ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. І. ФРАНКА

На правах рукопису

П'ЯНА ВІРА ОЛЕКСІЇВНА

ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ ДЛЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА АЛГЕБРОЇДНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01. - математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1993

Роботу виконано на кафедрі математичного і функціонального аналізу Львівського державного університету ім. І. Франка

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор ГОЛЬДБЕРГ А. А.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор КОНДРАТЮК А. А.

кандидат фізико-математичних наук,
доцент МОХОНЬКО А. З.

Ведуча організація: Фізико-технічний інститут низьких температур АН України

Захист відбудеться "21" жовтня 1993 р. о 15^{30} год. на засіданні спеціалізованої вченої Ради К. 068. 12. 13 при Львівському держуніверситеті за адресою: 290000, Львів, вул. Університетська, І.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Львівського держуніверситету.

Автореферат розіслано "7" вересня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради МИКИТЮК Я. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В 1925 р. Р. Неванлінна опублікував основні теореми нової теорії мероморфних функцій - теорії розподілу значень, яка згодом дістала назву неванліннівської теорії. Вже через рік в 1926 році Р. Неванлінна[1] опублікував одне з найбільш ефектних застосувань теорії розподілу значень - нову теорему єдиності для мероморфних функцій (тут і скрізь далі під мероморфною функцією ми розуміємо функцію, мероморфну в скінченній площині) . Він встановив, що мероморфна функція однозначно визначається п'ятьма множинами її a_j-точок, $1 \le j \le 5$, тобто, якщо у двох мероморфних функцій множини a_j-точок однакові для п'ятьох значень $a_j \in \bar{\mathbb{C}}$, то ці мероморфні функції тотожньо рівні. Чотирьох значень не досить.

Півстоліття теорема єдиності Р. Неванлінни залишалася майже єдиним результатом в цьому напрямку, хоч епізодичні дослідження в цьому напрямку траплялися і в цей період. Ще в 1976 році Л. Альфорс[2] в ювілейній статті, присвяченій Р. Неванлінні, писав про теорему єдиності Неванлінни: "Варто уваги, що досі вона лишилася більш або менш ізольованим результатом". Але з того часу ситуація докорінно змінилася. Теореми єдиності типу теореми Неванлінни поширюються на більш широкі класи функцій і уточнюються для більш вузьких (Адамс, Страус, Пайзер, Гопалакрішна, Бхуснурматх, Хе Юдзянь, Гао Шіань та інші). В умовах єдиності в різних теоремах цих авторів

1. Nevanlinna R. Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen // Acta math. - 1926. - 48. - S. 367-391.

2. Ahlfors L. Das mathematische Schaffen Rolf Nevanlinnas // Ann. acad. sci. fenn., Ser. A1. - 1976. - 2. - S. 1-15.

виступають різні множини. Для них будемо вживати такі позначення. Через $E(\mathcal{A}, f) = \{ z \in \mathbb{C} : f(z) = \mathcal{A} \}$ позначатимемо множину $\mathcal{A}$-точок функції f (якщо f є алгебраїчною функцією, то $E(\mathcal{A}, f) = \{ z \in \overline{\mathbb{C}} : f(z) = \mathcal{A} \}$). Якщо будемо враховувати і порядки $\mathcal{A}$-точок, то одержимо мультимножину $\mathcal{M}E(\mathcal{A}, f)$. Через $E(\mathcal{A}, k, f)$, $k \in N \cup \{\infty\}$ позначатимемо множину тих $\mathcal{A}$-точок, порядки яких не перевищують k. Зокрема $E_1(\mathcal{A}, f) = E(\mathcal{A}, 1, f)$ - множина простих $\mathcal{A}$-точок, а $E(\mathcal{A}, \infty, f) = E(\mathcal{A}, f)$.

Є ще один напрямок в дослідженні теорем єдиності, який також походить від статті Р. Неванлінни. При збігу певних множин або мультимножин $\mathcal{A}$-точок для двох функцій не можна стверджувати, що вони тотожньо рівні, але виявляється, що вони пов'язані певними співвідношеннями. Цій темі присвячено в останні 20 років біля сотні статей (Гундерсен Г., Одзава М., Ян Чжун Чжунь, Хе Юдзянь, Гао Шіань, Мюс Е., Штейнмец Н. та ін.).

Мета роботи. Визначити, скількома множинами $E(\mathcal{A}, f)$ (або мультимножинами $\mathcal{M}E(\mathcal{A}, f)$, або множинами простих $\mathcal{A}$-точок $E_1(\mathcal{A}, f)$) однозначно визначається функція f, що належить одному з таких класів: 1) раціональні функції, 2) алгебраїчні функції, 3) мероморфні функції, 4) алгеброїдні функції, 5) многочлени, 6) цілі алгебраїчні функції, 7) цілі функції, 8) цілі алгеброїдні функції.

Показати, що одержані оцінки є точними. Це досягається побудовою відповідних прикладів.

Наукова новизна і теоретична цінність. Дисертація має теоретичний характер. Отримані в ній результати є новими.

Розв'язані названі вище задачі для класів алгебраїчних, цілих алгебраїчних, раціональних функцій та многочленів з врахуванням їхніх степенів.

Розв"язані вище вказані задачі для алгеброїдних та цілих алгеброїдних функцій.

Методика досліджень. При доведенні наведених в роботі результатів використовується апарат неванліннівської теорії розподілу значень мероморфних функцій та методи алгебри многочленів.

Апробація. Про результати дисертаційної роботи доповідалось на Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник проф. А. А. Гольдберг), на I-му республіканському семінарі по теорії цілих і субгармонійних функцій і її застосуваннях (м. Харків, 1990 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в статтях [1 - 3]. У статтях [2 - 3] , опублікованих у співавторстві з А. А. Гольдбергом, внески кожного із співавторів не можна розмежувати.

Структура й обсяг. Дисертація складається зі вступу і 8 параграфів, об'єднаних у три глави. Загальний обсяг роботи разом зі списком літератури (26 позицій) і змістом - 81 сторінка.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі подано короткий історичний огляд теми роботи, загальна її характеристика та виклад основних результатів.

Нехай $\mathcal{P}(z, w)$ - незвідний многочлен від z і w, $\deg_w \mathcal{P} = m \geq 1$, $\deg_z \mathcal{P} = n \geq 1$. Рівняння

$$\mathcal{P}(z, w) \equiv p_m(z) w^m + p_{m-1}(z) w^{m-1} + \dots + p_0(z) = 0, \quad (1)$$

$p_m(z) \not\equiv 0$, визначає m-значну алгебраїчну функцію $w = w(z)$, степеня n таку, що $\mathcal{P}(z, w(z)) \equiv 0$. Нехай $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$. Корінь рівняння $\mathcal{P}(z, \mathcal{A}) = 0$ називається $\mathcal{A}$-точкою алгебраїчної функції $w = w(z)$ такого ж порядку, як порядок нуля $\mathcal{P}(z, \mathcal{A})$. Якщо $\mathcal{A} = \infty$, то ∞-точками (або полюсами) функції $w = w(z)$ називаються корені рівняння $w^m \mathcal{P}(z, 1/w)|_{w=0} = 0$, або, що те ж саме, корені рівняння $p_m(z) = 0$.

Якщо $p_m(z) \equiv 1$, то алгебраїчну функцію, що визначається рівнянням (1), називатимемо цілою алгебраїчною функцією.

Якщо $m = 1$, то, очевидно, алгебраїчна функція є раціональною функцією, а ціла алгебраїчна функція є многочленом.

Нехай $\Psi(z, w) = p_m(z) w^m + \dots + p_1(z) w + p_0(z)$,

де $p_j(z)$ - цілі функції, $0 \leq j \leq m$, причому многочлен $\Psi(z, w)$ (як функція від w) незвідний над кільцем цілих функцій. Рівняння $\Psi(z, w) = 0$ визначає m-значну алгеброїдну функцію $w = w(z)$. Означення $\mathcal{A}$-точок та полюсів таке ж саме як для алгебраїчних функцій, але $\mathcal{A}$-точки та полюси розглядаються лише в $\mathbb{C}$. Якщо $n_m(z)=1$, то алгеброїдна функція, що визначається рівнянням $\psi(z,w)=0$, називається цілою алгеброїдною функцією. При $m=1$ алгеброїдна функція є мероморфною, а ціла алгеброїдна функція є цілою функцією.

У главі I доведено теореми єдиності для алгебраїчних та цілих алгебраїчних функцій з врахуванням множин та мультимножин a-точок.

Будемо позначати $\max\{a,b\}=a\vee b, \min\{a,b\}=a\wedge b, a,b\in\mathbb{R}$.

В §1.1 доводяться теореми єдиності для m-значних алгебраїчних функцій.

Теорема 1.1. Нехай w_ν - m-значна алгебраїчна функція степеня n_ν, $\nu=1,2$, $w_1\neq w_2$. Нехай

$E(a_j,w_1)=E(a_j,w_2)$, $a_j\in\overline{\mathbb{C}}$, $1\le j\le L$.

Тоді $L\le 3m+\left[m\dfrac{n_1\wedge n_2-2}{n_1\vee n_2}\right]$.

Наслідок 1.1. Нехай w_1 і w_2 - дві m-значні алгебраїчні функції степенів відповідно n_1 і n_2. Нехай

$$L(m,n_1,n_2)=3m+1+\left[m\frac{n_1\wedge n_2-2}{n_1\vee n_2}\right].$$

Якщо a_j, $1\le j\le L(m,n_1,n_2)$ - різні числа з $\overline{\mathbb{C}}$ і $E(a_j,w_1)=E(a_j,w_2)$ при $1\le j\le L(m,n_1,n_2)$, то $w_1(z)\equiv w_2(z)$, $n_1=n_2=n$, $L(m,n,n)=4m+1+\left[-\frac{2m}{n}\right]$.

Теорема 1.2. Нехай w_1 і w_2 - дві m-значні алгебраїчні функції степеня n, $a_1,\dots,a_{2m+1}$ - різні комплексні числа з $\overline{\mathbb{C}}$. Якщо $\mathcal{M}E(a_j,w_1)=$

$=\mathcal{M}E(a_j,w_2)$, $1\le j\le 2m$, $E(a_{2m+1},w_1)=E(a_{2m+1},w_2)$,

то $w_1(z)\equiv w_2(z)$.

В §1.1 побудований приклад, що показує точність цієї оцінки.

Теорема 1.3. Позначимо $(m\in\mathbb{N})$

$$\lambda(m,1)=2m+1,$$
$$\lambda(m,2)=2m+1,$$

$$\mathcal{R}(m,3) = 3m+1,$$

$$\mathcal{R}(m,n) = 4m+1+\left[-\frac{2m}{n}\right],\ n \geq 4.$$

Нехай W_1, W_2 - дві m-значні алгебраїчні функції степеня n, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{\mathcal{R}(m,n)}$ - різні числа з $\bar{\mathbb{C}}$. Якщо $E(\mathcal{A}_j, W_1) = E(\mathcal{A}_j, W_2)$ при $1 \leq j \leq \mathcal{R}(m,n)$, то $W_1(z) \equiv W_2(z)$.

Точність оцінки показана для $m=1$ і $n = 1, 2, 3j, 4j$, $j \in N$, для довільного m і $n = 1, 2, 3$.

В §1.2 доводяться аналогічні, як в §1.1, теореми єдиності для цілих m-значних алгебраїчних функцій.

Теорема 1.4. Нехай W_ν - ціла m-значна алгебраїчна функція степеня n_ν, $\nu = 1, 2$, $W_1 \neq W_2$. Нехай $\mathcal{A}_j$, $1 \leq j \leq L_1$ - різні числа з $\mathbb{C}$ і $E(\mathcal{A}_j, W_1) = E(\mathcal{A}_j, W_2)$. Тоді

$$L_1 \leq 3m-1+\left[(m-1)\frac{n_1 \wedge n_2 - 2}{n_1 \vee n_2} - \frac{1}{n_1 \vee n_2}\right].$$

Наслідок 1.2. Нехай W_1 і W_2 - дві цілі m-значні алгебраїчні функції степенів відповідно n_1 і n_2. Нехай

$$L_1(m, n_1, n_2) = 3m + \left[(m-1)\frac{n_1 \wedge n_2 - 2}{n_1 \vee n_2} - \frac{1}{n_1 \vee n_2}\right].$$

Якщо $\mathcal{A}_j$, $1 \leq j \leq L_1(m, n_1, n_2)$ - різні числа з $\mathbb{C}$ і $E(\mathcal{A}_j, W_1) = E(\mathcal{A}_j, W_2)$ при $1 \leq j \leq L_1(m, n_1, n_2)$, то $W_1(z) \equiv W_2(z)$, $n_1 = n_2 = n$,

$$L_1(m, n, n) = 4m-1+\left[-\frac{2m-1}{n}\right].$$

Теорема 1.5. Нехай W_1 і W_2 -дві цілі m-значні алгебраїчні функції степеня n, $\mathcal{A}_j$, $1 \leq j \leq 2m$ - різні числа з $\mathbb{C}$. Якщо $\mathcal{M}E(\mathcal{A}_j, W_1) = \mathcal{M}E(\mathcal{A}_j, W_2)$,

$1 \leq j \leq 2m-1$, $E(\mathcal{A}_{2m}, W_1) = E(\mathcal{A}_{2m}, W_2)$, то $w_1(z) \equiv w_2(z)$.

Показано точність цієї оцінки.

Теорема 1.6. Позначимо

$$\varkappa_1(m, 1) = 2m,$$

$$\varkappa_1(m, 2) = 2m,$$

$$\varkappa_1(m, n) = 4m - 1 + [-(2m-1)/n],\ n \geq 3.$$

Нехай w_1 і w_2 - дві цілі m-значні алгебраїчні функції степеня n, $a_1, \ldots, a_{\varkappa_1(m,n)}$ - різні числа з $\mathbb{C}$. Якщо $E(a_j, w_1) = E(a_j, w_2)$ при $1 \leq j \leq \varkappa_1(m, n)$, то $w_1(z) \equiv w_2(z)$.

Точність оцінки показана для довільного m і $n = 1, 2$, для $m = 1$ і довільного n.

В главі II виводяться теореми единості для алгебраїчних функцій, в яких умови накладаються на множини $E(a, k, f)$.

В §§2.1 - 2.2 доводяться теореми единості для m - значних алгебраїчних функцій (в §2.2 для $m = 1$).

Теорема 2.1. Нехай w_ν - m-значна алгебраїчна функція степеня n_ν, $\nu = 1, 2$, $w_1 \neq w_2$. Нехай

$$E(a_j, k_j, w_1) = E(a_j, k_j, w_2), \quad k_j \in N,$$

$a_j \in \overline{\mathbb{C}}$, $1 \leq j \leq q$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j+1} \leq 2m - \frac{2m}{n_1 \vee n_2} + \frac{km}{k+1}\left(1 + \frac{n_1 \wedge n_2}{n_1 \vee n_2}\right),$$

де $k = k_1 \vee \ldots \vee k_q$. У випадку, коли $k_1 = \ldots = k_q = 1$, $m \geq 2$, $n_1 \wedge n_2 = 1$, $n_1 \vee n_2 = 2$, виконується $q \leq 3m$.

Наслідок 2.1. Нехай w_ν - m-значна алгебраїчна функція степеня n, $\nu = 1, 2$, $q(m, 1) = 2m + 1$,

$$q(m, 2) = 4m + 1,\ q(m, 3) = 6m + 1 + [-4m/3],$$

$$q(m, 4) = 5m + 1,\ q(m, n) = 6m + 1 + [-4m/3]$$

при $n \geq 5$. Якщо a_j, $1 \leq j \leq q(m, n)$ - різні числа з $\overline{\mathbb{C}}$ і $E_3(a_j, w_1) = E_3(a_j, w_2)$ при $1 \leq j \leq q(m, n)$, то $w_1 = w_2$.

Показано точність цієї оцінки для довільного m і $n = 1, 2, 4$.

У випадку $m=1$ (раціональні функції) доведено наступну теорему.

Теорема 2.2. Нехай R_1 і R_2 - дві раціональні функції $\deg R_1 = \deg R_2 = n \geqslant 1$. Нехай $q(1)=3$, $q(2)=q(3)=5$, $q(n)=6$ при $n \geqslant 4$. Якщо $a_1, \ldots, a_{q(n)}$ - різні числа з $\overline{\mathbb{C}}$ і

$E_1(a_j, R_1) = E_1(a_j, R_2)$ при $1 \leq j \leq q(n)$, то $R_1 = R_2$.

Точність оцінки показано при $n = 1, 3$, а також при всіх парних n.

В §2.3 наступна теорема для цілих m-значних алгебраїчних функцій є аналогом теореми 2.1.

Теорема 2.3. Нехай w_ν - ціла m-значна алгебраїчна функція степеня n_ν, $\nu = 1, 2$, $w_1 \neq w_2$. Нехай

$E(a_j, k_j, w_1) = E(a_j, k_j, w_2)$, $1 \leq j \leq q$,

$a_j \in \mathbb{C}$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j+1} \leq 2m-1-\frac{2m-1}{n_1 \vee n_2} + \frac{k}{k+1}\left(m+(m-1)\frac{n_1 \wedge n_2}{n_1 \vee n_2}\right),$$

де $k = k_1 \vee \ldots \vee k_q$. У випадку, коли $k_1 = \ldots = k_q = 1$, $m \geqslant 2$, $n_1 \wedge n_2 = 1$, $n_1 \vee n_2 = 2$, виконується $q \leq 3m-1$.

Наслідок 2.2. Нехай w_1 і w_2 - дві цілі m-значні алгебраїчні функції степеня n. Нехай

$$q_1(m,n) = 6m-2 + [-2(2m-1)/n].$$

Якщо a_j, $1 \leq j \leq q_1(m,n)$ - різні числа з $\mathbb{C}$ і $E_1(a_j, w_1) = E_1(a_j, w_2)$ при $1 \leq j \leq q_1(m,n)$, то $w_1 = w_2$.

Точність цієї оцінки показано для довільного m і $n=1$.

§2.4 присвячено теоремам єдиності для многочленів.

Теорема 2.4. Нехай P_1 і P_2 - два многочлени. Якщо a_1, a_2, a_3 - три різних числа з $\mathbb{C}$ і

$E_s(\mathcal{A}_j, \mathcal{P}_1) = E_s(\mathcal{A}_j, \mathcal{P}_2)$, $j = 1, 2, 3$, то $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

Показано точність цієї оцінки.

Теорема 2.5. Нехай $\mathcal{P}_1$ і $\mathcal{P}_2$ - два многочлени, $\deg \mathcal{P}_1 = \deg \mathcal{P}_2 \geq 1$. Якщо $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$, всі $\mathcal{A}_j$-точки $\mathcal{P}_\nu$ або прості, або мають парні порядки, $j = 1, 2$, $\nu = 1, 2$, і $E_s(\mathcal{A}_j, \mathcal{P}_1) = E_s(\mathcal{A}_j, \mathcal{P}_2)$, $j = 1, 2$, то $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

Теорема 2.6. Нехай $\mathcal{P}_1$ і $\mathcal{P}_2$ - два многочлени, $\deg \mathcal{P}_1 = \deg \mathcal{P}_2 = n \leq 5$. Якщо $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$, і $E_s(\mathcal{A}_j, \mathcal{P}_1) = E_s(\mathcal{A}_j, \mathcal{P}_2)$, $j = 1, 2$, то $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

Глава III присвячена теоремам єдиності для алгеброїдних функцій.

В §§3.1 - 3.2 доводяться теореми єдиності для алгеброїдних та цілих алгеброїдних функцій з врахуванням множин $E(\mathcal{A}, k, f)$.

Теорема 3.1. Нехай w_1 і w_2 - m-значні алгеброїдні функції $w_1 \neq w_2$, і $E(\mathcal{A}_j, k_j, w_1) = E(\mathcal{A}_j, k_j, w_2)$, $k_j \in N \cup \{\infty\}$, $\mathcal{A}_j \in \overline{\mathbb{C}}$, $1 \leq j \leq q$, $k = \max\{k_j : 1 \leq j \leq q\}$.

Тоді
$$\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j+1} \leq 2m \frac{2k+1}{k+1} .$$

Теорема 3.1 для $m=1$ доведена в статті Гопалакрішни і Бхуснурматха[1].

Наслідок 3.1. Нехай w_1 і w_2 - m-значні алгебро-

1. Gopalakrishna H. S., Bhoosnurmath S.S. Uniqueness theorems for meromorphic functions // Math. Scand. - 1976. - 39. - P. 125-130.

їдні функції, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $q_k(m) = 4m + 1 + [2m/k]$.

Якщо $E(a_j, k, w_1) = E(a_j, k, w_2)$, $a_j \in \bar{\mathbb{C}}$, $1 \le j \le q_k(m)$, то $w_1 = w_2$.

При $k = \infty$ – це відомий результат Ж. Валірона[1].

При $m = 1$ і $k = \infty$ – це класична теорема Р. Неванлінни. При $m = 1$ і $k \in \mathbb{N}$ – теорема була доведена Сюн Цзінлаєм[2] і Ян Ле[3]. Точність $q_k(1)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$

---

1. Valiron G. Sur la dérivée des fonctions algébroides // Bull. Soc. math. France.- 1931.- 59.- P. 17-39.

2. Hiong King-lai. Un problème d'unicité relatif aux fonctions méromorphes // Scientia sinica.- 1963.- 12, № 6.- P. 743-750.

3. Ян Лэ. Кратные значения мероморфных функций и их комбинаций // Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica.- 1964.- 14, № 3.- с. 428-437 (кит.) (англ. перевод: Yang Le. The multiple values of meromorphic functions and of combinations of functions // Chinese Math.- 1964.- 5, № 3.- P. 460-470).

показано Уедою[1]. Якщо $k > 2m$, то $q_k(m) = 4m + 1$. Точність цієї оцінки показано Хе Юдзяном та Гао Шіанем[2].

Теорема 3.2. Нехай w_1 і w_2 - цілі m-значні алгеброїдні функції, $w_1 \not\equiv w_2$ і $E(a_j, k_j, w_1) = E(a_j, k_j, w_2)$, $k_j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $1 \le j \le q$, $k = \max\{k_j : 1 \le j \le q\}$.

Тоді $$\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j+1} \le 2m \frac{2k+1}{k+1} - 1.$$

Наслідок 3.2. Нехай w_1 і w_2 - цілі m-значні алгеброїдні функції, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

$$\hat{q}_k(m) = 4m + [(2m-1)/k].$$

Якщо $E(a_j, k, w_1) = E(a_j, k, w_2)$, $a_j \in \mathbb{C}$, $1 \le j \le \hat{q}_k(m)$, то $w_1 \equiv w_2$.

---

1. Ueda H. Unicity theorems for meromorphic or entire functions // Kodai Math. J. - 1980. - 3, № 3. - P. 457-471.

2. He Juzan, Gao Shi-an. On algebroid functions taking the same values at the same points // Kodai Math. J.- 1986. - 9, № 2. - P. 256-265.

Основні результати дисертації опубліковано в наступних роботах:

I. П'яна В. О. Уточнення теореми єдиності для раціональних функцій. В зб. Прикладні питання математики, Львів.- 1991. - Вип. 36. - с. 40 - 41.

2. Goldberg A. A., Pyana V. A. The uniqueness theorems for algebraic functions // Entire and subharmonic functions. Advances in Soviet mathematics. - 1992. - 11. - P. 199 - 204.

3. Гольдберг А. А., П'яна В. О. Деякі теореми єдиності для раціональних, алгебраїчних і алгеброїдних функцій, що враховують тільки прості A-точки. Доп. АН України.- 1992. - №12. - с. 12 - 14.

Підписане до друку 29.07.93р.
Формат 60Х84 0 І/16 Обсяг 0.7 др.арк.
Замовлення 1411 Тираж 100 примірн.
Рівне.УІІВГ, Собрна, ІІ