

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

УДК 519.21

МАЦЮК ЛЕСЯ ВАСИЛІВНА

СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛІВ
"НАДІЙНОСТІ"

01.01.05 - Теорія ймовірностей і математична
статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1993



00814307 (N)

AB 27.748

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірності і математичної статистики Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук
ЯДРЕНКО М.М.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук
ТУРЬ ІН А.Ф.,

кандидат фізико-математичних наук
КАЧИНСЬКИЙ А.Б.

Провідна установа : Інститут кібернетики Академії наук
України.

Захист відбудеться "20" вересня 1993 року
о 14 годині на засіданні спеціалізованої Ради К 068.18.11
при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою :
252127 Київ, просп. Акад. Глушкова, 6, Київський університет,
фізико-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці університету.

Автореферат відправлений "19" серпня 1993 року

Вчений секретар
спеціалізованої Ради

В.І.

СШАНСЬКИЙ В.І.

Актуальність теми. Дослідження надійності як найпростішого виробу, так і найскладніших систем приладів вимагає розробки адекватних математичних моделей, методів одержання на основі обмежених наборів даних інформації про роботу досліджуваних елементів у майбутньому, вивчення якісних характеристик роботи цих елементів і т. інше.

Надзвичайно важливим при дослідженні надійності систем пристроїв є підхід з позицій "старіння", тобто застосування теорії вікових класів, основні результати якої отримані Р. Барлоу і Ф. Прошаном. Проблема розширення класів розподілів, що застосовуються для побудови математичних моделей, які описують роботу реальних систем приводять до необхідності більш широкого вивчення сумішей розподілів.

В даній дисертації вивчаються деякі властивості сумішей розподілів ймовірності, а також розглядаються різні способи знаходження оцінок вагових функцій сумішей розподілів та параметрів розподілів ймовірності.

Мета дисертації.

1. Вивчення належності до різних вікових класів розподілів сумішей розподілів Пуассона.
2. Дослідження скінченних сумішей геометричних розподілів та сумішей розподілів Пуассона у випадку, коли вагові коефіцієнти сумішей можуть бути від'ємними.
3. Знаходження оцінок вагової функції сумішей геометричних розподілів з використанням моментів цієї функції та за допомогою тригонометричних рядів.
4. Доведення існування єдиної оцінки максимальної правдоподібності сумішей геометричних розподілів та дослідження її якісних характеристик.

5. Застосування EM-алгоритму до знаходження оцінок вагових коефіцієнтів та параметрів скінченних сумішей конкретних розподілів ймовірності

6. Застосування EM-алгоритму до знаходження оцінок параметрів розподілів у випадку групованих виборок.

Наукова новизна і практична цінність. Вивчаються суміші розподілів Пуассона з точки зору вікових класів розподілів, доведена теорема про достатні умови належності сумішей розподілів Пуассона до класів розподілів: із зростаючою (спадною) функцією інтенсивності відмов; із зростаючою (спадною) в середньому функцією інтенсивності відмов; класу розподілів типу "нове краще (гірше) використовуваного"; типу "нове в середньому краще (гірше) використовуваного". Вивчаються скінченні суміші дискретних розподілів, а саме геометричних розподілів та розподілів Пуассона у випадку, коли вагові коефіцієнти сумішей можуть бути від'ємними.

Досліджується проблема оцінювання вагової функції сумішей геометричних розподілів. Одержано формули для оцінок, що ґрунтуються на використанні моментів цієї функції, і оцінок, які отримані за допомогою тригонометричних рядів. Вивчається проблема збіжності одержаних оцінок до невідомої вагової функції.

Розглядається проблема застосування EM-алгоритму до знаходження оцінок параметрів скінченних сумішей розподілів та параметрів розподілів у випадку групованих виборок, обґрунтовується доцільність використання EM-алгоритму у названих вище задачах у випадку конкретних розподілів ймовірності.

Результати роботи можуть бути використані при розв'язуванні практичних задач, що виникають в теорії надійності, прикладній статистичі.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались на наукових семінарах кафедри теорії ймовірності Київського університету та наукових семінарах кафедри математики Ніжинського педагогічного інституту.

Публікації. По темі дисертації опубліковано вісім робіт [1] - [8].

Об'єм та структура роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, трьох глав, які розбиті на дев'ять параграфів та списку літератури. Загальний об'єм - $\frac{97}{74}$ машинописних сторінок. Список літератури містить $\frac{74}{74}$ наведення.

З М І С Т Д И С Е Р Т А Ц І І

У вступі викладено основні результати дисертації, а також зроблено короткий огляд літератури з проблем, яких торкається дана дисертація.

Перша глава присвячена вивченню деяких властивостей надійності сумішньої розподілу ймовірності.

В § 1 формулюються основні означення та теореми, що використовуються в подальших викладках. Нехай ξ - випадкова

величина наприклад, час безвідмовної роботи пристрою,

$F(x)$ - функція розподілу цієї випадкової величини,

$f(x)$ - щільність розподілу, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ - функція надійності,

$$z(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\bar{F}(x)}$$

- функція інтенсивності відмов, або інтенсивність відмов. Зауважимо, що

$$z(x) = f(x) / \bar{F}(x), \text{ якщо } f'(x) \text{ існує і } \bar{F}(x) > 0.$$

Тобто, $z(x)$ - це умовна ймовірність того, що пристрій, який пропрацював до моменту часу x відмовить на проміжку $[x, x + \Delta x]$.

Розглядаються чотири важливі вікові класи розподілів: клас розподілів із зростаючою (спадною) функцією інтенсивності відмов (ЗФІ (СФІ) - клас розподілів); із зростаючою (спадною) в середньому функцією інтенсивності відмов (ЗСФІ (ССФІ) - клас розподілів); клас розподілів типу "нове краще (гірше) використовуваного" (НКВ (НГВ) - клас розподілів); типу "нове в середньому краще (гірше) використовуваного" (НСКВ (НСГВ) - клас розподілів).

Означення 1.5. Нехай $\{F_\alpha\}$ - множина розподілів ймовірності, де α - випадкова величина, що має розподіл $G(\alpha)$. Тоді суми F розподілів $\{F_\alpha\}$, що відповідає ваговій функції $G(\alpha)$ визначається згідно формули:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x) dG(\alpha) \quad (1)$$

В кінці параграфу дано означення дискретних ЗФІ (СФІ), НКВ (НГВ), НСКВ (НСГВ) - класів розподілів (означення 1.1', 1.3', 1.4'). Відмітимо, що існує два підходи до означення дискретних розподілів із зростаючою (спадною) в середньому функцією інтенсивності відмов, а саме: через монотонність послідовності $-\frac{1}{n} \ln a_n$, де a_n - дискретний аналог функції надійності - як це зроблено в означенні 1.2' (ЗСФІ (ССФІ) - клас дискретних розподілів); або через монотонність послідовності $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} z_i$, де z_i - дискретний аналог функції інтенсивності відмов, як це зроблено в означенні 1.2'' (ЗСФІ* (ССФІ*) - клас дискрет-

них розподілів. Відмітимо, що означення 1.2' і 1.2'' не еквівалентні.

Твердження 1.1. Класи розподілів ЗФІ (СФІ) та ЗФІ* (СФІ*) знаходяться у такому відношенні:

а). ЗФІ \subset ЗФІ* ;

б). СФІ* \subset СФІ .

§ 2 присвячений вивченню сумішей розподілів Пуассона, які згідно із (1) визначаються формулою:

$$p_n = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} dG(\lambda), \quad n=0,1,2,\dots \quad (2)$$

У випадку, коли $G(\lambda)$ - експоненціальний розподіл з параметром α , формула (2) визначає геометричний розподіл з параметром $\alpha/\alpha+1$. Якщо $G(\lambda)$ - гамма-розподіл з параметрами α і β , суміш розподілів Пуассона - це від'ємний біноміальний розподіл з параметрами $(\beta, \alpha/\alpha+1)$.

Відомо, що клас ЗФІ-розподілів, до якого належить розподіл Пуассона не зберігається при перетворенні типу (1). Виявляється, що належність вагової функції суміші $G(\lambda)$ до певного класу розподілів ймовірності є достатньою умовою того, що суміш розподілів Пуассона належить до цього класу розподілів.

Теорема 2.1. Якщо вагова функція $G(\lambda)$ належить до класу:

а). ЗФІ (СФІ) - розподілів ;

б). ЗФІ* (СФІ*) - розподілів ;

в). НКВ (НГВ) - розподілів ;

г). НКВ* (НГВ*) - розподілів ,

то суміш розподілів Пуассона (2) належить відповідно до класів ЗФІ (СФІ), ЗФІ* (СФІ*), НКВ (НГВ), НКВ* (НГВ*) - розподілів.

В § 8 розглядаються деякі задачі, пов'язані із сумішами дискретних розподілів з від'ємними ваговими коефіцієнтами.

Нехай

$$p_n = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i (1-\lambda_i)^n, \quad n=0,1,2,\dots \quad (3)$$

де c_i - довільні дійсні числа. Послідовність $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ природно називати сумішшю геометричних розподілів. Вважасмо, що $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < 1$.

Теорема 3.1. Якщо

$$\sum_{i=1}^k c_i = 1, \quad \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i \geq 0, \quad m=1, \dots, k$$

то формула (3) визначає розподіл ймовірності.

Відмітимо, що у випадку $k=2$ умови теореми є необхідними і достатніми, а вже у випадку $k=3$ легко знайти контрприклад, який показує, що умова $c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \geq 0$ не є необхідною. Очевидно також, що умови :

$$\sum_{i=1}^k c_i = 1, \quad c_i > 0, \quad \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i \geq 0.$$

є необхідними для того, щоб суміш геометричних розподілів з довільними ваговими коефіцієнтами була розподілом ймовірності.

Оскільки геометричний розподіл має сталу інтенсивність відмов, то суміш геометричних розподілів у випадку додатніх коефіцієнтів є розподілом із спадною функцією інтенсивності відмов. Якщо ж вагові коефіцієнти довільні, то формула (3) може визначити розподіл із зростаючою функцією інтенсивності відмов.

Теорема 3.2. Нехай $k=2$. Тоді суміш геометричних

розподілв (3) є розподілом із зростаючою функцією інтенсивності, якщо $C_1 > 0$, $C_2 < 0$.

Нехай $k=3$. Тоді

$$p_n = c_1 \lambda_1 (1-\lambda_1)^n + c_2 \lambda_2 (1-\lambda_2)^n + c_3 \lambda_3 (1-\lambda_3)^n \quad (4)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Позначимо :

$$A = c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + c_3 c_2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + c_1 c_3 (\lambda_1 - \lambda_3)^2.$$

Теорема 3.3. Якщо

а). $C_1 > 0, C_2 < 0, C_3 < 0$, то послідовність (4)

є СФІ - розподілом ;

б). $C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 < 0, A \geq 0$, то послідовність (4) -

це СФІ - розподіл ;

в). $C_1 > 0, C_2 < 0, C_3 > 0, A \leq 0$, то послідовність (4)

є СФІ - розподілом.

Розглянемо послідовність

$$p_n = \sum_{i=1}^k c_i \frac{\lambda_i^n}{n!} e^{-\lambda_i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

з довільними ваговими коефіцієнтами C_i , яку називатимемо сумішню розподілів Пуассона. Вважаємо, що $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Теорема 3.4. Умови

$$\sum_{i=1}^k c_i = 1, \quad \sum_{i=2}^k c_i e^{-\lambda_i} \geq 0, \quad z = 1, 2, \dots, k,$$

достатні для того, щоб формула (5) визначала розподіл ймовірності.

У випадку $K=2$ умови теореми 3.4 необхідні і достатні, очевидно також, що умови:

$$\sum_{i=1}^K c_i = 1, \sum_{i=1}^K c_i e^{-\lambda_i} \geq 0, c_i > 0$$

є необхідними для того, щоб суміш розподілів Пуассона з довільними ваговими коефіцієнтами була розподілом ймовірності.

Нехай ξ - випадкова величина, функція розподілу якої :

$$P_n = P\{\xi = n\} = \int_0^1 (1-s)^n s dG(s), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

В другій главі розглядається задача оцінювання по вибірці незалежних спостережень X_1, X_2, \dots, X_N над випадковою величиною ξ вагової функції $G(s)$. Зауважимо, що така задача коректна, оскільки суміш геометричних розподілів ідентифікована.

В § 4 розглядаються оцінки вагової функції сумішею геометричних розподілів (6), при знаходженні яких суттєво використовуються моменти вагової функції. Отримано оцінки функції

$G(s)$ у вигляді :

$$\hat{G}_K(s) = \sum_{j=0}^{[Ks]} C_K^j \sum_{i=0}^{K-j} (-1)^i C_{K-j}^i \sum_{l=0}^{i+j-1} (-1)^l C_{i+j-1}^l \hat{P}_l$$

де \hat{P}_l - це звичайна незсунена оцінка для P_l , тобто

$$\hat{P}_l = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^M \delta(l, x_i), \quad l=0, 1, 2, \dots$$

$$\delta(\ell, X_i) = \begin{cases} 1, & X_i = \ell, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Доведена теорема.

Теорема 4.1. Існує така залежність між K і N що при рості N - числа незалежних спостережень, оцінка $\hat{G}_K(s)$ збігається до $G(s)$ в середньому квадратичному, тобто :

$$M(\hat{G}_K(s) - G(s))^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

В § 5 розглядається задача оцінювання по методу максимальної правдоподібності вагової функції сумішей геометричних розподілів. Нехай X_1, X_2, \dots, X_N - виборка незалежних спостережень над випадковою величиною ξ , розподіл якої визначається формулою (6). Позначимо m_k - число спостережень, рівних k , а $d_k = m_k / N$.

Тоді логарифм функції максимальної правдоподібності має вигляд :

$$\ln L = \sum m_k \ln p_k.$$

Знаходження найбільшого значення функції $\ln L$ еквівалентно знаходженню максимуму функції \mathcal{L} , якою користуватися зручніше:

$$\mathcal{L} = \sum d_k \ln p_k = \sum_{i=1}^{\ell} d_{k_i} \ln p_{k_i},$$

де $\ell = \ell(N) \leq N$ - число різних спостережень.

$0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\ell = M$, тобто $M = \max_{1 \leq k \leq N} \{I_k\}$.

Теорема 5.1. Існує єдина оцінка максимальної правдоподібності \hat{G} вагової функції сумішей геометричних розподілів.

Функція \hat{G} має скінченне число точок росту

s_1, s_2, \dots, s_2 які розміщені на відрізку

$$\left[\frac{1}{M+1}, \frac{1}{1 + \min_{1 \leq k \leq M} \{T_k\}} \right]$$

і

$$z \leq \min \left\{ \left[\frac{M+1}{2} \right], l \right\}.$$

Доведена також теорема про збіжність такої оцінки до істинного розподілу.

Теорема 5.2. Послідовність оцінок \hat{G}_N слабо збігається з ймовірністю одиниця до функції розподілу $G(s)$.

В § 6 знайдено оцінки вагової функції сумішей геометричних розподілів по методу проєкційних оцінок. Формулу (6) у випадку існування щільності розподілу $g(s)$ можна переписати так :

$$p_n = \int_0^1 (1-s)^n s g(s) ds, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Теорема 6.1. Існує козистентна в сенсі $L_2[0,1]$ оцінка вагової функції $g(s)$ сумішей геометричних розподілів (7), що має вигляд :

$$g_{m,N}(s) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^m \hat{C}_{jN} \sin T_j s,$$

де

$$\hat{C}_{jN} = N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{\varphi}_j(x_i),$$

$$a \quad \hat{\varphi}_j(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\lfloor x/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(x_j)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{де}$$

$$\lfloor x \rfloor = \frac{x-2}{2}, \quad \text{якщо } x - \text{ парне число і}$$

$$\lfloor x \rfloor = \frac{x-1}{2}, \quad \text{якщо } x - \text{ непарне.}$$

Третя глава присвячена застосуванням методу-ЕМ - алгоритму, основні принципи якого сформульовані в роботі Демпстера, Лейда і Рубіна (1977 рік) .

В § 7 викладаються основні положення ЕМ-алгоритму. Нагадаємо, що цей метод використовують, як правило, у випадку не повних даних (будь-які способи цензури, групування і т. інше) . Функція, на якій ґрунтується ЕМ-алгоритм має вигляд :

$$Q(\theta', \theta) = M[\ell(y, \theta') | x, \theta]$$

де $\ell(y, \theta')$ - це логарифм функції максимальної правдоподібності даних $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, які спостерігались би у відсутності цензури, групування і т. д., $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор даних, що спостерігаються в дійсності, θ і θ' - вектори параметрів, їх суттєва відмінність буде зрозуміла з подальших викладок. Отже, $Q(\theta', \theta)$ - це умовне математичне сподівання логарифма функції правдоподібності для повних даних y у випадку, коли відомі спостереження x .

Реалізація ЕМ-алгоритму - це послідовне виконання двох кроків :

крок Е - для оцінки θ_E параметра θ , отриманої на попередньому кроці ітерації обчислимо значення функції $Q(\theta', \theta_E)$, як функції формального параметра θ'

крок М - покладемо нове значення оцінки θ_{l+1} рівним тому значенню параметра θ' , при якому функція $Q(\theta', \theta_e)$ досягає максимуму.

Для розподілів, що належать до експоненціального типу за рахунок того, що функція правдоподібності для повної виборки y розміру n має достатню статистику:

$$T = (T_1, T_2, \dots, T_p), \quad \text{де } T_j = \sum_{i=1}^n t_j(y_i),$$

$j = 1, \dots, p.$

(p - розмірність вектора параметрів θ), реалізація EM-алгоритму значно спрощується:

крок Е - обчислення $T' = M(T|x, \theta_e)$.

крок М - знаходження значення θ_{l+1} , як розв'язку рівняння $M(T, \theta') = T'$ відносно θ' .

Відомо, що будь-яка послідовність EM-оцінок збільшує $l_0(x, \theta)$ - логарифм функції правдоподібності, побудованої по дійсних спостереженнях.

В § 8 описується застосування EM-алгоритму до оцінювання параметрів P_j та θ_j , $j = 1, \dots, m$ скінченних сумішей розподілів:

$$g(x) = \sum_{j=1}^m P_j f(x, \theta_j),$$

де θ_j - вектор параметрів розподілу $f(x, \theta_j)$.

Якщо P_{j^e} і θ_{j^e} - оцінки параметрів, отримані на l - тому кроці ітерації, то $P_{j^{e+1}}$ спернуємо в явному вигляді:

$$P_{j|l+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_{j|l} f(x_i, \theta_{je})}{\sum_{j=1}^m P_{j|l} f(x_i, \theta_{je})}$$

На закінчення параграфу розглядається ряд прикладів.

У випадку сумішей геометричних, експоненціальних, пуассонівських розподілів, оцінки вектора параметрів θ_j на кожному кроці ітерації отримуються в явному вигляді, а отже реалізація ЕМ-алгоритму є простою і не вимагає додаткового використання наближених методів та ітераційних процедур. Відмітимо, що у випадку сумішей гамма-розподілів, незважаючи на певне технічне ускладнення, також доцільно користуватися ЕМ-алгоритмом для знаходження оцінок параметрів цього розподілу.

В § 9 розглядається схема з групуванням даних. Оскільки груповані дані можна інтерпритувати, як неповні дані, і крім того, логарифм функції правдоподібності для повних даних має значно простіший функціональний вигляд, ніж у випадку дійсних даних, то для знаходження оцінок параметрів розподілів зручно використовувати ЕМ-алгоритм.

Функція $Q(\theta', \theta)$, яку треба знаходити на першому кроці ЕМ-алгоритму має вигляд :

$$Q(\theta', \theta) = M(\ell(y, \theta') | x, n, \theta) = \\ = \sum_{j=1}^k n_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \ln f(y, \theta') \cdot f(y, \theta) dy,$$

де $y = (y_1, \dots, y_n)$, y_i - час відмови i -того пристрою, тобто y - вектор повних даних,
 $x = (x_0, x_1, \dots, x_k)$, де x_i - точки, якими розбито відрізок спостереження, $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$

де n_i - число пристроїв, які відмовили на відрізку $(x_{i-1}, x_i]$.

Детально вивчається ряд конкретних прикладів. Для випадків експоненціального, нормального, логнормального і гамма - розподілів, що належать до розподілів експоненціального типу, ЕМ - алгоритм застосовується у спрощеному вигляді.

В перших трьох випадках оцінки параметрів отримуємо в явному вигляді, для гамма - розподілу вимагається розв'язування нескладного рівняння одним із елементарних методів, наприклад, методом поділу відрізка пополам. Із аналізу схеми застосування ЕМ-алгоритму випливає, що написати алгоритм розв'язування задачі на ЕОМ нескладно. Крім того, у цих прикладах для розв'язування рівнянь, що виникають у процесі реалізації ЕМ-алгоритму не вимагаються додаткові ітераційні методи типу методу Ньютон - Рафсона, збіжність яких дуже залежить від вибору початкової точки. Таким чином, можна зробити висновок, що для названих вище розподілів у схемі з групуванням даних варто віддати перевагу застосуванню методу ЕМ - алгоритм, а не класичному методу максимальної правдоподібності.

Що стосується розподілів Вейбулла та бета - розподілу, то доцільніше користуватися класичним методом максимальної правдоподібності, оскільки застосування ЕМ - алгоритму приводить на кожному кроці ітерації до виконання ще однієї ітераційної процедури типу методу Ньютон - Рафсона, розв'язування задач, пов'язаних із її збіжністю, а така задача навіть в технічному плані є складною.

Автор висловлює вдячність науковому керівнику – доктору фізико-математичних наук, професору, член-кореспонденту АН України Ядренку Михайлу Йосиповичу за постійну увагу до роботи, цінні поради і зауваження.

Основні результати дисертації опубліковані в таких роботах :

1. Мацюк Л.В. О смесях пуассоновских распределений // Рукопись деп. в УкрНИИТИ 10.09.87, № 2409 – Ук 87.

2. Мацюк Л.В. Оценка рандомизирующей функции смесей геометрических распределений // Рукопись деп. в УкрНИИТИ 20.08.88, № 2139 – Ук 88 .

3. Мацюк Л.В. Об оценке весовой функции смесей геометрических распределений // Рукопись деп. в УкрНИИТИ 19.04.89, № 1117 – Ук 89.

4. Мацюк Л.В. Дискретные распределения, являющиеся смесью распределений Пуассона // Исследование операций и АСУ. – 1989, в.33. –с.21 – 22.

5. Егрий Т.И., Мацюк Л.В. О смеси геометрических распределений // Исследование операций и АСУ. – 1989, в. 33. – с. 16 – 21.

6. Мацюк Л.В. О некоторых свойствах смесей распределений Пуассона // Исследование операций и АСУ. – 1991, в. 37. – с. 37 – 40.

7. Машук Л.В. Про ЕМ - алгоритм оцінки параметрів скінченних сумішей розподілів // Вісник Київського університету. Фіз. - мат. науки. - 1991, в. 2. - с. 110 - 113.

8. Машук Л.В. Оцінки вагової функції сумішей геометричних розподілів // Вісник Київського університету. Фіз.-мат. науки. - 1992, в. 7. - с. 100 - 104.

Підп. до друку 17.04.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0.93, Обл.-вид. арк. 0.8, Тираж 100 пр.,
Зам. 293. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ІСП, вул. Терещенківська, 3.

1165797

AB 27.748

AB 27.748