

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

На правах рукописи

ФАВОРОВ Сергей Юрьевич

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИИ В КОНЕЧНОМЕРНОЕ И БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО

01.01.01 - математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Харьков - 1993

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Харьковского государственного университета.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор В. С. Азарин

доктор физико-математических наук,
профессор М. И. Кадец

доктор физико-математических наук,
профессор Р. С. Юлмухаметов

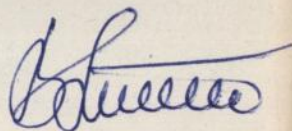
Ведущая организация - Львовский государственный университет

Защита диссертации состоится "20 сентября 1993 года в 11 часов на заседании специализированного совета Д 016.27.02 при физико-техническом институте низких температур АН Украины /310164, Харьков, пр. Ленина, 47/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физико-технического института низких температур АН Украины.

Автореферат разослан "16 августа 1993 года.

Ученый секретарь совета,
доктор физико-математических наук,
профессор



В. А. Ткаченко

ЛННБ України ім. В. Стефаника



00815191 (P)

Актуальность темы. Предмет исследования. Исследование асимптотического поведения голоморфных функций и отображений занимает одно из центральных мест в современном комплексном анализе. Актуальность работ в этом направлении обусловлена как внутренними потребностями комплексного анализа, так и тем, что теоремы о целых и мероморфных функциях имеют многочисленные приложения в смежных областях математики - теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, функциональном анализе и т.п. Для функций одной переменной в указанных вопросах очень плодотворным оказалось использование теории потенциала и субгармонических функций. Эти методы используются также при изучении характеристик поведения целых функций многих переменных по выделенной переменной. Первой в этом направлении была работа О. Сира (1911), где было доказано, что порядок роста целой функции $f(z, w)$ по переменной w один и тот же для всех точек $z \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, точек некоторого множества нулевой плоской меры, где он может понижаться. Этот результат неоднократно обобщался на более тонкие, чем порядок, характеристики роста функции и ее нулей, а также с целью получения точных оценок исключительного множества. Так, П. Лелон (1941) доказал, что в случае, рассмотренном О. Сиром, исключительное множество имеет нулевую логарифмическую емкость. Л. И. Ронкин (1956) показал, что при определенных ограничениях подобный результат имеет место и для множества точек понижения типа, причем нулевая емкость есть точная характеристика этого множества. Точность упомянутой выше теоремы П. Лелона показал М. Ш. Ставский (1969). Случай функций от $n \geq 3$ переменных существенно отличается от случая двух переменных, поскольку здесь уже исключительное множество лежит в \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, и для его описания обычные емкостные характеристики недостаточны. Л. И. Ронкин (1966) распространил теорему П. Лелона на целые функции любого конечного числа переменных и описал возникающие при этом исключительные множества с помощью специально введенной характеристики массивности множеств в \mathbb{C}^m - Γ -емкости. Далее, для описания поведения целых функций по выделенной переменной Л. И. Ронкин (1968) ввел специальный класс \mathfrak{F} , состоящий из функций $\mathfrak{F}(z, t)$, определенных при $z \in \mathbb{C}^m$, $t \geq 0$ и таких, что функция $\mathfrak{F}(z, |w|)$ плюрсубгармоническая (ПСГ) в $\mathbb{C}_{(z)}^m \times \mathbb{C}_{(w)}^1$. Этому классу принадлежит,

в частности, функция

$$\sup (\log |f(z, w)| : |w| \leq t),$$

где $f(z, w)$ - целая функция в \mathbb{C}^{m+1} , а также функция

$$\int_0^{2\pi} \log |f(z, te^{i\theta})| d\theta,$$

которая вследствие формулы Йенсена растет так же, как и считающая функция нулей по переменной w функции $f(z, w)$. Л. И. Ронкин доказал, что для функций класса \mathfrak{F} порядок по переменной t

$$\rho(z) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \Phi^+(z, t)}{\log t}$$

один и тот же для всех $z \in \mathbb{C}^m \setminus E$, где E - множество нулевой логарифмической емкости при $m=1$ и нулевой Γ -емкости при $m>1$. Позднее П. Лелон (1968) усилил этот результат, доказав плюриполярность множества E . Неулучшаемость этой оценки показал Б. И. Локшин (1982), см. также А. Зериахи (1989).

Простые примеры показывают, что тип функции $\Phi \in \mathfrak{F}$ при порядке ρ

$$\sigma(z) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \Phi(z, t) t^{-\rho}$$

может расти при росте $|z|$. При условии конечности порядка функции $\Phi(z, t)$ по совокупности переменных Л. И. Ронкин (1971) дал оценку сверху роста величины $\sigma(z)$ через ее значения на произвольном множестве положительной Γ -емкости, а также показал, что интеграл

$$\int_1^{\infty} \sup \{ \Phi(z, t) : z \in K \} t^{-\rho-1} dt \quad (1)$$

сходится или расходится одновременно для всех компактов $K \in \mathbb{C}^m$ положительной Γ -емкости. Условие конечности порядка по совокупности переменных в этих теоремах снять нельзя (Б. И. Локшин (1973)).

Изучение роста функций класса \mathfrak{F} по переменной t позволяет описывать рост и распределение нулей, а также распределение значений целых и мероморфных функций по выделенной переменной (см. Л. И. Ронкин (1968), С. Ю. Фаворов (1974)). В связи с этим представляется естественным и актуальным изучение более тонких характеристик роста по переменной t - класса сходимости, нижнего порядка - и выяснение их зависимости от переменной z . Отметим, что до автора свойства нижнего порядка по выделенной переменной не рассматривались. Представляется также естественным доказать, что теорема о типе по переменной t функций класса \mathfrak{F} должна быть усилена заменой в ней множеств положительной Γ -емкости на неплуриполярные множества.

Поведение ПСГ функций на комплексных лучах, проходящих через начало координат, допускает более точное описание. Приведем здесь только результат Сибони и Вонга (1979): любая ПСГ в шаре $B(R) \subset \mathbb{C}^m$ функция $v(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup \{v(z) : |z| \leq \theta t\} \leq \sup \{v(z) : |z| \leq t, \pi(z) \in F\},$$

где F - произвольный компакт положительной Γ -емкости в пространстве \mathbb{C}^{m-1} , $\pi(z)$ - каноническая проекция \mathbb{C}^m на \mathbb{C}^{m-1} , а константа θ определяется только множеством F и не зависит ни от функции $v(z)$, ни от $t \in (0, R)$. Как показал Сичак (1982), множества положительной Γ -емкости здесь можно заменить на неплуриполярные.

Теорема Сибони и Вонга имеет важные приложения, поэтому представляется актуальным описание классов функций, для которых справедливы аналоги этой теоремы для роста по выделенной переменной.

Асимптотика поведения функций на вещественных лучах, выходящих из начала координат, рассматривается в созданной Б. Я. Левиным и П. Пфлюгером теории целых функций вполне регулярного роста (ФВРР), которая была распространена В. С. Азариным (1961) на субгармонические функции в \mathbb{R}^m , $m \geq 2$.

По определению, субгармоническая функция $v(x)$ конечного порядка ρ и уточненного порядка $\rho(t)$ с регуляризованным индикатором

$$h_v^*(x') = \overline{\lim}_{y \rightarrow x'} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-\rho(t)} v(ty) \quad (2)$$

является ФВРР, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\{x' \in S^{m-1} : tx' \in E\}} |t^{-\rho(t)} v(tx') - h_v^*(x')| = 0, \quad (3)$$

где E - множество в \mathbb{R}^m , которое можно покрыть шарами $B(x_n, r_n)$ так, что для $\alpha = m-1$ при $R \rightarrow \infty$

$$\sum_{n: |x_n| < R} r_n^\alpha = o(R^\alpha).$$

Как отметил В.С. Азарин (1976), для ФВРР множество E можно выбрать так, что это условие будет выполняться при любом $\alpha > m-2$.

При $m=2$ в определении индикатора регуляризацию, т.е. внешний предел в (2), можно опустить; здесь также существует эквивалентное определение, при котором вместо соотношения (3) требуется, чтобы на каждом луче $\{tx' : t \in (0, \infty)\}$ при $t \rightarrow \infty$ вне множества $A_{x'} \subset (0, \infty)$ нулевой относительной меры

$$t^{-\rho(t)} v(tx') \rightarrow h_v(x').$$

Для целой функции $f(z)$ на плоскости определение индикатора $h_f(\theta)$ совпадает с определением индикатора $h_{\log|f|}(z^0)$ при $z^0 = e^{i\theta}$, а ВРР целой функции f означает ВРР субгармонической функции $\log|f|$.

Важную роль как в самой теории ФВРР, так и в ее приложениях к уравнениям типа свертки играет теорема о сложении индикаторов:

Теорема. Пусть $f(z)$ - целая функция на плоскости нормального типа при уточненном порядке $\rho(t)$. Для того, чтобы при любой целой функции $g(z)$ нормального типа при том же уточненном порядке было справедливо соотношение

$$h_{fg}(\theta) = h_f(\theta) + h_g(\theta),$$

достаточно (Б. Я. Левин (1956)) и необходимо (В.С. Азарин (1966)), чтобы $f(z)$ было ФВРР.

Отметим, что использование аппроксимационной теоремы В.С. Азарина позволяет легко обобщить теорему о сложении индикаторов на

субгармонические функции в плоскости.

Теория целых ФБРР в \mathbb{C}^m начала развиваться позже (Л. И Ронкин (1971), Л. Груман (1971, 1976), П. Э. Агранович и Л. И. Ронкин (1976)). В связи с большим количеством различных определений стала актуальной задача изучения связей между ними. Существенное отличие этой ситуации от одномерной состоит уже в том, что исключительное множество может содержать весь луч или даже всю комплексную прямую. Далее, построение необходимых для сравнения определений целых функций требует применения $\bar{\partial}$ -техники Л. Хермандера; отметим, что стандартное применение этой техники дает лишь верхние оценки для целых функций, в то время как в таких примерах необходимы и оценки снизу. Актуальной и важной для приложений является также получение многомерного аналога теоремы о сложности индикаторов.

В работах по теории операторов (см, например, Луи де Бранж (1988)) возникает такой объект, как целые функции со значениями в гильбертовом пространстве. В то же время в аналитической теории вероятностей, в теории рядов со случайными коэффициентами возникают последовательности голоморфных функций, которые можно трактовать как голоморфные отображения в пространства последовательностей. С целью выработки единого взгляда на эти вопросы представляется актуальным изучать распределение значений голоморфных отображений конечномерного пространства в абстрактное банахово пространство.

Отправной точкой такого исследования, проведенного в диссертации, послужила разработанная Л. Альфорсом и В. Вейлем теория целых кривых, т.е. голоморфных отображений $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{k-1}$. Рост такого отображения описывается с помощью неванлинновской характеристики, которую можно определить равенством

$$T(t, F) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \log |F(te^{i\theta})| d\theta - \log |F(0)|,$$

где $|F|$ - евклидова норма в \mathbb{C}^k отображения, записанного в однородных координатах. Распределение значений отображения F описывается функцией

$$N(t, A, F) = \int_0^t [n(s, A, F) - n(0, A, F)] s^{-1} ds + n(0, A, F) \log t,$$

где $A \in \mathbb{C}^k$, а $n(s, A, F)$ - число корней скалярного произведения $\langle F, A \rangle$ в круге $|z| \leq s$. Из формулы Йенсена легко следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$N(t, A, F) \leq T(t, F) + O(1).$$

Основной теоремой этой теории является так называемая вторая основная теорема, которая утверждает, что для любой системы из $q > k$ векторов A_j , из которых любые k линейно независимы,

$$(q-k) T(t, F) \leq \sum_{j=1}^q N(t, A_j, F) + Q(t, F),$$

где остаточный член $Q(t, F)$ при $t \rightarrow \infty$ ведет себя как $O(\log t)$ в случае, когда характеристика $T(t, F)$ имеет конечный порядок роста. В общем случае для любого $\lambda \geq 0$ он оценивается как $O(\log(tT(t, F)))$ вне множества E_λ значений t такого, что

$$\int_{E_\lambda} t^{\lambda-1} dt < \infty;$$

вне множества E_0 остаточный член допускает оценку $O(\log T(t, F))$.

Далее, согласно теореме о равномерном распределении значений для целых кривых, для любого $\alpha > 1/2$ при $t \rightarrow \infty$

$$N(t, A, F) = T(t, F) + o(T^\alpha(t, F)),$$

вне исключительного множества E векторов $A \in \mathbb{C}^k$ нулевой Γ -емкости (С. Ю. Фаворов (1975)). Более того, множество E плюриполярно в \mathbb{C}^k (А. Садуллаев (1979)).

Отметим, что все эти результаты справедливы и для голоморфных отображений круга $|z| < 1$ в пространство $\mathbb{P}\mathbb{C}^{k-1}$, если только характеристика $T(t, F)$ неограничена при $t \rightarrow 1$. Остаточный член во второй основной теореме в этом случае допускает оценку

$O(|\log(1-t)|)$, когда характеристика имеет конечный порядок, и в общем случае

$$O(\log[(1-t)^{-1}T(t, F)])$$

вне множества E_λ значений t такого, что $\int_{E_\lambda} (1-t)^{-1-\lambda} dt < \infty$.

ПСТ функции и плюриполярные (ПП) множества в топологических векторных пространствах рассматривались многими авторами (С. Куаре (1970), Л. Груман (1974), П. Лелон (1974, 1978), Ф. Ноерра (1978), О. Кизельман (1984) и др.). Однако использование слабой* топологии связано с выяснением новых свойств, которые ранее не изучались.

Научная новизна. При изучении роста целых и плюрисубгармонических функций по выделенной переменной впервые рассмотрен нижний порядок, а также впервые доказана плюриполярность множеств понижения для нижнего порядка, типа, класса сходимости. Впервые доказана теорема о сложении индикаторов для целых и субгармонических функций многих переменных. Впервые изучена связь между плюриполярными множествами в сопряженном банаховом пространстве и нормирующими множествами в этом пространстве. Впервые определены величины, характеризующие распределение значений голоморфных отображений в банахово пространство и доказаны основные соотношения между ними.

Приложения. Результаты диссертации, относящиеся к функциям многих переменных, могут быть использованы и уже используются в смежных областях; так, теорема о сложении индикаторов целых функций многих переменных нашла применение в теории уравнений типа свертки, теорема о равномерном распределении значений голоморфных отображений в банахово пространство используется в аналитической теории вероятностей, а теоремы о плюриполярных множествах в сопряженных банаховых пространствах позволяют доказывать новые теоремы о геометрических свойствах этих пространств.

Содержание работы. Первая глава диссертации посвящена изучению асимптотики функций класса \mathfrak{F} . В § 1.1 для удобства чтения собраны общие сведения об исключительных множествах в конечномерных пространствах. Новым здесь является пример п.1.1.7 кривой $z(t): [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^2$

и ПСГ функции $\Phi(z)$ в \mathbb{C}^2 таких, что $\Phi(z(t)) \equiv -\infty$ при $0 < t \leq 1$ и $\Phi(z(0)) \neq -\infty$. Этот пример опровергает гипотезу В.С. Владимирова (1964). В §1.2 доказываются две вспомогательные леммы о последовательностях ПСГ функций в \mathbb{C}^m , которые используются при доказательстве основных теорем главы. В §1.3 доказываются теоремы о нижнем порядке, типе, классе сходимости функций $\Phi(z, t) \in \mathfrak{F}$ по переменной t .

Теорема п.1.3.7. Для всех неплюриполярных компактов $K \subset \mathbb{C}^m$ нижний порядок по переменной t величины $\sup\{\Phi(z, t) : z \in K\}$ равен одному и тому же числу $\lambda \in [0, \infty]$. Если еще порядок по переменной z

$$\tau = \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\log \Phi^+(z, 1)}{\log |z|} < \infty,$$

то при каждом фиксированном $z \in \mathbb{C}^m$, кроме, быть может, точек из некоторого плюриполярного множества, нижний порядок по переменной t функции $\Phi(z, t)$ равен тому же λ .

Теорема п.1.3.10. Если тип функции $\Phi(z, t)$ при порядке ρ по переменной t конечен в точках некоторого неплюриполярного множества, а порядок по совокупности переменных

$$\kappa = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \sup\{\Phi(z, t) : |z| \leq t\}}{\log t} < \infty,$$

то тип функции $\sup\{\Phi(z, t) : |z| \leq r\}$ по переменной t при порядке ρ при любом $r \geq 1$ не превосходит величины $Kr^{\kappa - \rho}$.

Теорема п.1.3.13. Если у функции $\Phi(z, t)$ порядок τ по переменной z конечен, то сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \Phi(z, t) t^{-\rho-1} dt$$

в точках z из некоторого неплюриполярного множества влечет его сходимость при всех $z \in \mathbb{C}^m$, а также сходимость интегралов вида (1) для любых компактов K .

Следствие п.1.3.17. Пусть $f(z, w)$ - мероморфная функция в пространстве $\mathbb{C}_{(z)}^m \times \mathbb{C}_{(w)}^1$ конечного порядка по переменной z , а $\lambda_n(z; a)$ - решения уравнения $f(z, w) = a$ при фиксированном z . Тогда сходимость ряда

$$\sum_n |\lambda_n(z; a)|^{-\rho}$$

в точках z из некоторого неплуриполярного множества влечет его сходимости при всех $z \in \mathbb{C}^m$ таких, что $f(z, w) \neq a$.

Получить обобщение теоремы Сибони и Вонга на произвольные функции класса \mathfrak{F} , по-видимому, нельзя: существуют, например, целые функции $f(z, w)$, $z, w \in \mathbb{C}$, для которых при $r < 1$ и $t \rightarrow \infty$

$$\max\{\log |f(z, w)| : |z| \leq r, |w| \leq t\} = o(\max\{\log |f(z, w)| : |z| \leq 1, |w| \leq t\}).$$

В § 1.4 рассматривается подкласс \mathfrak{F}_0 класса \mathfrak{F} , состоящий из тех функций \mathfrak{F} , для которых при некотором $\alpha \geq 0$ конечна величина

$$A(\mathfrak{F}, \alpha) = \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \mathfrak{F}(z, |z|^{-\alpha}) (\log |z|)^{-1}.$$

Для таких функций в диссертации доказывается следующая теорема.

Теорема п.1.4.4. Для любого неплуриполярного компакта $K \subset \mathbb{C}^m$ существует зависящая только от него константа $\gamma > \infty$ такая, что для любой $\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}_0$, любых $s < \infty$ и $t > 0$

$$\sup\{\mathfrak{F}(z, \theta t) : |z| \leq s\} \leq \sup\{\mathfrak{F}(z, t) : z \in E\} + (\gamma + \log s) \max\{A(\mathfrak{F}, \alpha); 0\}, \quad (4)$$

где $\theta = (se^\gamma)^{-\alpha}$.

Отсюда легко следует неравенство Сибони и Вонга для любого неплуриполярного множества $E \subset \mathbb{C}^{m-1}$.

Отметим некоторые применения этой теоремы. Пусть $f(z, w)$ целая функция вида

$$f(z, w) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z) w^k,$$

причем $b_0 \neq 0$, а полиномы $b_k(z)$, $z \in \mathbb{C}^m$, для всех $|z| \geq r_0$ и всех k допускают при некотором $N < \infty$ оценку вида

$$|b_k(z)| \leq |z|^{kN}.$$

Тогда

$$\sup\{|f(z, w)| : |z| \leq s, |w| \leq \theta t\} \leq \sup\{|f(z, w)| : z \in E, |w| \leq t\},$$

где E, s, t, θ такие же, как и в (4), и

$$\sup\{N(\theta t, z) : |z| \leq s\} \leq \sup\{N(t, z) : z \in E\}.$$

Здесь $N(t, z) = \int_0^t n(s, z) s^{-1} ds$, а $n(s, z)$ - число решений при фиксированном z уравнения $f(z, w) = 0$ в круге $|w| \leq s$.

Если для функции $\Phi \in \mathfrak{F}$ выполнено условие $A(\Phi, 0) < \infty$, то из (4) легко следует, что для любого $t > 0$

$$|\sup\{\Phi(z, t) : z \in E\} - m(t; \Phi)| \leq \gamma' A(\Phi, 0),$$

где через $m(t; \Phi)$ обозначен $\sup\{\Phi(z, t) : |z| \leq 1\}$, а константа γ' зависит только от компакта E . Впрочем, здесь справедлив более точный результат.

Теорема п. 1.4.14. Если для $\Phi \in \mathfrak{F}$ $A(\Phi, 0) < \infty$, то вне точек z из некоторого плярного множества при любом $\delta > 1/2$ и $t \rightarrow \infty$

$$\Phi(z, t) = m(t; \Phi) + o(m^\delta(t; \Phi)).$$

Применяя эту теорему к функции

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \sum_{n=1}^m z_n f_n(t e^{i\theta}) \right| d\theta,$$

где $f_n(z)$ - целые функции в \mathbb{C} , получаем новое, более простое доказательство теоремы о равномерном распределении значений для целых кривых.

Во второй главе рассматриваются вопросы, связанные с асимптотикой ФВРР. В §§ 2.1 и 2.2 для удобства чтения собраны необходимые сведения из теории потенциала и из теории предельных множеств субгармонических функций. В § 2.3 доказываются вспомогательные

утверждения о последовательностях субгармонических функций. В частности, здесь доказывается, что сходимость по емкости равномерно ограниченной последовательности потенциалов Грина эквивалентна их сходимости по энергетической норме.

Эти результаты используются в § 2.4, где описывается, каким может быть множество E в определении (3) ФВРР. В п.2.4.2 отмечается, что для любой ФВРР $v(x)$ в \mathbb{R}^n и любой положительной и монотонной на $(0, \infty)$ функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \varphi(t) t^{1-m} dt < \infty,$$

множество E в (3) можно выбрать так, что оно покрывается шарами $B(x_n, r_n)$, для которых

$$n: |x_n| < R \quad \varphi(r_n/R) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty.$$

Это несколько уточняет результат В.С. Азарина. Доказывается также, что в случае гармоничности индикатора $h_j^*(x)$ множество E можно выбрать нулевой относительной емкости, т.е. таким, что при $r \rightarrow \infty$

$$\text{Cap}(E \cap B(r)) = o(\text{Cap} B(r))$$

(где Cap обозначает винеровскую при $m > 2$ или логарифмическую при $m=2$ емкость множества). Интересно, что для целой функции на плоскости с негармоническим индикатором это всегда не так. Это следует из п.2.4.3, где доказывается, что для любой такой функции $f(z)$ уточненного порядка $\rho(t)$ множество

$$\{z \in \mathbb{C}: \log |f(z)| < -N |z|^{\rho(|z|)}\}$$

имеет положительную относительную емкость при любом $N < \infty$.

Константу N здесь нельзя заменить на сколь угодно медленно растущую функцию:

Теорема п.2.4.5. Пусть $v(x)$ произвольная субгармоническая функция в \mathbb{R}^n нормального типа при уточненном порядке $\rho(t)$. Если для какого-нибудь неограниченного борелевского множества E

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty, x \in E} |x|^{-\rho(|x|)} v(x) = -\infty,$$

то множество E имеет нулевую относительную емкость.

Эта оценка множества E близка к точной:

Теорема п. 2.4.7. Для любого неограниченного замкнутого множества E нулевой относительной емкости найдется субгармоническая функция $v(x)$, имеющая любой наперед заданный (нецелый) порядок ρ и индикатор $h_v^*(x)$ при этом порядке, для которой

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty, x \in E} |x|^{-\rho} v(x) = -\infty^{\dagger}.$$

В п. 2.5.2 строится пример субгармонической ФВРР v в $\mathbb{R}^n, n > 2$, у которой для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$

$$t^{-\rho} v(tx) \rightarrow -\infty \text{ при } t \rightarrow \infty$$

по множеству $E_{x,c}(0, \infty)$ относительной меры $1/2$. Таким образом, прямое перенесение определения ВРР на луче с плоскости на случай пространства большей размерности не является естественным.

Отметим также, что для целой функции в \mathbb{C}^n вполне регулярный рост ее логарифма модуля может быть даже в том случае, когда его нет на почти всех комплексных плоскостях, проходящих через начало координат. Это показывает пример п. 2.6.2.

Из теории В. С. Азарина предельных множеств субгармонических функций легко следует, что если функция $v(x)$ имеет ВРР при уточненном порядке $\rho(t)$, а функция $u(x)$ нормального типа при этом уточненном порядке, то

$$h_{v+u}^*(x) = h_v^*(x) + h_u^*(x). \quad (5)$$

Если же $v(x)$ не является ФВРР, то найдется луч $\{tx^0: t > 0\}$,

[†] После опубликования теорем этого параграфа В. Я. Эйдерман (1988) в терминах мер Карлесона дал точное описание исключительных множеств понижения роста.

$x^0 \in S^{m-1}$, в сколь угодно малой окрестности которого функция v растет нерегулярно. В п. 2.5.10 доказывается, что в этом случае найдется последовательность шаров $B(t_n x^0, \delta t_n)$, в точках которых

$$v(x) |x|^{-\rho(|x|)} < h_v^*(x^0) - \varepsilon.$$

Затем в п. 2.5.12 строится субгармоническая функция $u(x)$, для которой вне этих шаров

$$u(x) |x|^{-\rho(|x|)} < h_u^*(x^0) - \varepsilon'.$$

Таким образом, для функций u, v равенство (5) нарушается. Эти результаты обобщают соответствующие леммы В. С. Азарина (1966) о субгармонических функциях в \mathbb{R}^2 .

Если $f(z), g(z)$ целые функции в \mathbb{C}^m и субгармоническая функция $\log|f|$ есть ФВРР в \mathbb{R}^{2m} , то из (5) следует

$$h_{\log|fg|}^*(z) = h_{\log|f|}^*(z) + h_{\log|g|}^*(z).$$

Верно также и обратное утверждение, а именно, если такое равенство выполняется для любой целой функции g того же уточненного порядка, что и f , то функция $\log|f|$ имеет ВРР. Это доказывается по той же схеме, что и для субгармонических функций. Однако построение целой функции в \mathbb{C}^m , которая вне объединения шаров растет медленнее своего индикатора, существенно сложнее; оно проводится в п. 2.7.2.

В третьей главе рассматривается асимптотика голоморфных отображений пространства \mathbb{C}^k (либо шара $B(R) \subset \mathbb{C}^k$) в произвольное банахово пространство X .

В § 3.1 вводятся и изучаются ПСГ функции и порождаемые ими ПП множества в пространстве X^* . Доказанные здесь результаты представляют, на наш взгляд, самостоятельный интерес, а также используются в следующих параграфах.

ПСГ функция в X^* определяется как отображение $P: X^* \rightarrow [-\infty, +\infty)$, сужение которого на любую комплексную прямую $\{g_1 + \omega g_2: \omega \in \mathbb{C}\}$, $g_1, g_2 \in X^*$, является субгармонической функцией переменного ω , а сужение на любой шар в X^* является полунепрерывной сверху функцией в слабой* топологии пространства X^* . В случае сепарабельного X последнее условие означает, что для любой последовательности $g_n \in X^*$,

слабо* сходящейся к элементу g_0 .

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(g_n) \leq P(g_0).$$

Множество $E \subset X^*$ называется плюриполярным, если $E \subset \{g \in X^* : P(g) = -\infty\}$ для некоторой ПСГ в X^* функции $P(g) \neq -\infty$.

Примером ПСГ функции может служить функция $P(g) = \log |(g, x) + c|$ для фиксированных $x \in X$, $c \in \mathbb{C}$, или функция

$$P(g) = \mathfrak{M}(t; \log |(g, f)|),$$

где f - голоморфное отображение шара $B(R) \subset \mathbb{C}^m$ в X , $t < R$, а через $\mathfrak{M}(t; \Psi)$ обозначено усреднение функции Ψ по сфере $\{z \in \mathbb{C}^m : |z| = t\}$. Примером ПП множества является гиперплоскость в X^* , а также подпространство l^p в пространстве l^q при любых $1 \leq p < q \leq \infty$. Отметим, что, как доказывается в п. 3.1.17, пространство Банаха c_0 не является ПП подмножеством в l^∞ .

Свойства ПСГ функций и ПП множеств в сопряженном банаховом пространстве близки к соответствующим свойствам в конечномерном пространстве. Приведем здесь некоторые из них.

Теорема п. 3.1.9. Если E - выпуклое ограниченное слабо* замкнутое множество в X^* , то ПСГ функция $P(g)$ достигает своего максимума на E в его s -крайней точке.

Теорема п. 3.1.20. Счетное объединение ПП множеств также является ПП множеством.

Теорема п. 3.1.22. Если E выпуклое ПП множество, то натянутое на него линейное многообразие также является ПП множеством.

ПП множества связаны с нормирующими подмножествами в X^* :

Теорема п. 3.1.25. Если E не является ПП множеством в X^* , то для любого $A \subset X$ из ограниченности всех множеств вида $\{(g, x) : x \in A\}$, $g \in E$, следует ограниченность A по норме в X .

Отсюда, в частности, следует, что множество s -крайних точек единичного шара в X^* является нормирующим[†].

Теорема п. 3.1.27. Если f - отображение области $D \subset \mathbb{C}^m$ в банахово

[†] В. П. Фонфу (1989) принадлежит точное описание банаховых пространств, где нормирующим является множество крайних точек шара.

пространство X и (g, f) есть голоморфная функция в D для неплюриполярного набора функционалов из X^* , то f голоморфное отображение из D в X .

В частности, если ряд из модулей комплекснозначных функций сходится во всех точках из D и сумма $\sum_n \lambda_n f_n(z)$ голоморфна в D для каждой последовательности (λ_n) из некоторого неплюриполярного подмножества в l^∞ , то и все функции f_n голоморфны в D .

В § 3.2 доказывается новое неравенство типа обратных неравенств Хинчина, которое используется в следующих разделах.

Теорема п. 3.2.1. Для любой последовательности $(a_n) \in l^2$

$$\log \| (a_n) \|_{l^2} - \log 2 \leq \int \log \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\varphi_n} \right| \mu(d\varphi) \leq \log \| (a_n) \|_{l^2}, \quad (6)$$

где мера μ равна бесконечному произведению мер $d\varphi/(2\pi)$ на $(0, 2\pi)^{\mathbb{N}}$.

В § 3.3 вводятся и изучаются величины, характеризующие рост голоморфного отображения f шара $B(R) \subset \mathbb{C}^m$, $R \leq \infty$, в банахово пространство X . Это прежде всего функция

$$T(t, f) = \mathfrak{M}(t; \log \|f\|),$$

которую естественно назвать неванлинновской характеристикой отображения f , а также функция

$$\tilde{T}(t, f) = \sup \{ \mathfrak{M}(t; \log |(g, f)|) : \|g\| \leq 1 \}.$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{T}(t, f) \leq T(t, f)$. Кроме того, в случае $X = l^1$ рассматривается еще функция

$$T_2(t, f) = \mathfrak{M}(t; (1/2) \log \sum_n |f_n|^2).$$

* Эта теорема была опубликована автором в работе [8]; годом позже Д. Ульрих дал независимое доказательство этого неравенства.

где $f_n(z)$ координаты отображения f в естественном базисе. Как отмечается в п. 3.3.4,

$$T_2(t, f) \leq \hat{T}(t, f) + \log 2.$$

Пусть, например, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ - степенной ряд в круге $B(R) \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим отображение $f: B(R) \rightarrow l^p$ вида $f: z \rightarrow (c_n z^n)_{n=0}^{\infty}$. В этом случае

$$T(t, f) = (1/p) \log \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p t^{pn},$$

При $p=2$ для такого отображения, как показывается в п. 3.3.3,

$$\hat{T}(t, f) = \log \max \{ |c_n| t^n : n \geq 0 \}.$$

При $p=1$ величина $\hat{T}(t, f)$ допускает простую оценку. Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема п. 3.3.5. Пусть f - голоморфное отображение шара $B(R) \subset \mathbb{C}^m$ в пространство l^1 вида

$$f: z \rightarrow (c_{k(n)} z^{k(n)}),$$

где $k(n)$, $n=1, 2, \dots$ - попарно различные мультииндексы. Тогда

$$\hat{T}(t, f) \leq T(t, f).$$

Как показывает пример п. 3.3.7, условие попарного различия мультииндексов снять нельзя.

По хорошо известной теореме Ф. Гриффитса и Дж. Кинга (1973), голоморфное отображение $f: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}P^k$, неванлинновская характеристика которого растет как $O(\log t)$, является рациональным. Его обобщением на банаховозначные голоморфные функции является следующий результат.

Теорема п. 3.3.12. Если для голоморфного отображения $f: \mathbb{C}^m \rightarrow X$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t, f) / (\log t) = \gamma < \infty,$$

то отображение f имеет вид

$$f(z) = e^{h(z)} P(z), \quad (7)$$

где $h(z)$ - скалярная целая функция, а $P(z)$ - полином переменной $z \in \mathbb{C}^m$ с коэффициентами из X степени не выше γ .

Основным результатом § 3.3 является следующая теорема.

Теорема п. 3.3.17. Для голоморфного отображения $f: B(R) \rightarrow X$, $R < \infty$, выполняется неравенство

$$T(t, f) \leq \hat{T}(t, f) + Q(t, f),$$

где остаточный член $Q(t, f)$ допускает ту же оценку, что и во второй основной теореме для целых кривых.

Конечность порядка отображения f означает здесь, что

$$\log T(t, f) = O(\log t) \text{ при } R = \infty \text{ и } \log T(t, f) = O(\log(R-t)^{-1}) \text{ при } R < \infty.$$

В п. 3.3.11 строится пример отображения $f: \mathbb{C} \rightarrow l^1$, показывающий, что в общем случае исключительное множество значений t в оценке остаточного члена $Q(t, f)$ существенно.

В качестве следствия из теоремы п. 3.3.17 получается классическая теорема Вимана - Валирона о связи максимального члена степенного ряда с максимумом модуля этого ряда на окружности.

Теорема п. 3.3.17 имеет смысл только для отображений в бесконечномерное пространство: в п. 3.3.25 доказывается, что если размерность линейной оболочки образа отображения f конечна, то остаточный член $Q(t, f)$ ограничен при $t \rightarrow R$.

В § 3.4 для голоморфного отображения $f: B(R) \rightarrow X$ рассматривается асимптотическое поведение дивизоров скалярных голоморфных функций $(g, f)(z)$, где g - функционал из X^* . Поведение дивизора описывается его считающей функцией $N(t, (g, f))$, которую можно определить, например, равенством

$$N(t, (g, f)) = m \left[1; \int_0^t [n_z(s) - n_z(0)] s^{-1} ds + n_z(0) \log t \right],$$

где усреднение берется по переменной $z \in S^{2m-1}$, а $n_s(s)$ означает число корней (с учетом кратности) функции $(g, f)(wz)$ переменного $w \in \mathbb{C}$ в круге $|w| \leq s$ (в случае $m=1$ усреднение, очевидно, можно опустить). Отметим здесь, что, как следует из формулы Иенсена, для любого $g \in X^*$ при условии $(g, f)(z) \neq 0$

$$N(t, (g, f)) \leq \hat{T}(t, f) + O(1) \quad (t \rightarrow R).$$

Основным результатом этого параграфа является обобщение на голоморфные отображения в банахово пространство теоремы Альфорса о равномерном распределении значений мероморфных функций.

Теорема. Для голоморфного отображения f шара $B(R) \subset \mathbb{C}^m$, $R < \infty$, в банахово пространство X с неограниченной при $t \rightarrow R$ характеристикой $T(t, f)$ для каждого $\alpha > (1/2)$ и каждого $g \in X^*$ вне некоторого III множества при $t \rightarrow R$

$$N(t, (g, f)) = \hat{T}(t, f) + o(\hat{T}^\alpha(t, f)).$$

Если отображение f имеет конечный порядок, то при тех же α и g

$$N(t, (g, f)) = T(t, f) + o(T^\alpha(t, f) \log(R-t)) \quad R < \infty,$$

$$N(t, (g, f)) = T(t, f) + o(T^\alpha(t, f) \log t) \quad R = \infty,$$

$$N(t, (g, f)) = T(t, f) + o(T(t, f)) \quad R = \infty,$$

Если отображение f имеет бесконечный порядок, то эти соотношения выполняются вне исключительного множества значений t . При $R = \infty$ вне множества значений t нулевой логарифмической меры

$$N(t, (g, f)) = T(t, f) + o(T^\alpha(t, f)).$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что для любых функционалов g, g' вне некоторого III множества при $t \rightarrow R$

$$N(t, (g, f)) / N(t, (g', f)) \rightarrow 1, \quad N(t, (g, f)) / \hat{T}(t, f) \rightarrow 1.$$

В п. 3.4.2 для функции $N(t, (g, f))$ получено также соотношение типа классической формулы Картана для мероморфных функций. Для отображения $f = (f_n): B(R) \rightarrow l^1$ оно имеет вид

$$T_2(t, f) = \int N(t, \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\varphi_n} f_n \right)) \mu(d\varphi) + (1/2) \log \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(0)|^2 + \beta(t, f),$$

где $|\beta(t, f)| < \log 2$, а μ - та же мера, что и в неравенстве (6).

Это соотношение является новым и для голоморфных кривых, т.е. когда $f_n \equiv 0$ для $n > p$.

В § 3.5 рассматриваются некоторые приложения полученных результатов.

Пусть $F(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} a_k z^k$ голоморфная функция в шаре $B(R) \subset \mathbb{C}^m$, $R < \infty$, для которой величина $\mathfrak{M}(t; \log \sum_R |a_k| |z^k|)$ неограничена при $t \rightarrow R$. Для ограниченной последовательности $\lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}_+^m}$ положим

$$F_\lambda(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^m} \lambda_k a_k z^k.$$

Очевидно, $F_\lambda(z) = (g, f)(z)$ для голоморфного отображения $f = (a_k z^k)$ из $B(R)$ в l^1 и функционала $g \in l^\infty$, отвечающего последовательности λ . Поэтому из результатов предыдущих параграфов следует асимптотическое соотношение для считающей функции дивизора $F_\lambda(z) = 0$:

Теорема п. 3.5.2. Для каждого $\alpha > 1/2$ и каждого $\lambda \in l^\infty$, не лежащем в некотором III множестве E таким, что

$$\mu(\varphi = (\varphi^k): (e^{i\varphi_k}) \in E) = 0,$$

при $t \rightarrow R$ выполняется соотношение

$$N(t, F_\lambda) = (1/2) \mathfrak{M}(t; \log \sum_R |a_k|^2 |z^{2k}|) + o(\mathfrak{M}^\alpha(t; \log \sum_R |a_k|^2 |z^{2k}|)).$$

В случае $m=1$ это соотношение принимает более простой вид

$$N(t, F_\lambda) = (1/2) \log \left(\sum_k |a_k|^2 t^{2k} \right) + o(\log \left(\sum_k |a_k|^2 t^{2k} \right)).$$

Используя другие формы теоремы о равномерном распределении значений, можно получить другие формы этих соотношений; все их можно рассматривать как обобщения классических теорем Литтлвуда - Оффорда (1949) на голоморфные в шаре или многомерном пространстве функции со случайными коэффициентами без ограничений на порядок их роста.

Хорошо известно, что мероморфная в плоскости функция $F(z)$, для которой уравнение $F(z)=a$ имеет конечное число решений для трех значений a , является отношением двух полиномов. Ее обобщение на голоморфные отображения $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^k$ выглядит следующим образом: если уравнение $\langle F, A \rangle(z) = 0$ имеет конечное число решений для $k+1$ векторов A_j , из которых любые k линейно независимы, то компоненты $F(z)$ после деления на общую функцию без нулей являются полиномами. Для голоморфных отображений плоскости в банахово пространство подобное утверждение места не имеет. Например, для отображения

$$f = (1, z/1!, z^2/2!, \dots): \mathbb{C} \rightarrow l^1$$

целая функция (g, f) не обращается в нуль для функционалов вида $(1, w, w^2, w^3, \dots) \in l^\infty$, $w \in \mathbb{C}$, при любом $|w| \leq 1$.

В п. 3.5.4 доказывается следующий результат.

Теорема. Пусть $f: \mathbb{C}^m \rightarrow X$ - голоморфное отображение, и пусть для всех функционалов g из некоторого неплюриполярного множества дивизоры $(g, f) = 0$ являются алгебраическими. Тогда отображение f имеет вид (7).

Следующее приложение теоремы о равномерном распределении значений голоморфных отображений в банахово пространство связано с так называемыми неванлинновскими классами функций.

Теорема п. 3.5.8. Пусть f - голоморфное отображение круга $B(R) \subset \mathbb{C}$, $R < \infty$, в банахово пространство X , и пусть для функционалов $g \in X^*$ из некоторого неплюриполярного множества нули функции $(g, f)(z)$ удовлетворяют условию Бляшке. Тогда это верно при всех $g \in X^*$, при этом найдется голоморфная в круге $B(R)$ функция $h(z)$ такая, что норма отображения $f_1(z) = e^{h(z)} f(z)$ ограничена в этом круге.

Эту теорему можно рассматривать как обобщение классической теоремы Фростмана о множествах исключительных значений функций

неограниченного вида.

Несколько более слабое утверждение получено также для голоморфных отображений из шара $B(R) \subset \mathbb{C}^m$.

Еще одно применение теории распределения значений голоморфных отображений в банахово пространство связано с функциональными рядами.

Прежде всего отметим, что, как показано в п. 3.5.10, асимптотика целых функций $(g, f)(z)$ одинакова для большинства функционалов g . В частности, если для голоморфного отображения $f: \mathbb{C}^m \rightarrow X$ субгармоническая функция $\log \|f\|$ имеет ВРР при уточненном порядке $\rho(t)$ с индикатором $h^*(z)$, то для всех функционалов $g \in X^*$, кроме точек из некоторого ПП множества, целые функции $(g, f)(z)$ имеют ВРР при том же уточненном порядке с тем же индикатором.

Как показали А. А. Гольдберг и И. В. Островский (1982), для любых двух целых функций $f_1(z), f_2(z)$ ВРР при уточненном порядке $\rho(t)$ с индикаторами $h_1(z), h_2(z)$ найдется положительное $a > 0$ такое, что $f_1(z) + af_2(z)$ является ФВРР с индикатором $\max(h_1(z), h_2(z))$. Конечно, это нетривиально лишь в случае, когда индикаторы h_1 и h_2 совпадают на открытом множестве. Обобщение этого утверждения на конечное число функций трудностей не вызывает. Теорема п. 3.5.13 отвечает на поставленный А. А. Гольдбергом и И. В. Островским вопрос о возможности его обобщения на бесконечное число функций.

Теорема. Пусть $f_n(z), z \in \mathbb{C}^m, n = 1, 2, \dots$ целые ФВРР при одинаковом уточненном порядке $\rho(t)$, причем величина

$$H(z) = [\sup_n h_1^* \log |f_n|(z)]^*$$

локально ограничена сверху в \mathbb{C}^m . Тогда для некоторой последовательности $b_n > 0$ целая функция

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n(z)$$

имеет ВРР при том же уточненном порядке с индикатором $H(z)$.

Апробация работы и публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 11 работах. Список основных публикаций автора

приведен в конце автореферата.

Все результаты диссертации получены самостоятельно. Теорема п. 3.2.1 анонсирована в статье [8] автора, ее доказательство опубликовано в качестве одного из параграфов в совместной статье [10].

Результаты диссертации докладывались на семинарах по теории функций в Харьковском, Львовском, Московском университетах, Санкт-Петербургском и Башкирском отделениях института математики Российской АН. Отдельные результаты докладывались также на 6-ой конференции "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения" /г. Черногоровка, 1987/, на школе-семинаре "Комплексный анализ и математическая физика" /г. Красноярск, 1987/, на летней школе-семинаре по комплексному анализу /г. Ташкент, 1988/, на Всесоюзной конференции по теории вероятностей /г. Харьков, 1989/, на Всесоюзной математической школе "Теория потенциала" /г. Кацивели, 1991/, на Международной конференции по анализу и его приложениям /г. Ороно, США, 1992/.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 159 страницах и состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы (103 наименования).

Основные публикации автора:

1. Фаворов С. Ю. О сложении индикаторов целых и субгармонических функций многих переменных // Матем. сборник. - 1978. - т. 105, п. 1, с. 128-140.
2. Фаворов С. Ю. Об одном вопросе. В. С. Владимирова // Функциональный анализ и его приложения. - 1978. - т. 12, вып. 3, с. 90.
3. Фаворов С. Ю. О множествах понижения для субгармонических функций вполне регулярного роста // Сиб. мат. журнал. - 1979. - т. 20, п. 6, с. 1294-1302.
4. Фаворов С. Ю. О целых функциях вполне регулярного роста многих переменных // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - 1982. - вып. 38, с. 103-111.
5. Фаворов С. Ю. О росте пльрисубгармонических функций // Сиб. мат. журнал. - 1983. - т. 24, п. 1, с. 168-174.
6. Фаворов С. Ю. О множествах понижения роста для целых и субгармонических функций // Матем. заметки. - 1986. - т. 40, вып. 4, с. 460-467.
7. Фаворов С. Ю. Об одной теореме Сибони и Вонга. // Теория функ-

ций, функциональный анализ и их приложения. -1986. -вып. 46, с. 117-122.

8. Фаворов С. Ю. Распределение значений голоморфных отображений \mathbb{C}^n в банахово пространство. // Функциональный анализ и его приложения. - 1987. - т. 21, вып. 3, с. 91-92.

9. Фаворов С. Ю. Распределение значений голоморфных отображений конечномерного пространства в банахово // Сиб. мат. журнал. - 1990. - т. 31, п. 1, с. 161-171.

10. Горин Е. А., Фаворов С. Ю. Варианты неравенства Хинчина. // Исследования по теории функций многих вещественных переменных, - Ярославль, 1990. - с. 52-63.

11. Фаворов С. Ю. Плюрисубгармонические функции и плюриполярные множества в сопряженных банаховых пространствах // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - 1992. - вып. 57, с. 101-107.

Ответственный за выпуск А. Ю. Рашковский

Подписано к печати 27.04.93 Физ. п. л. 2

Уч.-изд. л. 2 Заказ № 63. Тираж 100 экз.

Ротапринт ФТИНТ АН Украины, Харьков 164, пр. Ленина 47.

1821.80

AB 27.863

AB 27.863