МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

УДК 519.21

ОСИПЧУК Михайло Михайлович

ПОБУДОВА ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ З НЕРЕГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

01.01.05 - теорія ймовірностей та математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики механіко-математичного факультету Київського університету імені Тараса Шевченка

Науковий керівник	доктор фізико-математичних наук, професор Портенко М.І.
Офіційні опоненти	доктор фізико-математичних наук, професор Кулініч Г.Л.
	кандидат фізико-математичних наук, професор Копитко Б.І.
Провідна організація	Київський політехнічний інститут

Захист дисертації відбудеться "20" вересня 1993 року о 14.00 год. на засіданні спеціалізованої ради К 068.18.11 по присудженню вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук в Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ, проспект Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці університету.

Автореферат розіслано "19" серпня 1993 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Вlу Сущанський В.І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дифузійні і близькі до них квазідифузійні процеси відіграють значну роль в теорії марківських процесів, теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного та еліптичного типу, теорії управління. Одне з центральних місць в теорії дифузійних процесів посідає задача побудови процесу з наперед заданими коефіцієнтами: вектором переносу та оператором дифузії. Розв"язанню цієї задачі і присвячена робота, що реферується.

Те значення, яке має згадана задача, забезпечило їй значну популярність серед вчених, як вітчизняних, так і зарубіжних. Зокрема результати робіт А.В.Скорохода, М.В.Крилова, Х.Танаке, Д.В.Струка, С.Р.С.Варадана дозволяють будувати дифузійні і квазідифузійні процеси з неперервною, додатньовизначеною, обмеженою матрицею дифузії та обмеженим, вимірним вектором переносу. Подальший розвиток задача одержала в роботах М.І.Портенка, де побудовані квазідифузійні /узагальнені дифузійні/ процеси з невиродженою, обмеженою, неперервною матрицею дифузії та вектором переносу, що являє собою, взагалі кажучи, локально необмежену /або навіть узагальнену/ функцію. Серед методів, що застосовувались, слід виділити аналітичний, пов"язаний з диференціальними рівняннями в частинних похідних еліптичного та параболічного типів, і ймовірнісний, що базується на побудові траєкторій дифузійних процесів як розв"язків стохастичних диференціальних рівнянь.

Зауважимо, що згадані результати стосуються скінченновимірних просторів. Нескінченновимірний випадок почали розглядати В.В.Баклан і Т.Л.Чантладзе, вивчаючи параболічні диференціальні рівняння другого порядку як рівняння Колмогорова для дифузійних процесів. Задача Коші для таких рівнянь і застосування до неї теорії стохастичних рівнянь з обмеженими операторними коефіцієнтами в шкалі гільбертових просторів викладена Ю.Л.Далецьким. Випадок необмежених коефіцієнтів розглядався в роботах В.В.Бакланя, Ю.Л.Далецького, М.В.Крилова, Б.Л.Розовського.

Мета роботи. Подальша розробка методів побудови дифузійних процесів з нерегулярними коефіцієнтами, зокрема, з локально необмеженим вектором переносу, як в скінченно- , так і в нескінченновимірних просторах.

Методика досліджень. В дисертації використовується метод рівнянь збуреної дифузії /аналогів рівнянь Колмогорова/, а також метод стохастичних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна роботи. Основні результати дисертації полягають в тому, що:

- побудовані узагальнені дифузійні процеси, як в скінченно- , так і в нескінченновимірних просторах з, можливо, локально необмеженим вектором переносу, що задовільняє деяку умову інтегровності за гаусівською мірою;
- побудований дифузійний процес в евклідовому просторі, як розв"язок стохастичного диференціального рівняння, з вектором переносу, що має в одній точці особливість, яка виходить за межі згаданої умови;
- побудований узагальнений дифузійний процес в скінченновимірному просторі з коефіцієнтом обриву, що є дельта-функцією зосередженою на поверхні.

Теоретична і практична цінність. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути використані в теорії випадкових процесів, математичній фізиці та інших галузях науки і техніки, де досліджуються явища, що моделюються дифузійними процесами.

Апробація роботи та публікації. Результати роботи доповідались на наукових семінарах відділу теорії випадкових процесів інституту математики АН України, республіканському семінарі з теорії ймовірностей та математичної статистики при Київському університеті, Третій Донецькій міжнародній конференції "Ймовірнісні моделі процесів в управлінні та надійності"/Донецьк, 1993/, конференції молодих вчених Київського університету /1993/.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 3] .

Структура і об"єм роботи. Дисертація складається з вступу і трьох розділів, що розбиті на 12 параграфів. Загальний обсяг роботи сторінок машинописного тексту. Бібліографія містить 28 назв.

ЗМІСТ РОБОТИ

<u>У вступі</u> наведено постановку задачі, короткий огляд робіт, пов"язаних з темою дисертації а також перераховані основні результати роботи.

<u>Перший розділ</u> має загальний характер. В ньому сформульовані основні поняттяі і твердження, що використовуються в дисертації.

<u>В другому розділі</u> розглянута задача побудови узагальнених дифузійних процесів в скінченновимірних просторах.

В §2.I доведена наступна теорема.

<u>Теорема 2.I.</u> Нехай функція $b(t,x)$, $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^m$, значеннями якої є симетричні матриці порядку $m\times m$, така, що:

а/ при всіх $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^m$, $\theta\in\mathbb{R}^m$

$$c_1|\theta|^2\le(b(t,x)\theta,\theta)\le c_2|\theta|^2,$$

де c_1 і c_2 - додатні сталі;

б/ при всіх $t,t'\in[0,T]$, $x,x'\in\mathbb{R}^m$, $j,k=1,2,\dots,m$

$$|b_{jk}(t,x)-b_{jk}(t',x')|\le L\,(|x-x'|^{\alpha}+|t-t'|^{\alpha/2}),$$

де $b_{jk}(t,x)$ елементи матриці $b(t,x)$, а L і α - деякі додатні сталі, $\alpha\le 1$.

Нехай для векторної функції $a(t,x)$, $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^m$ існують такі сталі $\delta>0$, $C_T>0$, $\gamma>-\frac{\delta}{2}$, що при всіх $0\le s<t\le T$, $x\in\mathbb{R}^m$

$$\int_s^t d\tau\int_{\mathbb{R}^m}|a(\tau,y)|^{2+\delta}(\tau-s)^{-\frac{m}{2}}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{\tau-s}\right\}dy\le C_T\,(t-s)^{\gamma} \qquad /1/$$

де μ - стала з оцінки щільності ймовірності переходу процесу з нульовим переносом і дифузією $b(t,x)$, $|D_x^k g(s,x,t,y)|\le M t^{-\frac{m+k}{2}}\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t-s}\right\}$.

Тоді існує неперервний марківський процес з перехідною ймовірністю $P(s,x,t,\Gamma)$, $0\le s<t\le T$, $x\in\mathbb{R}^m$, Γ - борелівська множина в $\mathbb{R}^m$ і такий, що для довільної вимірної обмеженої функції $\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^m$ з дійсними значеннями функція

$$u(s,x,t,\varphi)=\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)\,P(s,x,t,dy)$$

є розв"язком рівняння

$$u(s,x,t,\varphi)=\int_{\mathbb{R}^m} g(s,x,t,y)\varphi(y)\,dy+\int_s^t d\tau\int_{\mathbb{R}^m} g(s,x,\tau,z)(\nabla_z u(\tau,z,t,\varphi),a(\tau,z))\,dz$$

для якого виконується $|\nabla_x u(s,x,t,\varphi)|\le K\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}$, де K -стала, $\|\varphi\|=\sup_x|\varphi(x)|$, а $g(s,x,t,y)$ фундаментальний розв"язок рівняння

$$\frac{\partial v(s,x)}{\partial s}+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} b_{jk}(s,x)\frac{\partial^2 v(s,x)}{\partial x_j\,\partial x_k}=0 .$$

Умова /I/, зокрема, виконується для функцій $a(t,x)$, розглянутих М.І.Портенком, тобто таких, що

$$\int_0^T d\tau\int_{\mathbb{R}^m}|a(\tau,x)|^p dx<+\infty \quad \text{при деякому } p>m+2$$

а також для функцій вигляду $a_1(t,x)=\tilde{a}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{k_i}^2\right)^{-\beta/2}$

при $|x|\le R$ і $a_1(t,x)=0$ в іншому випадку /тут $\tilde{a}$ сталий вектор в $\mathbb{R}^m$, $1\le n\le m$, $k_i\ne k_j$ при $i\ne j$, $\frac{n}{m+2}\le\beta<\min(1,\frac{n}{2})$/. Зауважимо, що функція $|a_1(t,x)|^p$ неінтегровна на $[0,T]\times\mathbb{R}^m$ ні при якому $p>m+2$.

В §2.2 доведено, що побудований в теоремі 2.I процес є слабким розв"язком стохастичного рівняння з коефіцієнтами $a(t,x)$ і $b^{1/2}(t,x)$. Крім того міра, що йому відповідає в просторі неперервних функцій, еквівалентна мірі, що відповідає дифузійному процесові з тією ж дифузією і нульовим переносом /теорема 2.3/.

В §2.3 розглянуто однорідний аналог теореми 2.I. Умова /I/ в цьому випадку має вигляд /теорема 2.4/

$$\int_{\mathbb{R}^m}|a(y)|^{1+\delta}\exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{t}\right\}dy\le C\,t^{\gamma+\frac{m}{2}} \qquad /2/$$

де $\delta>0,\ C>0,\ \gamma>-\frac{\delta+1}{2},\ t>0$.

В теоремі 2.5 доведено, що побудований процес є узагальненим дифузійним процесом з вектором переносу $A(\Psi)$ і матрицею дифузії $B(\Psi)$, $\Psi\in C_0(\mathbb{R}^m)$, що задаються співвідношеннями

$$(A(\Psi),\theta)=\int_{\mathbb{R}^m}(a(x),\theta)\Psi(x)\,dx,$$

$$(B(\Psi)\theta,\theta)=\int_{\mathbb{R}^m}(b(x)\theta,\theta)\Psi(x)\,dx,$$

де $\theta\in\mathbb{R}^m$.

Крім того такий процес є слабким розв"язком відповідного стохастичного диференціального рівняння /теорема 2.6/.

Теорема 2.7 Нехай матричнозначна функція $b(x),\ x\in\mathbb{R}^m$ задовільняє однорідні по t аналоги умов а/ і б/ теореми 2.1, а для векторної функції $a(x),\ x\in\mathbb{R}^m$ існують такі сталі $\delta>0,\ C>0$, $\gamma>-\frac{\delta+2}{2}$, що при всіх $t>0$

$$\int_{\mathbb{R}^m}|a(y)|^{2+\delta}\exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{t}\right\}dy\le C\,t^{\gamma+\frac{m}{2}} \qquad /3/$$

Тоді міра, що відповідає процесові, побудованому в теоремі 2.4, еквівалентна на кожній σ-алгебрі $\mathcal{M}_T,\ T<\infty$ мірі, що відповідає дифузійному процесові з тією ж дифузією і нульовим переносом /тут $\mathcal{M}_T$ мінімальна σ-алгебра підмножин множини неперервних на $[0,\infty)$ векторнозначних функцій, що містить функції вигляду $\{x(t)\in\Gamma\}$, $t\in[0,T]$; Γ - борелівська множина в $\mathbb{R}^m$ /.

Зауважимо, що коли умова /2/ виконується, а /3/ не виконується, то про еквівалентність згаданих мір, взагалі кажучи, говорити не можна. Прикладом є процес з одиничною дифузією і вектором переносу $a(x)=\tilde{a}\,|x_1|^{-\beta},\ \tilde{a}\in\mathbb{R}^m,\ \frac{1}{2}\le\beta<1$ при $|x|\le R$ і $a(x)=0$ в іншому випадку.

В §2.4 побудований дифузійний процес в $\mathbb{R}^m,\ m\ge 2$ /розв"язок стохастичного диференціального рівняння/ з переносом $a(x),\ x\in\mathbb{R}^m$ що має особливість в одній точці, і матрицею дифузії $\varepsilon I,\ \varepsilon>0$, де I - одинична матриця. Основний результат параграфу сформульовано в теоремі 2.8.

Розглянемо $a(x) = c(x)f(x) + xg(x)$, де $c: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ і $(x, c(x)) = 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}^m$. Таке зображення довільної функції $a(x)$ можна завжди реалізувати.

Нехай $g(x) = G(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^m$. При $\beta > 0$ покладемо

$$L_1(G) = \int_0^\beta \frac{1}{y^{m-1}} \exp\left\{-\frac{2}{\varepsilon^2}\int_\beta^y z\,G(z)\,dz\right\} dy,$$

$$L_2(G) = \int_0^\beta y^{m-1} \exp\left\{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_\beta^y z\,G(z)\,dz\right\} \int_0^y \frac{1}{x^{m-1}} \exp\left\{-\frac{2}{\varepsilon^2}\int_\beta^x z\,G(z)\,dz\right\} dx\,dy,$$

якщо $L_1(G) < \infty$.

Теорема 2.5. Нехай функція $a: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задовільняє наступні умори:

а/ для кожного $r > 0$ існує така стала K_r , що

$$|a(x)| \leq K_r(1 + |x|) \quad , \quad \text{якщо } |x| \geq r;$$

б/ для кожних $r > 0$ і $R > r$ існує така стала C_{Rr} , що

$$|a(x) - a(y)| \leq C_{Rr}|x - y| \quad \text{якщо } r \leq |x| \leq R \text{ і } r \leq |y| \leq R .$$

Тоді мають місце твердження:

1/ якщо $L_1(G) = +\infty$ або $L_1(G) < +\infty$, $L_2(G) = +\infty$, то існує сильний розв"язок рівняння

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + \varepsilon\, dw(t) \ , \ t > 0, \qquad /4/$$

де $w(t)$ - m-вимірний вінерівський процес;

2/ якщо $L_1(G) < +\infty$, $L_2(G) < +\infty$, а $L_1(-G) = +\infty$ або $L_1(-G) < +\infty$, $L_2(-G) = +\infty$ то рівняння /4/ при $t > 0$ розв"язку не має;

3/ в випадку 1/ міра, що відповідає розв"язку рівняння /4/ абсолютно неперервна відносно міри, що відповідає дифузійному процесові з тією ж дифузією і нульовим переносом.

Розглянуто деякі випадки, коли, взагалі кажучи, $g(x) \neq G(|x|)$. Крім того в прикладі 2.4 проведена процедура множення модуля m-вимірного вінерівського процесу на сферичну проекцію незалежного від попереднього n-вимірного вінерівського процесу. Доведено, що таким чином одержаний процес має стохастичний диференціал

$$d\xi(t) = \frac{n-m}{2} \frac{\xi(t)}{|\xi(t)|^2} dt + dw(t)$$

де $w(t)$- деякий n-вимірний вінерівський процес.

В §2.5 розглянуто мультиплікативний функціонал від m-вимірного вінерівського процесу $w(t)$ /$m \geq 3$/

$$\alpha_t = \frac{u(w(t))}{u(w(0))}, \quad t \geq 0$$

Тут $u(x) = M_x e^{\eta_\infty}$, $\eta_\infty = \lim\limits_{t\uparrow\infty} \eta^0_t$, $\eta^0_t = \int\limits_0^t v(w(\tau))\delta_S(w(\tau))d\tau$

і v - деяка неперервна, невід'ємна функція на обмеженій, замкненій поверхні Ляпунова S, $\delta_S(x)$- дельта-функція зосереджена на поверхні S.

З допомогою функціоналу α_t проведено перетворення вінерівського процесу $w(t)$, тобто розглянуто марківський процес з перехідною ймовірністю

$$P(t,x,\Gamma) = \frac{1}{u(x)} \int\limits_\Gamma g(t,x,y)u(y)dy,$$

де $g(t,x,y)$ - щільність ймовірності переходу m-вимірного вінерівського процесу. Доведено, що одержаний процес є узагальненим дифузійним процесом з одиничною дифузією, вектором переносу $\nabla \ln u(x)$ і коефіцієнтом обриву $v(x)\delta_S(x)$.

Зауважимо, що умови, які задовільняє вектор переносу в §§2.1 -2.3 мають вигляд оцінок інтегралів за гаусівською мірою, а це дозволяє без особливих труднощів перенести результати цих параграфів на випадок сепарабельного гільбертового простору. Це і зроблено в розділі 3 /розглянуто ~~однорідний~~ випадок/.

В §3.I доведена наступна теорема.

Теорема 3.I. Нехай X - сепарабельний гільбертів простір, B - додатній ядерний оператор в X, $|B|<1$, $P_0(t,x,\cdot)$ - гаусівська міра з середнім $x\in X$ і кореляційним оператором tB, $X_+\subset X\subset X_-$ оснащення простору X побудоване за оператором $B^{-1/2}$.

Нехай функція $b: X\to L^s(X)$ / $L^s(X)$ множина лінійних, симетричних операторів на X / така, що:

B1/ $b^{1/2}(x)=B^{1/2}(I-G(x))B^{-1/2}$, де $G: X\to L^s(X_-,X_+)$;

B2/ $\|G(x)\|$ обмежен при всіх $x\in X$;

B3/ $G(x)$ двічі неперервно диференційовна, $D^k G(x)$, $k=1,2$ обмежені і $D^2G(x)$ задовільняє умову Ліпшиця;

B4/ $(B^{1/2}b^{1/2}(x)B^{-1}b^{1/2}(x)B^{1/2}y,y)>((I-B)y,y)$, $x\in X$, $y\in X$.

Нехай функція $a: X\to X$ така, що:

A1/ $a(x)\in B^{1/2}X$ при майже всіх $x\in X$ за всіма мірами $P_0(t,c,\cdot)$;

A2/ існують такі сталі $\delta>0$, $C>0$, $\gamma>-\frac{\delta+1}{2}$, що при майже всіх $x\in X$ за всіма мірами $P_0(t,c,\cdot)$

$$\int_X |B^{-1/2}a(y)|^{1+\delta}P_1(t,x,dy)\leq Ct^{\gamma},\quad t>0,$$

де $P_1(t,x,\cdot)$ гаусівська міра з середнім $x\in X$ і кореляційним оператором $tB^{1/2}(I-Q)^{-1}B^{1/2}$; Q - оператор з оцінки щільності, відносно $P_0(t,x,\cdot)$, ймовірності переходу процесу з нульовим переносом і дифузією $b^{1/2}(x)B\,b^{1/2}(x)$; $|D_x^k\rho(t,x,y)|=rt^{-\frac{k}{2}}\exp\left\{\frac{1}{2t}(B^{-1/2}QB^{-1/2}(y-x),(y-x))\right\}$.

Тоді існує неперервний однорідний марківський процес в X з перехідною ймовірністю $P(t,x,\Gamma)$ і такий, що для довільної вимірної, обмеженої функції $\varphi: X\to\mathbb{R}$ функція

$$u(t,x,\varphi)=\int_X\varphi(y)P(t,x,dy)$$

є розв"язком рівняння

$$u(t,x,\varphi)=\int_X\varphi(y)Q(t,x,dy)+\int_0^t d\tau\int_X(D_{e(y)}u(t-\tau,y,\varphi))|B^{-1/2}a(y)|Q(\tau,x,dy)$$

для якого виконується $|D_{e(x)}u(t,x,\varphi)| \leq K\|\varphi\| t^{-1/2}$, де K - стала, $\|\varphi\| = \sup_x |\varphi(x)|$, $e(x) = \frac{a(x)}{|B^{-1/2}a(x)|}$, $x \in X$, $Q(t,x,\Gamma)$ - перехідна ймовірність дифузійного процесу в X з нульовим переносом і оператором дифузії $b^{1/2}(x) B b^{1/2}(x)$, $x \in X$

В §3.2 доведено, що побудований в теоремі 3.I марківський процес є узагальненим дифузійним процесом з вектором переносу $a(x)$ і оператором дифузії $b^{1/2}(x) B b^{1/2}(x)$ в тому розумінні, що для довільної обмеженої неперервної з обмеженим носієм дійсної функції $\psi(x), x \in X$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_X \psi(x) \frac{1}{t} \int_X (y-x, z) P(t,x,dy) \mu(dx) = \int_X (a(x), z) \psi(x) \mu(dx)$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_X \psi(x) \frac{1}{t} \int_X (y-x, z)^2 P(t,x,dy) \mu(dx) = \int_X (b^{1/2}(x) B b^{1/2}(x) z, z) \psi(x) \mu(dx)$$

/тут μ - гаусівська міра з середнім 0 і кореляційним оператором B /.

§3.3 присвячений доведенню того факту, що побудований в теоремі 3.I процес є слабким розв"язком стохастичного інтегрального рівняння

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(x(s)) ds + \int_0^t b^{1/2}(x(s)) dw_B(s) , \quad t \geq 0,$$

де w_B - B-вінерівський процес в X /процес з незалежними приростами, для якого при довільному $h>0$ $w_B(t+h) - w_B(t)$ має гаусівський розподіл з середнім 0 і кореляційним оператором hB /.

В §3.4 наведені умови, при яких міра, що відповідає побудованому в теоремі 3.I процесові еквівалентна мірі, що відповідає дифузійному процесові з тією ж дифузією і нульовим переносом.

<u>Теорема 3.4.</u> Нехай функція $a : X \to X$ задовільняє умови AI/ і A3/ існують такі сталі $\delta > 0$, $C > 0$, $\gamma > -\frac{\delta+2}{2}$, що при $t>0$ і майже всіх $x \in X$ за всіма мірами $P_0(t,c,\cdot)$, $t>0, c \in X$

$$\int\limits_X |B^{-1/2} a(y)|^{2+\delta} P_1(t,x,dy) \le$$

Нехай функція $b : X \to L^s(X)$ задовільняє умови В1/ - В4/. Тоді звуження на $\mathcal{M}_T$ мір, що відповідають побудованому в теоремі 3.1 процесові та дифузійному процесові з нульовим переносом і тією ж дифузією, еквівалентні при кожному $T < \infty$.

Взагалі кажучи, якщо виконуються умови т ореми 3.1, але не виконується А3/, то гов рити про еквівалентність згаданих вище мір не можна. Прикладом цьому є процес з вектором переносу $a : X \to X$ таким, що $a(x) = \tilde{a}\,|(x,e)|^{-\alpha}$ при $|x| \le R$ і $a(x) = 0$ в іншому випадку /тут $\tilde{a} \in B^{1/2}X$ сталий вектор, e - власний вект операто B, $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ / та оператором дифузії B.

Основні результати дисертації опубліковані в таких роботах:

1. Осип ук М.М. Диффузия с интегрируемым переносом.//Бесконечномерный стохастический анализ: Сб. науч. тр./АН УССР. Ин-т математики. - Киев, 1990.- с. 96-101.
2. Осипчук М.М. О диффузионных роцессах с переносом, имеющим локальную особенность в одной точке// Стохастические уравнения и граничные теоремы: Сб. науч. тр./ Ин-т математики АН Украины. - Киев, 1991. - с. 118-122.
3. Осипчук М.М. Перетворення вінерівського процесу в $\mathbb{R}^m$ з допомогою фу ціоналу типу локального часу на поверхні// Український математичний журнал. - 1993. - т. 45, № 6. - с. 863-867.

Підп до друку 13 08 93. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум.друк. арк. 0,7 . Ум. фарбо-відб. 0,7 . Обл.-вид.арк. 0,5
Тираж 100 пр. Зам. 289

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул Терещенківська, 3