МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. І.ФРАНКА

На правах рукопису

Василь ГАВРИШ

ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СТРУКТУР

Спеціальність 05.13.16 - застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1993

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00815216 (N)

АБ 27870

Робота виконана в секторі теоретичного матеріалознавства обчислювального центру Львівського науково-дослідного інституту матеріалів.

Науковий керівник - доктор технічних наук
професор Ю.КОЛЯНО

Науковий консультант - кандидат фізико-математичних наук
старший науковий співробітник
Ю.КРИЧЕВЕЦЬ

Офіційні опоненти - доктор технічних наук
професор Н.ФЛЕЙШМАН
- кандидат фізико-математичних наук
доцент В.ЛАВРЕНЮК

Провідна установа - Фізико-механічний інститут
ім. Г.Карпенка АН України

Захист відбудеться "15" вересня 1993р. о 1530 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 068.26.12 у Львівському університеті ім. І.Франка (290602, Львів, вул. Університетська 1).

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Львівського університету.

Автореферат розісланий "5" серпня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Б.Остудін.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. При виготовленні та експлуатації окремих вузлів та елементів конструкцій мікроелектронної апаратури виникає необхідність математичного моделювання теплових процесів в неоднорідних структурах, яке є одним із важливих розділів сучасних інженерних досліджень.

Побудова та вивчення математичних моделей процесів теплопровідності в кусково-однорідних структурах вимагає розробки ефективних методів розв'язування крайових задач математичної фізики, що має теоретичне та практичне значення.

Побудові математичних моделей та розвитку методів розв'язування задач тепломасообміну присвячено праці О.Алїфанова, А.Березовського, М.Беляева, У.Блека, Е.Карташова, Л.Коздоби, Ю.Коляно, Б.Коренєва, Ф.Крейтє, Л.Кудряшова, О.Ликова, Ю.Мацевитого, М.Никитенка, Я.Підстригача, В.Рвачова, О.Рядно, О.Самарського, А.Слесаренко, А.Тихонова та інших авторів.

Одним із ефективних методів побудови вихідних диференціальних рівнянь та розв'язування відповідних крайових задач теплопровідності для кусково-однорідних тіл у випадку виконання на поверхнях спряження їх неоднорідних елементів умов ідеального теплового контакту є метод, який грунтується на застосуванні узагальнених функцій. В цьому випадку теплофізичні характеристики (ТФХ) можуть бути описані для всього тіла як єдиного цілого за допомогою одиничних функцій. В результаті підстановки описаних таким чином ТФХ в рівняння теплопровідності, одержуються диференціальні рівняння з розривними та сингулярними коефіцієнтами.

Різні підходи до розв'язування диференціальних рівнянь з розривними та сингулярними коефіцієнтами відображено в працях Ю.Коляно, Р.Кушніра, В.Ломакіна, С.Конащенко, В.Лавренюка, В.Лазаряна, І.Образцова, Г.Онанова, О.Олійник, В.Сергієнко, М.Сідляра.

Метою роботи є дальший розвиток методу, що грунтується на застосуванні узагальнених функцій, до побудови математичних моделей процесів теплопровідності, розв'язування просторових лінійних та нелінійних граничних задач теплопровідності для кусково-однорідних структур у випадку виконання на поверхнях спряження їх неоднорідних елементів ідеального теплового контакту, розробка методики розв'язування одержаних при цьому диференціальних рівнянь з розривними та сингулярними коефіцієнтами, розв'язання на цій основі ряду важливих практичних задач, дослідження температурних полів в кусково-однорідних структурах стосовно до потреб виробництва та експлуатації елементів конструкцій радіо- та мікроелектронної апаратури.

Загальна методика виконання досліджень. Математичні моделі процесів теплопровідності в кусково-однорідних структурах описуються диференціальними рівняннями із частинними похідними з розривними та сингулярними коефіцієнтами, які одержані за допомогою методу, що грунтується на застосуванні узагальнених функцій. При розв'язуванні відповідних просторових лінійних та нелінійних граничних задач теплопровідності використано теорію узагальнених та спеціальних функцій, методи інтегральних перетворень. Числові розрахунки проведено на ЕОМ ЄС-1036.

Наукова новизна. Метод розв'язування задач теплопровідності для кусково-однорідних структур, який грунтується на застосуванні узагальнених функцій та дозволяє одержувати розв'язки, єдині для всієї області їх визначення, поширений на випадок просторових тіл з дво- та тривимірними неоднорідностями.

Побудовано двома способами рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для просторових тіл двовимірної кусково-однорідної структури. Сформульовано та доведено теореми про еквівалентність отриманих частково вироджених диференціальних рівнянь системам рівнянь теплопровідності для кожного елемента неоднорідного тіла та умовам ідеального теплового контакту на поверхнях спряження між контактуючими елементами.

Одержано рівняння теплопровідності із сингулярними коефіцієнтами для тіл з тривимірною неоднорідністю.

Виведено нелінійне диференціальне рівняння теплопровідності з розривними коефіцієнтами для просторових термочутливих (ТФХ залежать від температури) кусково-однорідних тіл. Запропоновано підхід до розв'язування отриманого нелінійного диференціального рівняння теплопровідності, який грунтується на застосуванні узагальнених функцій.

На основі одержаних рівнянь побудовано розв'язки ряду практично важливих задач.

Досліджено вплив включень, тепловіддачі з граничних поверхонь та залежності ТФХ від температури на розподіл температурних полів в тривимірних неоднорідних тілах.

Практична цінність результатів полягає у використанні їх для оцінки та аналізу температурних полів в елементах конструкцій радіо- та мікроелектронної апаратури, а також для встановлення допустимих температурних режимів роботи, що гарантує їх працездатність та довговічність.

Результати проведених досліджень використані при розробці моделі термопружності кристалу з дефектами НВО "Карат" та використовуються з метою вибору оптимальних умов вирощування монокристалів із розплаву в кристалічних системах.

Достовірність результатів забезпечується фізичним обгрунтуванням постановок задач; коректністю використання математичного апарату при побудові вихідних рівнянь та їх розв'язків, а також порівнянням результатів в часткових випадках із відомими результатами, одержаними на основі інших методик; використанням при отриманні числових результатів методів, які забезпечують необхідну точність.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались на II-ій конференції молодих вчених фізичного факультету Львівського університету (м.Львів, 1986 р.), третьому науково-технічному семінарі "Стан та перспективи розробки матеріалів для гібридних інтегральних схем" (м.Львів, 1988 р.), УІІ-ій науково-технічній конференції молодих вчених та спеціалістів Львівського науково-дослідного інституту матеріалів (м.Львів, 1989 р.), міжнародній конференції " FACTOR'90 " "Моделювання в матеріалознавстві" (м.Львів, 1990 р.).

В цілому робота доповідалась на науково-технічному семінарі з моделювання в матеріалознавстві у Львівському науково-дослідному інституті матеріалів (м.Львів, 1991 р.), спільному науковому семінарі кафедри диференціальних рівнянь Львівського університету ім. І.Франка, відділу диференціальних рівнянь та відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки та математики ім. Я.Підстригача АН України (м.Львів, 1991 р.), науковому семінарі кафедри прикладної математики Львівського університету ім. І.Франка (м.Львів, 1992 р.), міжфакультетському науковому семінарі "Математичні моделі та методи в механіці суцільного середовища" Львівського політехнічного інституту (м.Львів, 1993 р.).

Публікації. Результати виконаних досліджень опубліковані в працях [1-8] .

Обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох основних розділів, висновків, двох додатків та містить 110 сторінок, включаючи 19 рисунків, таблицю та бібліографічний список із 134 найменувань.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі відображено актуальність та обгрунтовано важливість проблеми, якій присвячена робота, зроблено огляд літератури по темі дисертації, поставлено мету роботи, коротко викладено зміст, сформульовано основні положення, які виносяться на захист, та основні результати.

У першому розділі наведено основні рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для кусково-однорідних структур, одержані за допомогою методу, який грунтується на застосуванні узагальнених функцій.

Розглядається ізотропний півпростір, в якому знаходиться на відстані d від його граничної поверхні циліндричне включення з радіусом R та висотою $2l$. В області $\Omega_0=\{(r,z):r \le R,\ |z| \le l\}$, що займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю $q(\tau)$. На поверхнях спряження неоднорідних елементів $r=R,\ |z|=l$ відбувається ідеальний тепловий контакт.

ТФХ для системи, що розглядається, можна описати у вигляді

$$p(r,z)=p_1+(p_0-p_1)\cdot S_-(R-r)\cdot N(z), \qquad (1)$$

де $N(z)=S_-(z+l)-S_+(z-l)$; $S_\pm(\zeta)$ - асиметричні одиничні функції; p_1, p_0 -ТФХ матеріалів півпростору та включення відповідно.

Із використанням правила диференціювання двох кусково-неперервних функцій, які мають спільні точки розриву першого роду, одержано рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами:

$$\Delta t-\left[\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}\right)\cdot S_-(R-r)\cdot N(z)\right]\cdot\dot{t}=(K_\lambda-1)\cdot\left\{\left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r=R-0}\cdot N(z)\cdot\delta_+(r-R)+\right.$$

$$\left.+\left[\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{r=l-0}\cdot\delta_+(z-l)-\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{r=-l+0}\cdot\delta_+(z-l)\right]\cdot S_-(R-r)\right\}- \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{\lambda_0}\cdot q(\tau)\cdot S_-(R-r)\cdot N(z),$$

де $K_\lambda=\lambda_0/\lambda_1$ - критерій, що характеризує відносну теплопровідність тіла; $\delta_\pm(\zeta)$-асиметричні дельта-функції Дірака.

При побудові рівняння (2) використано правило диференціювання добутку двох кусково-неперервних функцій, які мають спільні точки розриву першого роду. При цьому в одержаному рівнянні (2) містяться похідні функції $t(r,z,\tau)$, що змінюються по одній із координат r, z на поверхнях спряження, характер зміни яких важко встановити, оскільки вони не несуть фізичної інформації.

У зв'язку з цим пропонується інший підхід побудови рівняння теплопровідності для півпростору з включенням.

Вводиться функція

$$T=\lambda(r,z)\cdot t. \qquad (3)$$

Продиференціювавши вираз (3) по r та z із врахуванням зображення ТФХ у вигляді формули (1), одержимо наступне рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами:

$$\Delta T-\left[\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}\right)\cdot S_-(R-r)\cdot N(z)\right]\cdot\dot{T}=(\lambda_1-\lambda_0)\cdot\left\{\left[t\big|_{z=1}\cdot\dot{\delta}_+(z-1)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-t\big|_{z=-1}\cdot\dot{\delta}_-(z+1)\right]\cdot S_-(R-r)+t\big|_{r=R}\cdot N(z)\cdot\left[\frac{1}{R}\cdot\delta_+(r-R)+\dot{\delta}_+(r-R)\right]\right\}- \quad (4)$$

$$-q(\tau)\cdot S_-(R-r)\cdot N(z).$$

Розглядається багатошаровий ізотропний півпростір, що складається із n неоднорідних шарів, які відрізняються теплофізичними та геометричними параметрами. В j-му шарі ($j=\overline{1,n-1}$) знаходиться циліндричне включення з радіусом R та висотою, рівною товщині цього шару (z_j-z_{j-1}). На поверхнях спряження неоднорідних елементів $r=R$, $z=z_i$ ($i=\overline{1,n-1}$) відбувається ідеальний тепловий контакт. В області включення $\Omega_c=\{(r,z):r<R,\ z_{j-1}\le z\le z_j\}$, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю $q(\tau)$.

ТФХ для багатошарового півпростору можна зобразити у вигляді

$$p(r,z)=p_1+\sum_{i=1}^{n-1}(p_{i+1}-p_i)\cdot S_-(z-z_i)+(p_0-p_j)\cdot S_+(R-r)\cdot N(z). \quad (5)$$

де $N(z)=S_-(z-z_{j-1})-S_-(z-z_j)$; p_i,p_0 -ТФХ матеріалів i-го шару та включення відповідно.

Аналогічно, як і в попередньому випадку, двома способами побудовано наступні рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для просторових тіл двовимірної кусково-однорідної структури:

$$\Delta t-\left[\frac{1}{a_1}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{i+1}}-\frac{1}{a_i}\right)\cdot S_-(Z-Z_i)+\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_j}\right)\cdot S_+(R-r)\cdot N(z)\right]\cdot\dot{t}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}(1-K_\lambda^{(i)})\cdot\frac{\partial t}{\partial Z}\bigg|_{z=z_i+0}\cdot\delta_-(Z-Z_i)+$$

$$+\left[\left(K_\lambda^{(j-1)}-\lambda_0/\lambda_{j-1}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial Z}\bigg|_{z=z_{j-1}+0}\cdot\delta_-(Z-Z_{j-1})+\right. \tag{6}$$

$$\left.+\left(K_\lambda^{(j)}-\lambda_{j+1}/\lambda_0\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial Z}\bigg|_{z=z_j+0}\cdot\delta_-(Z-Z_j)\right]\cdot S_+(R-r)+$$

$$+\left[(1-\lambda_j/\lambda_0)\cdot\frac{\partial t}{\partial r}\bigg|_{r=R+0}\cdot\delta_-(r-R)-\frac{1}{\lambda_0}\cdot q(\tau)\cdot S_+(R-r)\right]\cdot N(z);$$

$$\Delta T-\left[\frac{1}{a_1}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{i+1}}-\frac{1}{a_i}\right)\cdot S_-(Z-Z_i)+\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_j}\right)\cdot S_+(R-r)\cdot N(z)\right]\cdot\dot{T}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\dot{\lambda}_i)\cdot t\big|_{z=z_i}\cdot\dot{\delta}_-(Z-Z_i)+$$

$$+(\lambda_j-\lambda_0)\cdot\left\{t\big|_{r=R}\cdot N(Z)\left[\frac{1}{R}\cdot\delta_+(r-R)+\dot{\delta}_+(r-R)\right]+\right. \tag{7}$$

$$\left.+\left[t\big|_{z=z_j}\cdot\dot{\delta}_-(Z-Z_j)-t\big|_{z=z_{j-1}}\cdot\dot{\delta}_-(Z-Z_{j-1})\right]\cdot S_+(R-r)\right\}-$$

$$-q(\tau)\cdot S_-(R-r)\cdot N(z).$$

Тут $K_\lambda^{(i)}=\lambda_{i+1}/\lambda_i$ - критерій, що характеризує відносну теплопровідність шарів півпростору.

Мають місце наступні зауваження та теореми:

Зауваження 1. Рівняння теплопровідності (2) є частковим випадком рівняння (6).

Теорема 1. Частково вироджене диференціальне рівняння (6) з розривними та сингулярними коефіцієнтами, що описує розподіл температурного поля в кусково-однорідному тілі, еквівалентне системі рівнянь теплопровідності для кожного із елементів багатошарового тіла та умовам ідеального теплового контакту між ними.

Зауваження 2. Рівняння теплопровідності (4) є частковим випадком рівняння (7).

Теорема 2. Частково вироджене диференціальне рівняння (7) з розривними та сингулярними коефіцієнтами еквівалентне системі рівнянь теплопровідності для кожного із елементів багатошарового тіла та умовам ідеального теплового контакту між ними.

Далі розглядається ізотропний півпростір, що містить на відстані l від його граничної поверхні включення паралелепіпедної форми з об'ємом $V=8hbd$, в області $\Omega_0=\{(x,y,z):|x|\le h,|y|\le b,|z|\le d\}$ якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла потужністю $q(\tau)$.

ТФХ півпростору можна описати виразом

$$p(x,y,z)=p_1+(p_0-p_1)\cdot N(x,h)\cdot N(y,b)\cdot N(z,d), \tag{8}$$

де $N(x,h)=S(x+h)-S(x+h)$; $S(x)$ -симетрична одинична функція; p_1,p_0 - ТФХ матеріалів півпростору та включення відповідно.

Вводяться зведені ТФХ $P_0=p_0\cdot V_0$ включення та переходиться у виразі (8) до границі при $h\to 0$, $b\to 0$, $d\to 0$, зберігаючи при цьому P_0 сталими. Використовується відома границя $\lim\limits_{h\to 0} N(x,h)/2h=\delta(x)$. У зв'язку з чим одержується вираз

$$p(x,y,z)=p_1+P_0\cdot\delta(x,y,z), \tag{9}$$

де $\delta(x,y,z)$-дельта-функція Дірака.

Хоча локальна неоднорідність, що описується співвідношенням (9), яке містить дельта-функцію Дірака, формально зосереджена в точці (0,0,0), фактично вона характеризується скінченними розмірами включення.

Отже, за допомогою співвідношення (9) побудовано рівняння теплопровідності із сингулярними коефіцієнтами:

$$\Delta t+\frac{\Lambda_0}{\lambda_0}\cdot\left[\frac{\partial t(x,0,0,\tau)}{\partial x}\bigg|^{*}_{x=0}\cdot\dot{\delta}(x)\cdot\delta(y,z)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial t(0,y,0,\tau)}{\partial y}\bigg|^{*}_{y=0}\cdot\dot{\delta}(y)\cdot\delta(x,z)+\frac{\partial t(0,0,z,\tau)}{\partial z}\bigg|^{*}_{z=0}\cdot\dot{\delta}(z)\cdot\delta(x,y)\right]= \tag{10}$$

$$+c_v^{(1)}\cdot\dot{t}+\frac{1}{\lambda_1}\cdot\left[C_v^{(0)}\cdot\dot{t}(0,0,0,\tau)-Q_0(\tau)\right]\cdot\delta(x,y,z),$$

де $\Lambda_0=\lambda_0\cdot V_0$; $C_v^{(0)}=c_v^{(0)}\cdot V_0$; $Q_0(\tau)\cdot V_0$;

$$\frac{\partial t(x,0,0,\tau)}{\partial x}\bigg|^{*}_{x=0}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial t(x,0,0,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=+0}+\frac{\partial t(x,0,0,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=-0}\right]$$

Розглядається багатошаровий ізотропний півпростір, що складається із n неоднорідних шарів, які відрізняються теплофізичними та геометричними параметрами. В j-му шарі ($j=\overline{1,n-1}$) діють рівномірно розподілені по об'єму обмеженого циліндра $\pi R^2(z_{j-1}-z_j)$ внутрішні джерела тепла з потужністю $q_0=\mathrm{const}$. На поверхнях i-го та $(i+1)$-го шарів $z=z_i$ ($i=\overline{1,n-1}$) відбувається ідеальний тепловий контакт.

За допомогою нової функції

$$\vartheta = \int\limits_0^{t(r,z)}\lambda_1(\zeta)d\zeta + \sum_{i=1}^{n-1} S_-(z-z_i)\cdot\int\limits_{t(r,z_i)}^{t(r,z)}\left[\lambda_{i+1}(\zeta)-\lambda_i(\zeta)\right]d\zeta$$

побудовано частково лінеаризоване диференціальне рівняння з розривними коефіцієнтами

$$\Delta\vartheta=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\sum_{i=1}^{n-1} r\cdot\left\{\left[\lambda_{i+1}(t)-\lambda_i(t)\right]\cdot\frac{\partial t}{\partial r}\right\}\Bigg|_{z=z_i}\cdot S_-(z-z_i)- \qquad (2)$$

$$- q_0\cdot S_-(R-r)\cdot N(z).$$

<u>У другому розділі</u> наводяться методи визначення температурних полів в кусково-однорідних структурах.

Знайдено розв'язок стаціонарної осесиметричної задачі теплопровідності для півпростору із циліндричним включенням, в області Ω_0 якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0, а на граничній поверхні $z=-l-d$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c. Розглядається випадок, коли радіус R та висота $2l$ включення набагато менші, ніж відстань d від поверхні спряження до граничної поверхні півпростору. Вводяться інтегральні характеристики $\theta=t-t$ в області включення

$$\vartheta_r = \frac{2}{R^2}\cdot\int_0^R r\cdot\theta dr, \quad \vartheta_z = \frac{1}{2\cdot l}\cdot\int_{-l}^{l}\theta dz, \quad \vartheta_z^* = \frac{3}{2\cdot l^2}\cdot\int_{-l}^{l} r\cdot\theta dr,$$

та припускається по його висоті зміна температури згідно лінійного закону $\theta = \vartheta_z + \vartheta_z^*\cdot z/l$. При таких припущеннях вихідне рівняння (2) значно спрощується, що дає можливість використати інтегральне перетворення Ганкеля по радіальній координаті r. Досліджено зміну температури θ вздовж радіальної r та аксіальної z координат, а також залежність її від коефіцієнта тепловіддачі α_z з граничної поверхні півпростору.

Побудовано розв'язок стаціонарної осесиметричної задачі теплопровідності для багатошарового півпростору з тепловіддачею та включенням циліндричної форми в j-му шарі. Розглядається випадок, коли товщина цього шару $(z_j - z_{j-1})$ та радіус R включення набагато менші, ніж інші геометричні параметри системи. Аналогічно, як і в попередньому випадку, в області включення Ω_0 вводяться інтегральні характеристики температури

$$\vartheta_r = \frac{2}{R^2}\cdot\int_0^R r\cdot\theta dr, \quad \vartheta_z = \frac{2}{z_j - z_{j-1}}\cdot\int_{z_{j-1}}^{z_j}\theta dz, \quad \vartheta_z^* = \frac{3}{(z_j - z_{j-1})^2}\cdot\int_{z_{j-1}}^{z_j}\left(2\cdot z - z_j - z_{j-1}\right)\cdot\theta dz$$

та припускається зміна її по товщині тонкого шару згідно лінійного закону $\theta = \vartheta_z + \vartheta_z^*\cdot(2\cdot z - z_j - z_{j-1})/(z_j - z_{j-1})$. Це приводить до значного спрощення вихідного рівняння (6) та дозволяє застосувати інтегральне перетворення Ганкеля по радіальній координаті.

Проведено дослідження залежності температурного поля від радіальної та аксіальної координат і коефіцієнта тепловіддачі з граничної поверхні $z=0$.

Із використанням методу інтегральних перетворень до рівняння (10) по координатах x,y (перетворення Фур'є) одержано розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності для півпростору з точковим дефектом. На граничній поверхні півпростору $z=-l-d$ відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем у відповідності із законом Ньютона.

Проведено числове дослідження залежності температурного поля від координат x,z та від коефіцієнта тепловіддачі з граничної поверхні півпростору і проаналізовано одержані результати.

Наводиться дослідження температурного поля, обумовленого тепловим потоком на граничній поверхні, для півпростору з точковим дефектом.

<u>В третьому розділі</u> розглядається нелінійна осесиметрична стастаціонарна задача теплопровідності для багатошарового півпростору з тепловіддачею.

Для визначення температурного поля використовується рівняння (12), в якому, а також в граничній умові конвективного теплообміну, температура t на заданих поверхнях апроксимується по радіальній координаті за допомогою асиметричних одиничних функцій наступним чином:

$$t(r,z_k)=\left[t_1^{(k)}+\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)})\cdot S_-(r-r_l)\right]\cdot S_-(r_*-r), \qquad (13)$$

де $k=\overline{0,n-1}$; $z_0=0$; $r_1\in\,]0,r_*[$; $r_1\le r_2\le\ldots\le r_{m-1}$; r_* - значення радіальної координати, при якій температура стає практично сталою та рівною температурі середовища t_c; $t_l^{(k)}$ - невідомі апроксимаційні значення температури.

Це дає змогу цілком лінеаризувати граничну задачу для визначення функції ϑ :

$$\Delta\vartheta=-\frac{1}{r}\cdot\sum_{j=1}^{n-1}\Big\{\sum_{i=1}^{m-1} r_i\cdot(t_{i+1}^{(j)}-t_i^{(j)})\cdot\Big[\lambda_{j+1}(t_{i+1}^{(j)})-\lambda_j(t_{i+1}^{(j)})\Big]\cdot\delta_-'(r-r_i)+$$

$$+r_m\cdot t_m^{(j)}\cdot\Big[\lambda_{j+1}(t_m^{(j)})-\lambda_j(t_m^{(j)})\Big]\cdot\delta_-'(r_m-r)\Big\}\cdot S_-(z-z_j)- \tag{14}$$

$$-q_0\cdot S_-(R-r)\cdot N(z),$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z=0}=\alpha_z\cdot\Big\{\Big[t_1^{(0)}+\sum_{i=1}^{m-1} r_i\cdot(t_{i+1}^{(0)}-t_i^{(0)})\cdot S_-(z-z_i)\Big]\cdot S_-(r_m-r)-t_c\Big\},$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z\to\infty}=0,\quad \left.\vartheta\right|_{z\to\infty}=0. \tag{15}$$

Розв'язок задачі (14)-(15) будується за допомогою інтегрального перетворення Ганкеля.

Підставивши конкретні залежності коефіцієнтів теплопровідності елементів спряження в співвідношення (11) та у знайдений розв'язок граничної задачі (14)-(15) і прирівнявши отримані вирази для функції ϑ на поверхнях $z = 0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, після деяких перетворень одержуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих апроксимаційних значень температури $t_i^{(k)}$.

Шукане температурне поле для системи, що розглядається, визначається із нелінійного алгебраїчного рівняння, одержаного з використанням співвідношення (11) та розв'язку задачі (14)-(15) після підстановки в них виразів залежностей коефіцієнтів теплопровідності шарів півпростору від температури.

Проілюстровано практичне застосування методу на прикладі тришарового півпростору з діючими джерелами тепла у другому шарі. Досліджено температурне поле вздовж радіальної та аксіальної координат, а також залежність його від критеріїв Біо та Кірпічова у випадку залежності коефіцієнтів теплопровідності шарів півпростору від температури згідно лінійного закону $\lambda_i=\lambda_i^0\cdot(1-k_i\cdot t)$, де λ_i^0, k_i - опорний та температурний коефіцієнти теплопровідності i-го елемента спряження $(i=\overline{1,3})$. На основі числового аналізу встановлено вплив залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури на її розподіл.

У висновках міститься коротке резюме про виконану роботу.

У додатку 1 наведено принципову схему обчислювального процесу.

У додатку 2 міститься акт про використання результатів виконаних досліджень.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

1. Метод, який грунтується на застосуванні узагальнених функцій, дозволяє знаходити розв'язки крайових задач теплопровідності для кусково-однорідних структур шляхом розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами. За допомогою цього методу у випадку, коли в області включення діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла, побудовано математичні моделі процесів теплопровідності для напівобмежених просторових тіл:

- із циліндричним включенням;
- із включенням паралелепіпедної форми;
- багатошарових із циліндричним включенням;
- багатошарових термочутливих (включення та шар, в якому во-

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

но знаходиться, однорідні).

2. Метод дає можливість використати теорію інтегральних перетворень, в результаті чого суттєво спрощується процедура розв'язування граничних задач теплопровідності. Таким чином, на основі побудованих математичних моделей, у випадку, коли на граничних поверхнях відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, отримано розв"язки стаціонарних задач теплопровідності для:

- півпростору, в якому міститься циліндричне включення;
- півпростору, в якому знаходиться включення паралелепіпедної форми (для цієї системи одержано розв"язок також у випадку, коли температурне поле обумовлене тепловим потоком на граничній поверхні);
- багатошарового півпростору, в одному із шарів якого міститься циліндричне включення;
- термочутливого багатошарового півпростору.

3. За допомогою проведеного числового аналізу встановлено:

- поведінку кривої температури для кусково-однорідних структур;
- проміжки, в яких спостерігається симетричний розподіл температурного поля відносно осі $r = 0$ для півпростору із циліндричним включенням;
- області півпростору із включенням паралелепіпедної форми, в яких: 1) включення значно впливає на розподіл температури; 2) спостерігається симетричність температурного поля відносно площини $z = 0$;
- значний вплив неоднорідності шарів та включення на розподіл температурного поля в багатошаровій системі;
- області неоднорідних структур, в яких температура не зале-

жить від тепловіддачі з граничних поверхонь;

- похибку отриманих результатів для нетермочутливої системи порівняно із термочутливою.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ ВИКЛАДЕНІ В ПРАЦЯХ:

1. Гавриш В.И. Расчет температурных полей в металлокерамических корпусах // Тезисы докладов VII научно-технической конференции молодых ученых и специалистов Львовского НИИ материалов 3-4 апреля 1989 г. - Львов, 1989. - С.12-14.

2. Гавриш В.И. Температурное поле в полупространстве с параллелепипедным включением, обусловленное потоком тепла // Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1991. Вып. 33. - С.18-20.

3. Гавриш В.И., Валяшек В.Б. Расчет температурного поля в толстых композитных пленках // Материалы II конференции молодых ученых физ. ф-та Львовского университета. Львов, 1986. - С.7-8. -Деп. в УкрНИИНТИ, № 2790-Ук 86.

4. Коляно Ю.М., Гавриш В.И. Модель композитной толстой термочувствительной пленки // Моделирование в материаловедении. Тезисы докладов международной конференции "FACTOR'90" 22-24 мая 1990 г. - Львов, 1990. - С.41-43.

5. Коляно Ю.М., Кричевец Ю.М., Гавриш В.И. Температурное поле в многослойной толстопленочной структуре с инородным тепловыделяющим включением // Состояние и перспективы разработки материалов для гибридных интегральных схем. Тезисы докладов третьего научно-технического семинара 10-15 октября 1988 г. - Львов, 1988. - С.13.

6. Коляно Ю.М., Кричевец Ю.М., Гавриш В.И. Уравнение теплопроводности для элементов микроэлектроники // Радиоэлектронное матери-

аловедение. Часть II, Львов, 1989. - С.175-183.

7. Коляно Ю.М., Кричевец Ю.М., Иваник Е.Г., Гаврыш В.И. Температурное поле в полупространстве с инородным включением // Инженерно-физический журнал. - 1988. - 55, № 6. - С.1006-1011.

8. Коляно Ю.М., Кричевец Ю.М., Иваник Е.Г., Гаврыш В.И. Температурное поле в полупространстве с параллелепипедным тепловыделяющим включением // Инженерно-физический журнал. - 1989. - 57, № 5. - С.849-853.

Ротапринт Львівської наукової бібліотеки ім.В.Стефаника
АН України. 290005, Львів, вул.Лермонтова, 15.

465847

Ab 27.870
Ab 27.870