АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ГРЕЦЬКИЙ ОЛЕКСАНД. СЕРГІЙОВИЧ

ДЕЯКІ УМОВИ МОНОГЕННОСТІ ТА ГОЛОМОРФНОСТІ ВІДОБРАЖЕНЬ

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ - 1993

Роботу виконано у відділі топологічних методів аналізу Інституту математики АН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук БОНДАР А.В.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук КОЧУБЕЙ А.Н.

кандидат фізико-математичних наук ГОРЛЕНКО О.В.

Провідна установа: Інститут прикладної математики і механіки АН України, м. Донецьк

Захист відбудеться "26" жовтня 1993 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою:

252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "6" вересня 1993 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

<u>Актуальність теми.</u> Актуальною проблемою сучасного комплексного аналізу є задача пошуку та обгрунтування у певному розумінні "мінімальних" умов, що забезпечували б голоморфність відображень із заданих класів.

Класичний варіант цієї проблеми для функцій комплексної змінної, відображений у роботах Г.Бора, Х.Лоомана, О.С.Безиковича, все ж найбільш повно виявився у працях Д.Є.Меньшова. Цей математик виділив та дослідив різні геометричні властивості, що є послабленням вимог до збереження кутів, сталості розтягів та ін. У дослідженнях Меньшова, а також працях деяких інших математиків, було досить суттєве припущення - однолистність функцій. Пізніше Ю.Ю.Трохимчук на основі синтезу ідей теорії внутрішніх відображень та теорії множин моногенності зняв це досить сильне обмеження, а А.В.Бондар розробив у низці праць багатовимірні та нескінченновимірні аспекти згаданої вище проблеми (для випадку відображень гільбертових просторів). Результати останніх досліджень знайшли своє відображення у підсумовуючій монографії А.В.Бондаря "Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений" (Київ: Наук. думка, 1992).

Дисертаційна робота присвячена встановленню результатів такого змісту для випадку нескінченновимірних просторів на основі вивчення властивостей похідних операторів, що певним чином пов'язані із розглядуваними відображеннями.

<u>Метод</u> дисертаційної роботи є як дослідження процесу диференціювання для певного класу відображень гільбертових просторів засобами теорії локальних геометричних характеристик голоморфних відображень, так і розвиток теорії для випадку відображень банахових просторів.

<u>Методика досліджень.</u> У роботі використані методи теорії лінійних операторів гільбертових та банахових просторів, методи геометрії банахових просторів та категорний метод, що базується на теоремі Бера про категорії.

<u>Наукова новизна і основні результати дисертаційної роботи.</u>

1. Отримано достатні умови $\mathbb{C}$-диференційовності для деякого класу відображень гільбертових просторів.
2. Введено понятійний апарат та отримано критерії моногенності для $\mathbb{R}$-диференційованих відображень банахових просторів.
3. Отримано достатні умови голоморфності для локально ліпшицевих відображень та для деякого більш широкого класу відображень банахових просторів.

Всі результати, отримані у дисертаційній роботі є новими.

Теоретична і практична цінність.

Результати можуть бути використані для розвитку теорії локальних геометричних характеристик голоморфних відображень банахових просторів.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на семінарах відділу топологічних методів аналізу Інституту математики АН України (керівник - професор, доктор фіз.-мат. наук Ю.Ю.Трохимчук), на Літній математичній школі (Миколаївка, 1992 р.), на науково-молодіжній конференції ім. акад. М.Кравчука (м.Київ, 11-13 травня 1993 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані у [1 - 4]. Результати, наведені у дисертації, отримані автором самостійно, за винятком § 3.1, зміст якого відображений у [2]. Внесок співавторів рівноцінний.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, трох розділів та списку літератури, що нараховує 30 робіт.

ЗМІСТ РОБОТИ

Коротко зупинимось на структурі та основних результатах дисертаційної роботи.

Для характеристики диференціальних властивостей відображень областей нескінченновимірного простору використовується замість сукупності похідних чисел, як це робиться в одновимірному випадку, сукупність $\mathbb{C}$-лінійних операторів, яка певним чином пов'язана із цими відображеннями. На цьому шляху виникають поняття похідного оператора, множини моногенності та будується теорія локальних геометричних характеристик голоморфних відображень .

У розділі 1 досліджується процес диференціювання для певного класу відображень областей гільбертового простору на основі узагальненого поняття множини моногенності.

Нехай H-комплексний гільбертовий простір. $\sigma(H)$-сукупність всіх ортонормованих базисів $e=(e_\alpha)$ $\alpha\in\mathfrak{A}$, де $\mathfrak{A}$ - множина індексів довільної потужності. Кожний такий базис назвемо репером. Фіксуємо всюди щільний лінеал G простору H.

Означимо клас відображень.

Означення 0.1. Відображення $f\colon D \to H_1$, де $H \supset D$ - область, назвемо $\mathbb{R}Ol$-диференційованим ($\mathbb{C}Ol$ - диференційованим) у точці $a \in D$, якщо існує такий $f'(a)|_G \in Ol_{\mathbb{R}}(H,\ H_1)$ $(f'(a)|_G\in Ol_{\mathbb{C}}(H,H_1))$, де $Ol_{\mathbb{R}}(H,H_1)$ - клас $\mathbb{R}$-лінійних замкнених операторів з H в H_1, і $G \subset \operatorname{dom} f'(a)$, що

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z-a\in G}} \frac{f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)}{\| z - a \|} = 0.$$

Клас таких відображень позначимо $F\mathbb{R}Ol(G,(a))$ або з $F\mathbb{C}Ol(G,(a))$

Базовим поняттям дослідження є поняття похідного оператора відображення. Нехай $\sigma(H,G) := \{\, e|\ e \in \sigma(H) \wedge e \subset G \,\}$.

Означення 0.2. Сім'я послідовностей

$$\tilde{z} = ((z_\alpha^k)_{k=1}^{\infty})_{\alpha\in\mathfrak{A}}, \quad z_\alpha^k \neq a, \quad \forall\, k,\alpha$$

називається репером послідовностей у точці a з дотичним репером $e \in \sigma(H,G_1)$, якщо виконані такі умови:

а) $\lim\limits_{k\to\infty} z_\alpha^k = a \quad \forall\, \alpha \in \mathfrak{A};$

б) $\dfrac{z_\alpha^k - a}{\|z_\alpha^k - a\|} \in G \quad \forall\, \alpha,\ k;$

в) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{z_\alpha^k - a}{\|z_\alpha^k - a\|} = e_\alpha \quad \forall\, \alpha$; $\quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\varepsilon)$.

Означення 0.3. Нехай H, H_1 – комплексні гільбертові простори, $f\colon D \to H_1$ – відображення області $D \subset H$ та $\mathfrak{Z} = \{(z_\alpha^k)_{k=1}^{\infty}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ – такий репер послідовностей у точці $a \in D$ з дотичним репером $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \in \Phi(H)$, що $z_\alpha^k \in D \quad \forall\, \alpha, k$. Вважатимемо, що у точці a існує похідний оператор $L(f,\mathfrak{Z},a)$ відображення f вздовж репера послідовностей $\mathfrak{Z}$, якщо:

а) $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subset \operatorname{dom} L(f,\mathfrak{Z},a)$;

б) $\overline{\operatorname{dom} L(f,\mathfrak{Z},a)} = H$;

в) $\forall\, \alpha \in \mathfrak{A}$ існують границі:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_\alpha^k)-f(a)}{\|z_\alpha^k - a\|} = \zeta_\alpha \in H_1;$$

г) $L(f,\mathfrak{Z},a)$ – $\mathbb{C}$-лінійний замкнений оператор, що відповідає умовам:

$$L(f,\mathfrak{Z},a)e_\alpha = \zeta_\alpha \qquad \forall\, \alpha \in \mathfrak{A}.$$

$$\mathcal{R}(f,a) := \{\, \mathfrak{Z} \mid \mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in \Phi(H,G) \wedge \operatorname{dom} L(f,\mathfrak{Z},a) \supset G \,\}.$$

$$\mathcal{P}(f,a) := \{\, L(f,\mathfrak{Z},a) \mid \mathfrak{Z} \in \mathcal{R}(f,a) \,\}.$$

Назвемо $\mathcal{R}(f,a)$ множиною всіх реперів послідовностей $\mathfrak{Z}$ відображення f у точці a (з різними дотичними реперами $\varepsilon \in \Phi(H,G)$), а $\mathcal{P}(f,a)$ – множиною похідних операторів відображення f у точці a.

Для довільного репера $\varepsilon \in \Phi(H,G)$ позначимо через $E(\varepsilon)$ замкнену дійсну лінійну оболонку множини ε, а множину всіх дійсних підпросторів $E(e) \subset H$, де $e \in \mathcal{O}(H,G)$, позначимо через $\mathfrak{K}(H,G)$. Очевидно, що якщо $E = E(e) \in \mathfrak{K}(H,G)$, то $E \oplus iE = H$.

Кожному підпросторові $E \in \mathfrak{K}(H,G)$ поставимо у відповідність $\mathbb{R}$-лінійний оператор спряження $J_E: H \to H$, визначений таким чином:

$$H \ni z = z' + iz'', \quad \text{де } z', z'' \in E$$

$$J_E z := z' - iz''.$$

Означення 0.4. Нехай

$E_1, E_0 \in \mathfrak{K}(H, G)$, $H \ni z = z' + iz''$, де $z', z'' \in E_1$, тоді

$$T_{E_1} z := T_{E_1, E_0} z := J_{E_0} z' + iJ_{E_0} z''$$

Для $\mathbb{R}Cl$-диференційованих відображень множини моногенності характеризуються такою теоремою.

Теорема 0.1. Нехай $H \supset D$ -область, $f: D \to H_1$ - відображення $\mathbb{R}Cl$-диференційоване у точці $a \in D$. Тоді для довільного репера $e \in \mathcal{O}(H,G)$ та довільного репера послідовностей $\tilde{e} = ((z_a^k)_{k=1}^{\infty})_{a \in J}$ у точці a з дотичним репером e існує похідний оператор $L(f,\tilde{e},a)$ відображення f у точці a вздовж $\tilde{e}$ та відповідне зображення $\mathcal{P}(f,a)$:

$$L_E(f,a) := L(f,\tilde{e},a) = f_z(a) + f_{\bar{z}}(a)T_E, \text{ де } E = E(e), \quad J := J_{E_0},$$

$$f_z(a)z = \frac{f'(a)z - if'(a)iz}{2},$$

$$f_{\bar{z}}(a)z = \frac{if'(a)Jz - f'(a)iJz}{2i} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Зауважимо, що форма зображення множини похідних операторів для зазначеного класу відображень є дуже вдалою: з одного боку вона свідчить про "органічність" поняття похідного оператора (опрацьовують одновимірні аналогії), а з іншого боку ця форма визначає деякою мірою методику дослідження.

Накладаючи деякі обмеження на множини моногенності відображень класу $\mathbb{R}Cl(G,(a))$, а у деяких випадках і на елементи множини $\varkappa(H,G)$ (див. теорему 0.2), ми отримуємо достатні умови c-диференційовності для даного класу відображень.

Означення 0.5. Пара (E_1, E_2)- дійсних замкнених підпросторів простору H таких, що E_1, $E_2 \in \varkappa(H,G)$ та $E_1+E_2 = H$, перебувають у відношенні загального розташування відносно G (скорочене позначення: $(E_1,E_2) \in Arr(G)$), де G - лінеал, якщо

$$E_1 \cap G + E_2 \cap G = G.$$

Теорема 0.2. Нехай D-область в H, f: $D \to H$ - відображення, $\varkappa Cl$-диференційоване у точці $a \in D$, лінеал G інваріантний відносно операторів J_{E_1}, J_{E_2} та $(E_1,E_2) \in Arr(G)$. Тоді, якщо похідні оператори $L_{E_1}(f)$ та $L_{E_2}(f)$ відображення f у точці a вздовж двох підпросторів E_1 та E_2 збігаються, то відображення f cCl-диференційоване у точці a.

Означення 0.6. Вважатимемо, що замкнений лінійний оператор L: $L \to H$ зображується у вигляді декартового розкладу операторів на лінеалі L.

$$L := \mathrm{Re}\, L + i\, \mathrm{Im}\, L, \text{ де}$$

$$\mathrm{Re}\, L := \frac{L + L^*}{2} \text{ - дійсна частина оператора } L,$$

$$\mathrm{Im}\, L := \frac{L - L^*}{2i} \text{ - уявна частина оператора } L,$$

якщо $G \subseteq \mathrm{dom} L \cap \mathrm{dom} L^*$.

Теорема 0.3. Нехай D-область в H, f: $D \to H$ - відображення, $\varkappa Cl$-диференційоване у точці $a \in D$, де H - комплексний, сепарабельний, гільбертовий простір. Якщо дійсні або уявні частини всіх похідних операторів $L_E \in \mathcal{P}(f,a)$ дорівнюють на G якомусь операторові Q та лінеал G інваріантний відносно сім'ї операторів J_E і $\mathrm{dom}(\, f_E^*(a) + T_E^* f_E^*(a)\,) \supseteq G$ $\forall E \in \varkappa(H,G)$, то відображення f cCl-диференційоване у точці a.

Нехай T - щільно визначений замкнений оператор, який діє із гільбертового простору H в інший гільбертовий простір H_1. Тоді існує полярний розклад оператора T :

$T = UR$, $\quad domT = domR$, де $R = (T^*T)^{1/2}$ - невід'ємний, самоспряжений оператор, що називається операторним модулем T.

Нехай $f:D\to H$ - відображення області $D \subset H$, $\mathfrak{K}Ol$-диференційоване у точці a. Для кожного оператора $L_E \in \mathcal{F}(f,a)$, $E \in \mathfrak{K}(H,G)$ запишемо полярний розклад:

$$L_E = U_E R_E.$$

Означення 0.7. Вважатимемо, що відображення $f: D \to H$ у точці $a \in D$ має сталий оператор розтягу Γ, якщо

$$R_E = R \quad \forall\, E \in \mathfrak{K}(H,G), \text{ де } R \in Ol_C(H) \text{ і } dom\, R \supseteq G.$$

Введемо позначення:

$$\widehat{L_E^* L_E} := f_E^*(a) f_E(a) + T_E^* f_{\bar{E}}^*(a) f_{\bar{E}}(a) T_E + f_E^*(a) f_{\bar{E}}(a) T_E +$$

$$T_E^* f_{\bar{E}}^*(a) f_E(a).$$

Теорема 0.4. Нехай $f: D \to H$ - відображення області $D \subset H$, $\mathfrak{K}Ol$-диференційоване у точці a і має у цій точці сталий оператор розтягу R. Крім того, лінеал G інваріантний відносно сім'ї операторів J_E і

$$dom\, \widehat{L_E^* L_E} \supseteq G \quad \forall\, E \in \mathfrak{K}(H,G).$$

Тоді, якщо $f_E(a)$ має щільну область [illegible] H, то відображення f COl-диференційоване у точці a.

У розділі 2 дисертаційної роботи вводиться понятійний апарат дослідження та отримано операторні критерії моногенності для $\mathfrak{K}$-диференційованих відображень банахових просторів.

Нехай пара $(B, \|\cdot\|)$-банаховий комплексний простір з відповідною нормою, $\mathfrak{U}$ - множина довільної потужності.

Означення 0.8. Сукупність $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{U}}$ елементів простору B

назвемо базисом простору, якщо вірне наступне твердження:

$$\forall z \in B \quad \exists ! (z_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}} \; [(z_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subset \mathbb{C} \wedge z = \sum_\alpha z_\alpha e_\alpha].$$

Кожний такий базис назвемо репером, а сукупність всіх реперів позначимо через $\Phi(B)$.

Нехай $\varepsilon = (e_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}} \in \Phi(B)$. Позначимо через $E(\varepsilon)$ дійсну лінійну замкнену оболонку ε, а саме:

$$E(\varepsilon) := \overline{P_{\mathbb{R}}(\varepsilon)}.$$

Означимо множину таких дійсних підпросторів:

$$\mathfrak{K}(B) := \{ E(\varepsilon) \mid \varepsilon \in \Phi(B) \}.$$

Нехай $E_0 \in \mathfrak{K}(B)$ - довільний, але фіксований дійсний підпростір. Введемо $\mathbb{R}$-лінійний оператор опряження J, асоційований з розкладом $B = E_0 \oplus iE_0$:

$$\forall z \in B, \; Jz := z' - iz'', \text{ де}$$
$$z := z' + iz'' \text{ та } z', z'' \in E_0.$$

Для довільного $E \in \mathfrak{K}(B)$ означимо $\mathbb{C}$ - лінійний оператор $T_E \colon B \to B$, а саме:
$T_E z := Jz' + iJz''$, де $z := z' + iz''$ - довільний елемент простору B та $z', z'' \in E$.

Подамо означення похідного оператора з одного банахового простору в інший.

Означення 0.9. Сім'я послідовностей

$$\tilde{\varepsilon} = ((z_\alpha^k)_{k=1}^\infty)_{\alpha \in \mathfrak{A}}, \quad z_\alpha^k \neq \alpha, \quad \forall k, \alpha$$

називається репером послідовностей у точці a з дотичним репером $\varepsilon \in \Phi(B)$, якщо виконані такі умови:

а) $\lim\limits_{k \to \infty} z_\alpha^k = a \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A};$

б) $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{z_\alpha^k - a}{\| z_\alpha^k - a \|} = e_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A}; \qquad \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon), \varepsilon = (e_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}.$

Означення 0.10. Нехай B, B_1 - комплексні банахові простори,

$f: D \to B_1$ – відображення області $D \subset B$ та $\tilde{\mathfrak{Z}} = \{(z_\alpha^k)_{k=1}^{\infty}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ – такий репер послідовностей у точці $a \in D$ з дотичним репером $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \in \mathcal{O}(B)$, що $z_\alpha^k \in D \ \forall \alpha, k$. Вважатимемо, що у точці a існує похідний оператор $L(f, \tilde{\mathfrak{Z}}, a)$ відображення f вздовж репера послідовностей $\tilde{\mathfrak{Z}}$, якщо:

а) $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$ існують границі:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(z_\alpha^k) - f(a)}{\| z_\alpha^k - a \|} = \zeta_\alpha \in B_1;$$

б) $L(f, \tilde{\mathfrak{Z}}, a)$ – $\mathbb{C}$-лінійний обмежений оператор, що відповідає умовам:

$$L(f, \tilde{\mathfrak{Z}}, a) e_\alpha = \zeta_\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{A}.$$

Множину всіх реперів послідовностей $\tilde{\mathfrak{Z}}$ у точці a (з різними дотичними реперами $\varepsilon \in \mathcal{O}(B)$), вздовж яких існують похідні оператори відображення f, позначимо через $\mathcal{R}(f,a)$, а множину всіх похідних операторів $L(f, \tilde{\mathfrak{Z}}, a)$, де $\tilde{\mathfrak{Z}}$ пробігає $\mathcal{R}(f,a)$, позначимо через $\mathcal{P}(f,a)$ і назвемо її множиною похідних операторів відображення f у точці a.

Нагадаємо означення $\mathbb{R}$-диференційованого у точці відображення.

Означення 0.11. Відображення $f: D \to B_1$, де $B \supset D$ – область, назвемо $\mathbb{R}$ – диференційованим ($\mathbb{C}$ – диференційованим) у точці $a \in D$, якщо існує такий $\mathbb{R}$ – лінійний ($\mathbb{C}$ – лінійний) неперервний оператор $f'(a): B \to B_1$, що

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)}{\| z - a \|} = 0.$$

Для $\mathbb{R}$-диференційованих відображень множини моногенності характеризуються такою теоремою.

Теорема 0.5. Нехай $B \supset D$ – область, $f\colon D \to B_1$ – відображення, $\mathbb{R}$ – диференційоване у точці $a \in D$, тобто $f'(a) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(B,B_1)$, де $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(B,B_1)$ – клас $\mathbb{R}$-лінійних неперервних відображень. Тоді для довільного репера $e \in \mathcal{O}(B)$ та довільного репера послідовностей $\tilde{e} = \{(z_a^k)_{k=1}^{\infty}\}_{a \in \mathfrak{A}}$ (у сенсі означення 0.9) у точці a з дотичним репером e існує похідний оператор $L(f,\tilde{e},a)$ відображення f у точці a вздовж $\tilde{e}$ та відповідне зображення $\mathcal{F}(f,a)$:

$$L_E(f,a) := L(f,\tilde{e},a) = f_z(a) + f_{\bar{z}}(a)T_E,$$

де $E = E(e)$.

Як показує теорема 0.5, дослідження умов $\mathbb{C}$-диференційованості для $\mathbb{R}$-диференційованих відображень у точці зводиться до пошуку достатніх умов, які б забезпечували операторну рівність $f_{\bar{z}}(a) = 0$. При цьому важливим є вивчення властивостей сім'ї операторів $T_E\colon B \to B$, де $E \in \mathcal{K}(B)$.

Теорема 0.6. Нехай x – довільний фіксований ненульовий елемент банахового простору B, $F := (T_E x)_{E \in \mathcal{K}(B)}$. Тоді вірне твердження:

$\forall\, y\ (y \neq 0 \wedge y \in B)\ \exists\, e\ (e \in F)\ \exists\, \gamma\ (\gamma \in \mathbb{R}_+)\ [\ y = \gamma \cdot e\ ].$

Наведемо кілька означень, у термінах яких будуть сформульовані обмеження або на множини моногенності відображень, або на елементи множини $\mathcal{K}(B)$.

Означення 0.12. Вважатимемо, що дійсні підпростори $E_1 \subset B, \ldots, E_n \subset B$ перебувають у відношенні загального розташування, якщо для довільних $j \neq l$ виконується $E_j + E_l = B$.

Означення 0.13. Нехай $L\colon B \to B_1$ – $\mathbb{C}$-лінійний неперервний оператор. Означимо оператор L^{s} таким співвідношенням

$$L^{s} := \begin{cases} O, & \text{якщо } L = O, \\ L/\|L\|, & \text{якщо } L \neq O. \end{cases}$$

Нехай B – комплексний рефлексивний банаховий простір з базисом $\hat{\varepsilon} = (e_i)_{i=1}^{\infty}$, $\mathscr{A}: B \to B$ – довільний $\mathbb{C}$-лінійний неперервний оператор: $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(B)$, та $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ – базис у спряженому до B просторі B^{*}, біортогональний до $\hat{\varepsilon}$. Результат дії лінійного функціоналу $\varphi \in B^{*}_{\mathbb{C}}$ на елемент x з простору $B_{\mathbb{C}}$ позначатимемо $\langle x,\varphi \rangle$. Оператор $\mathscr{A}$ припускає матричне зображення A відносно базису $\hat{\varepsilon}$:

$$A := (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}, \quad \text{де } a_{ij} = \langle \mathscr{A}e_i,\varphi_j \rangle.$$

Означення 0.14. Вважатимемо, що лінійний неперервний оператор $\mathscr{A}$ зображується у вигляді декартового розкладу операторів відносно базису $\hat{\varepsilon}$, якщо

$$A := ReA + iImA, \quad \text{де}$$

$$ReA := (b_{ij})_{i,j=1}^{\infty},$$

$$b_{ij} := \frac{\langle \mathscr{A}e_i,\varphi_j \rangle + \overline{\langle \mathscr{A}e_i,\varphi_j \rangle}}{2}.$$

ReA назвемо дійсною частиною оператора $\mathscr{A}$. Діагональ матриці A позначатимемо як $diagA$.

Критерії моногенності $\mathbb{R}$-диференційованих відображень сформульовано у таких теоремах.

Теорема 0.7. Нехай $f: D \to B_1$ – відображення області $D \subset B$, $\mathbb{R}$-диференційоване у точці $a \in D$. Для $\mathbb{C}$-диференційовності f у точці a необхідно і достатньо виконання однієї із таких умов (E_i перебувають у відношенні загального розташування):

(a) Для підпросторів $E_1, E_2 \in \varkappa(B)$ похідні оператори L_{E_1} і L_{E_2} відображення f у точці a вздовж E_1 та E_2 рівні.

• *(b)* Для підпросторів $E_1, E_2, E_3 \in \varkappa(B)$ рівні оператори $L^s_{E_k}$:

$$L^s_1 = L^s_2 = L^s_3.$$

Теорема 0.8. Нехай, $f: D \to B$ – відображення області $D \subset B$, $\mathbb{R}$-диференційоване у точці $a \in D$; B – сепарабельний рефлексивний банаховий простір. Для $\mathbb{C}$-диференційованості f у точці a необхідно і достатньо виконання однієї з таких умов:

(c1) відносно деякого базису $\hat{\varepsilon} = (e_i)_{i=1}^{\infty}$ діагоналі дійсних частин похідних операторів $\mathcal{F}(f,a)$ збігаються;

(c2) відносно деякого базису $\hat{\varepsilon} = (e_i)_{i=1}^{\infty}$ дійсні координати образів одного з елементів із $\hat{\varepsilon}$ при дії операторів з множини $\mathcal{F}(f,a)$ збігаються.

У розділі 3 дисертаційної роботи отримано достатні умови $\mathbb{C}$-диференційованості відображень вздовж підпросторів, та достатні умови голоморфності для локально ліпшицевих відображень і для деякого більш широкого класу відображень областей банахових просторів.

У § 3.1 викладена техніка "спуску" на простори скінченного виміру. Основний результат сформульований у такій теоремі.

Теорема 0.9. Нехай B_1 – комплексний підпростір скінченного виміру (ковиміру) сепарабельного рефлексивного простору B з базисом; $f: D \to B$ – відображення області $D \subset B$, що належить множині $\mathcal{F}(D,(a))$ і $\mathbb{R}$-диференційоване у точці $a \in D$ вздовж B_1, тобто існує такий $\mathbb{R}$-лінійний неперервний оператор $f'_{B_1}(a): B_1 \to B$, що

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in B_1}} \frac{\| f(a+h) - f(a) - f'_{B_1}(a)h \|}{\| h \|} = 0.$$

Тоді, якщо виконується одна з таких умов:

(c1) відносно деякого базису $\hat{\varepsilon} = (e_i)_{i=1}^{\infty}$ діагоналі дійсних

частин похідних операторів $\mathcal{F}(f,a)$ збігаються;

(c) відносно деякого базису $\hat{\varepsilon} = (e_i)_{i=1}^{\infty}$ дійсні координати образів одного з елементів $\hat{\varepsilon}$ при дії операторів з множини $\mathcal{F}(f,a)$ збігаються, то відображення f $\mathbb{C}$-диференційоване у точці a вздовж B_1.

У § 3.2 отримано достатні умови голоморфності для локально ліпшицевих відображень та відображень, що відповідають умовам *(L)* та *(Con)*.

Наведемо деякі з них.

Лема 0.1. Нехай D- область банахового простору B, $Q' \subseteq Q \subseteq D$ - вкладення множин; при цьому підмножина Q' є множиною не першої категорії у Q. Нехай $f\colon D \to B_1$- неперервне відображення, що для довільної точки $a \in Q'$ відповідає такій умові *(L)*:

$$\overline{\lim_{z\to a}} \frac{\| f(z) - f(a) \|_1}{\| z - a \|} = M(a) < \infty .$$

Тоді існує така куля K_0 ($K_0 \subset D$) із центром у деякій точці $z_0 \in Q$, що на множині $K_0 \cap Q \neq \emptyset$ відображення f відповідає умові Ліпшиця з деякою константою M.

Нехай B - комплексний банаховий простір, $e \in B$, $\| e \| = 1$, $K(e, r)$ - відкрита куля з центром у точці e радіуса $r < 1$. Позначимо через $Con (o, e, r)$ конус з вершиною у точці O, породжений кулею $K(e, r)$, тобто:

$$Con (o, e, r) := \{ x \in B \mid (\exists \lambda \in \mathbb{R}_+) (\lambda x \in K(e, r)) \}.$$

Для довільної точки $a \in B$

$$Con (a, e, r) := a + Con (o, e, r).$$

Означення 0.15. Нехай D-область у B та $f\colon D \to B_1$ - відображення. Вважатимемо, що для f виконується у точці $a \in D$ умова (*Con*), якщо існують такі $e \in B$, $\| e \| = 1$, $r < 1$, що

$$\overline{\lim_{\substack{z \to a \\ z \in Con(a,e,r)}}} \frac{\| f(z) - f(a) \|_1}{\| z - a \|} = M(a) < \infty \qquad (1)$$

Теорема 0.10. Нехай D - область комплексного сепарабельного рефлексивного банахового простору B із базисом та $f\colon D \to B$ - локально ліпшицеве відображення, що належить множині $\mathcal{F}(D,D)$.

Припустимо, що для кожної точки a області D виконується одна з таких умов:

(c1) відносно деякого базису $\hat{e} = (e_i)_{i=1}^{\infty}$ діагоналі дійсних частин похідних операторів із $\mathcal{F}(f,a)$ збігаються;

(c2) відносно деякого базису $\hat{e} = (e_i)_{i=1}^{\infty}$ дійсні координати образів одного з елементів $\hat{e}$ при дії операторів з множини $\mathcal{F}(f,a)$ збігаються.

Тоді відображення f голоморфне в області D.

Теорема 0.11. Нехай D - область комплексного сепарабельного рефлексивного банахового простору B із базисом, $f\colon D \to B$ - неперервне відображення, що належить множині $\mathcal{F}(D,D)$ та для кожної точки $a \in D$ відповідає одній з умов (L), (Con), а також одній з умов *(c1)*, *(c2)* (див. попередню теорему).

Тоді відображення f голоморфне в області D.

На закінчення автор вважає своїм обов'язком висловити щиру подяку науковому керівникові доктору фізико-математичних наук А.В. Бондарю за увагу до роботи та стимулююче обговорення.

Основні положення дисертації опубліковані у таких роботах:

1. Грецький О.О. Достатні умови C-диференційованості для одного класу відображень областей гільбертового простору // Мат. студії: Пр. Львів. мат. т-ва. - 1993. - Вип. 2. - С. 78-89.

2. Грецький О.С., Грецька Т.А. Про С-диференційовність відображень нескінченновимірних просторів. - Львів, 1993. - 32 с. - (Препр./ АН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача; № 7 - 93).
3. Грецький О.С. Про умови голоморфності ліпшицевих відображень банахових просторів. - Київ, 1993. - 20 с. - (Препр. / АН України. Ін-т математики; 93.19).
4. Gretsky O.S. On sufficient conditions of monogeneity for differentiable maps on domains of Banach spases // Тез. Першої Укр.-Америк. шк. "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Україна, Крим, Судак, 1-10 черв. 1993 р.). - Київ: Ін-т математики АН України, 1993. - С. 67-68.

Підп. до друку 21.06.93. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,8.
Тираж 100 пр. Зам. 240 Безкоштовно.

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3