- 1988, № 2.- С. [illegible].

6. Рассоха О.О., Єременко С.Ю. Особливості власних коливань композитних матеріалів // Там же.- 1989, № 2.- С.262-268.

7. Єременко С.Ю., Рассоха О.О. Розрахунок власних коливань анізотропних прямокутних тіл структурним методом скінченних елементів // Прикл. механіка.- 1989.- 25, № 8.- С. 34-39.

8. Єременко С.Ю. Гібридні скінченні елементи анізотропних оболонок подвійної кривизни та їх застосування для дослідження терможолоблення шаруватих композитних виробів // Механіка композит.матеріалів. - 1992, № 6.- С. 990-996.

9. Вакулін В.М., Єременко С.Ю., Рассоха О.О. Експериментально-розрахункове дослідження власних коливань шаруватих композитів // Пробл. машинобудування й автоматизації.- 1990.- Вип.2.- С. 70-75.

10. Єременко С.Ю. Метод скінченних елементів з точним задоволенням крайових умов // Експерим.- розрахункові методи автоматизованого проектування. Київ: Учб.-метод.кабінет вищої освіти, 1988.- С.176-188.

11. Eremenko S.Yu. The Equilibrium Boundary Elements Method and Its Application in Boundary Value Problems of the Elasticity Theory // Proc. of the Intern. Conf. on Comp. Eng. Sci., Dec. 17-22, 1992, Hong Kong, 1992. -P.111.

Відповідальний за випуск к.т.н., проф. Реньов В.О.
Підписано до друку Формат 60 x 90 1/16.
Ум. друк. арк. 2. Папір тип. № 1.
Обл.- вид. арк. 1,92. Тираж 100 пр.
Зам. № 1195

Ротапринт Інституту проблем машинобудування АН України
310046, м.Харків-46, вул.Дм.Пожарського, 2/10