АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ГОЛЬБЕРТ Анатолій Леонідович

ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЛОСКИХ ТОПОЛОГІЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З ОБМЕЖЕНИМИ ІНТЕГРАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

01.01.01 - математичний аналіз

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1993

Робота виконана у Кримському інституті природоохоронного курортного будівництва.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук
КУДЬЯВІН В.С.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук
ГУТЛЯНСЬКИЙ В.Я.

кандидат фізико-математичних наук
ВАХТІН О.К.

Провідна установа - Львівський університет

Захист відбудеться "28" вересня 1993 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою: 252601 Київ, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "19" серпня 1993 р.

Учений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Поняття квазіконформного відображення було введене Г.Грьочем у 1928 році. Згодом у середині тридцятих років квазіконформне відображення з"явилось у роботах М.А. Лаврентьєва, Л.Альфорса, О.Тейхмюллера. Теорія плоских квазіконформних відображень становить важливу частину теорії функції комплексної змінної і має численні застосування у задачах механіки й математики. Досить повний виклад цієї теорії можна знайти в роботах Л.Альфорса, П.П.Белінського, Л.І.Волковиського, О.Лехто й К.Віртанена, С.Л.Крушкаля.

Відтак, послаблюючи умову квазіконформності, тобто потребуючи обмеженості характеристики в деякому інтегральному сенсі, виділяються класи відображень, квазіконформних у середньому, і відображення з обмеженими інтегралами Діріхле.

Класи відображень, квазіконформних у середньому, розглядалися в роботах П.П.Белінського, І.Н.Песіна, Г.Д.Суворова, В.І.Гаврилова, В.І.Кругликова, В.С.Кудьявіна, П.А.Білути, В.І. Пайкова та багатьох інших авторів. Єдиний метод дослідження даних класів відображень, що грунтується на змінах ємностей конденсаторів, запропонований В.І.Кругликовим.

Відображення з обмеженими інтегралами Діріхле досліджувалися переважно Г.Д.Суворовим та його учнями, а також французьким математиком Леллон-Ферран.

Таким чином, становить інтерес побудова класів плоских відображень, які природно об"єднують і доповнюють розглядувані класи відображень, а також розробка єдиного геометричного методу досліджень властивостей введених класів. Методика вивчення цих класів відповідає ідеї, запропонованій Д.Є.Меньшовим, але за більш загальних припущень, оскільки не потребується умова регулярності нормальних систем околів.

Мета роботи. Головна мета дисертації полягає в розробці геометричних методів дослідження властивостей класів плоских топологічних відображень, залежних від дійсних параметрів, і в застосуванні цих методів до розв"язання екстремальних задач.

Методика досліджень грунтується на загальних методах геометричної теорії функцій, теоріях α-ємностей конденсаторів, p-модулів сімей кривих. Застосовано також метод заснований на спеціальній зміні радіусів нормальних систем околів для розглядуваних класів.

Наукова новизна. В роботі побудовані класи плоских відображень з обмеженими інтегральними характеристиками, залежними від дійсних параметрів. За конкретних значень параметрів ми отримуємо класи квазіконформних, квазіізометричних відображень, відображень, квазіконформних в середньому, відображень з обмеженими інтегралами Діріхле. Побудовано геометричний метод дослідження введених класів відображень. Одержано критерій належності гомеоморфізмів класу квазіізометричних відображень. Розв"язані нові екстремальні задачі відображень плоских кругових кілець.

Практична і теоретична цінність. Одержані результати можуть бути використані в суміжних галузях геометричної теорії функцій.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на науково-дослідних семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу / керівник - професор П.М.Тамразов/ ІМ АН України, відділів теорії функцій / керівник - В.І.Білий/ та рівнянь у частинних похідних / керівник - В.Я.Гутлянський/ ІПММ АН України м.Донецька; у всесоюзній школі з теорії потенціалу /Кацівелі, 1991/; у літній математичній школі "Комплексний аналіз" /Миколаївка, 1992/; на нараді-семінарі з комплексного аналізу / Алушта, 1989/; на наукових семінарах Сімферопольського університету.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [І - 9].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, попередніх відомостей, позначень і термінології, трьох глав, розбитих на 10 параграфів, і містить 123 сторінки машинописного тексту. Список літератури налічує 69 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтована актуальність теми дисертації, дано огляд найбільш близьких до цієї теми результатів, коротко викладено зміст дисертації, а також перераховані основні результати, які виносяться на захист.

У попередніх відомостях, позначеннях і термінології вводяться традиційні для теорії функцій визначення, позначення, наведені деякі знані відомості з геометричної теорії функцій.

У першій главі "Геометричні та ємнісні характеристики та пов"язані з ними класи плоских відображень" вводяться класи плоских топологічних відображень, залежних від дійсних параметрів. Мета даної глави - опис геометричного та ємнісного методів дослідження властивостей розглядуваних класів.

У § I вводяться класи відображень, побудовані на спеціальному законі виміру радіусів нормальних систем око: з.

Нехай x_0 - довільна точка в $\mathbb{R}^2$. Припустимо, що дл: всякого $t\in(0,1]$ визначено деяки" замкнений окіл $\mathcal{U}_t(x_0)$ точки x_0. Скажемо, що множина околів $\{\mathcal{U}_t(x_0), t\in(0,1]\}$ утворює нормальну систему, якщо існує неперервна функція $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, така, що $v(x_0)=0, v(x)>0$ при $x\neq x_0$, $\mathcal{U}_t(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^2: v(x)\leq t\}$ і множина $\Gamma_t(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^2: v(x)=t\}$ є межею при кожному $t\in(0,1]$. Функція v називається породжуючою функцією нормальної системи $\{\mathcal{U}_t(x_0)\}$.

Вважаємо

$$r(x_0,t)=\inf_{x\in\Gamma_t(x_0)}|x-x_0|,\ R(x_0,t)=\sup_{x\in\Gamma_t(x_0)}|x-x_0|.$$

Нехай $f:G\to G^*$ - гомеоморфізм, $x_0\in G$, $G^*=f(G)$,

$$r^*(x_0,t)=\inf_{x\in\Gamma_t(x_0)}|f(x)-f(x_0)|,\ R^*(x_0,t)=\sup_{x\in\Gamma_t(x_0)}|f(x)-f(x_0)|.$$

Означення I.I.I. Будемо говорити, що гомеоморфне відображення $f:G\to G^*$ належить класу $H_{\alpha,\beta}(G)$, якщо для деяких дійсних чисел α,β $(1\leq\alpha<\beta<\infty)$ існують обмежена субадитивна функція $\Phi_{\alpha,\beta}$, задана на відкритих підмножинах області G, і нормальна система околів $\{\mathcal{U}_t(x)\}\subset G$ такі, що для всіх $x\in G$ виконується нерівність

$$\varlimsup_{t\to0}\frac{R^*(x,t)}{r(x,t)}\left(\frac{R(x,t)}{r^*(x,t)}\right)^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}\cdot\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}}\leq\Phi'_{\alpha,\beta}(x),$$

де $\Phi'_{\alpha,\beta}(x)$ - похідна субадитивної функції $\Phi_{\alpha,\beta}$.

Співвідношення між класами $H_{\alpha,\beta}(G)$ в залежності від значень параметрів α,β наводяться в наступному твердженні.

Теорема I.I.I. Нехай $f:G\to G^*$ - гомеоморфізм.

I. Для будь-яких фіксованих s,α,β таких, що $1\leq s<\alpha<\beta<\infty$, $H_{\alpha,\beta}(G)\subset H_{s,\beta}(G)$.

2. Для будь-яких фіксованих α,β,t таких, що $1\leq\alpha<\beta<t<\infty$, $H_{\alpha,\beta}(G)\subset H_{\alpha,t}(G)$

Означення I.I.2. Будемо говорити, що гомеоморфне відображення $f: G \to G^*$ належить до класу $H^*_{\gamma,\delta}(G)$, якщо для деяких дійсних чисел γ, δ ($1 \le \gamma < \delta < \infty$) існують обмежена субадитивна функція $\Phi^*_{\gamma,\delta}$, задана на відкритих підмножинах області G, і нормальна система околів $\{\Psi_t(x)\} \subset G$ такі, що для всіх $x \in G$ виконується нерівність

$$\overline{\lim} \frac{R(x,t)}{r^*(x,t)} \left(\frac{R^*(x,t)}{r(x,t)} \right)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}} \le \Phi^{*\,\prime\,\frac{\delta-\gamma}{\gamma\delta}}_{\gamma,\delta}(x),$$

де $\Phi^{*\prime}_{\gamma,\delta}(x)$ - похідна субадитивної функції $\Phi^*_{\gamma,\delta}$.

Аналогічно теоремі I.I.I. досліджується питання про вкладення класів $H^*_{\gamma,\delta}(G)$ за параметрами γ, δ.

Означення I.I.3. Топологічне відображення $f: G \to G^*$ назвемо відображенням класу $H(G)$, якщо відображення належить перетину класів $H_{\alpha,\beta}(G)$ і $H^*_{\gamma,\delta}(G)$. При цьому припускається відомим, про які параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ($1 \le \alpha < \beta \le 2$, $1 \le \gamma < \delta \le 2$) ідеться.

Деякі з введених класів за певних значень параметрів α, β, γ δ були досить добре вивчені.
Зокрема, при $1 \le \alpha, \gamma < 2$, $\beta = \delta = 2$ клас $H(G)$ розглядався В.С.Кудьявіним, а при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2$ – Д.Є.Меньшовим та П.П.Белінським.

У § 2 досліджуються загальні властивості введених класів відображень. Наведемо їх лише для відображень класу $H_{\alpha,\beta}(G)$.

Теорема I.2.I. Нехай $f: G \to G^*$ належить класу $H_{\alpha,\beta}(G)$. Тоді f належить класу $ACL(G)$.

Теорема I.2.2. Нехай $f: G \to G^*$ належить класу $H_{\alpha,\beta}(G)$, $1 \le \alpha < \beta \le 2$. Для $\tilde{x}, x \in G$, $\tilde{x} \ne x$ вважатимемо

$$k(x) = \overline{\lim_{\tilde{x} \to x}} \frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|\tilde{x} - x|}.$$

Тоді для п.в. $x \in G$ $k(x) < \infty$ і для всякої відкритої множини $A \subset G$

$$\int_A k^p(x)\,dx < \infty,$$

де $p = \frac{\beta}{\beta - 1}$.

Теорема I.2.8. Нехай $f: G \to G^*$ належить класу $H_{\alpha,\beta}(G)$, $1 \le \alpha < \beta \le 2$. Тоді

$$\int\limits_G \left(\frac{\mathcal{L}(x,f)}{l^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}}(x,f)} \right)^{\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}} dx \le \Phi_{\alpha,\beta}(G) < \infty,$$

де $\Phi_{\alpha,\beta}$ –субадитивна функція множини з визначення I.I.I.

Аналогічні твердження відносно відображень класу $H^*_{\gamma,\delta}(G)$ наводяться в теоремах I.2.4, I.2.5, I.2.9.

У § 3 вводяться класи гомеоморфних відображень, відповідні деяким спеціальним законам зміни ємностей конденсаторів.

Означення I.3.I. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f: G \to G^*$ належить класу $K_{\alpha,\beta}(G)$, де $1 \le \alpha < \beta < \infty$, якщо існує обмежена субадитивна функція $\Phi_{\alpha,\beta}$, задана на відкритих підмножинах області G, така, що для будь-якого конденсатора $(E, \mathcal{D})$, що лежить в G, $E^* = f(E)$, $\mathcal{D}^* = f(\mathcal{D})$, виконується нерівність

$$cap_\alpha^\beta (E^*, \mathcal{D}^*) \le \Phi_{\alpha,\beta}^{\beta-\alpha}(\mathcal{D}) \, cap_\beta^\alpha (E, \mathcal{D}).$$

Теорема I.3.I. Нехай $f: G \to G^*$ – гомеоморфізм.

I. Для будь-яких фіксованих s, α, β таких, що $1 \le s < \alpha < \beta < \infty$, $K_{\alpha,\beta}(G) \subset K_{s,\beta}(G)$.

2. Для будь-яких фіксованих α, β, t таких, що $1 \le \alpha < \beta < t < \infty$, $K_{\alpha,\beta}(G) \subset K_{\alpha,t}(G)$.

Означення I.3.2. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f: G \to G^*$ належить класу $K^*_{\gamma,\delta}(G)$, де $1 \le \gamma < \delta < \infty$, якщо існує обмежена субадитивна функція $\Phi^*_{\gamma,\delta}$, задана на відкритих підмножинах області G, така, що для будь-якого конденсатора $(E, \mathcal{D})$, що лежить в G, виконується нерівність

$$cap_\gamma^\delta (E, \mathcal{D}) \le \Phi^{*\,\delta-\gamma}_{\gamma,\delta}(\mathcal{D}) \, cap_\delta^\gamma (E^*, \mathcal{D}^*).$$

Аналогічно теоремі I.3.I. досліджується питання про вкладення класів $K^*_{\gamma,\delta}(G)$ в залежності від значень параметрів γ, δ.

Означення I.3.3. Топологічне відображення $f: G \to G^*$ назвемо відображенням класу $K(G)$, якщо відображення належить перетину класів $K_{\alpha,\beta}(G)$ і $K^*_{\gamma,\delta}(G)$. При цьому завжди припускається відомим, про які параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ідеться.

Деякі із введених класів $K(G)$ досить добре вивчені. Зокрема, при $1 \le \alpha, \gamma < 2$, $\beta = \delta = 2$ ми отримуємо класи відображень, квазіконформних в середньому, розглянуті в роботах В.І.Круглікова, В.С.Кудьявіна та інших авторі..

У § 4 даної глави вивчаються властивості відображень класів $K_{\alpha,\beta}(G)$, $K^*_{\gamma,\delta}(G)$, $K(G)$. За аналогією з § 2 наведемо основні твердження лише для відображень класів $K_{\alpha,\beta}(G)$.

Теорема І.4.І. Нехай $f: G \to G^*$ належить класу $K_{\alpha,\beta}(G)$. Тоді f належить класу $ACL(G)$.

Теорема І.4.2. Нехай $f: G \to G^*$ належить класу $K_{\alpha,\beta}(G)$, $1 \le \alpha < \beta = 2$. Для $\tilde{x}, x \in G$, $\tilde{x} \ne x$ вважатимемо

$$k(x) = \varlimsup_{\tilde{x} \to x} \frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|\tilde{x} - x|} .$$

Тоді для п.в. $x \in G$ $k(x) < \infty$ і для всякої відкритої множини $A \subset G$

$$\int_G k^p(x)\,dx < \infty ,$$

де $p = \frac{\beta}{\beta - 1}$.

Теорема І.4.4. Нехай $f: G \to G^*$ належить класу $K_{\alpha,\beta}(G)$, $1 \le \alpha < \beta \le 2$. Тоді

$$\int_G \left(\frac{\mathcal{L}(x,f)}{l^{\alpha-1}(x,f)} \right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} dx \le \Phi_{\alpha,\beta}(G) < \infty ,$$

де $\Phi_{\alpha,\beta}$ - субадитивна функція множини з визначення І.3.І.

У теоремах І.4.5, І.4.6, І.4.8 наводяться аналогічні теореми для відображень класу $K^*_{\gamma,\delta}(G)$.

У другій главі "Відображення з обмеженими інтегральними характеристиками. Геометричні та ємнісні методи їх дослідження" розглядаються класи плоских гомеоморфних відображень з першими узагальненими похідними, сумованими в ступені p. Головна мета даної глави полягає в доведенні еквівалентності геометричних, аналітичних визначень розглядуваних класів.

Нехай $f: G \to G^*$ - гомеоморфне відображення обмежених областей G, G^* простору $\mathbb{R}^2$. Для відображення f, яке має п.в. в G частинні похідні $\partial f_i/\partial x_j$, i,j 1,2, визначимо наступні величини ($\alpha \geq 1$):

$$N_\alpha(x,f) = \frac{\mathcal{L}(x,f)}{\ell^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}}(x,f)}, \quad N_\alpha^*(x,f) = \frac{\mathcal{L}^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}}(x,f)}{\ell(x,f)},$$

при цьому вважаючи $N_\alpha(x,f), N_\alpha^*(x,f)$ рівними нескінченності, якщо $\ell(x,f)=0$, а $\mathcal{L}(x,f) \neq 0$.

Якщо f та f^{-1} невироджено диференційовані в точках x і $y=f(x)$, то $N_\alpha(x,f) = N_\alpha^*(y,f^{-1})$ і $N_\alpha^*(x,f) = N_\alpha(y,f^{-1})$.

Означення 2.1.1. Гомеоморфне відображення $f: G \to G^*$ назвемо відображенням класу $T_{\alpha,\beta}(G)$ $(1 \leq \alpha < \beta < \infty)$, якщо f і f^{-1} є ACL- відображеннями, невироджено диференційованими п.в. у своїх областях визначення, і при цьому

$$N_{\alpha,\beta}(f) = \int_G N_\alpha^{\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}}(x,f)\,dx < \infty.$$

Величину $N_{\alpha,\beta}(f)$ будемо називати N-середньою характеристикою відображення f.

Означення 2.1.2. Гомеоморфне відображення $f: G \to G^*$ назвемо відображенням класу $T^*_{\gamma,\delta}(G)$ $(1 \leq \gamma < \delta < \infty)$, якщо f і f^{-1} є ACL-відображеннями, невироджено диференційованими п.в. у своїх областях визначення, і при цьому

$$N^*_{\gamma,\delta}(f) = \int_G N_\gamma^{*\frac{\gamma\delta}{\delta-\gamma}}(x,f)\,|J(x,f)|\,dx < \infty.$$

Величину $N^*_{\gamma,\delta}(f)$ будемо називати N^*-середньою характеристикою відображення f.

Зауваження 2.1.1. З означень 2.1.1 та 2.1.2 випливає, що

$$N_{\alpha,\beta}(f^{-1}) = N^*_{\alpha,\beta}(f), \quad N^*_{\alpha,\beta}(f^{-1}) = N_{\alpha,\beta}(f).$$

Означення 2.I.3. Гомеоморфне відображення $f: G \to G^*$ назвемо відображенням класу $T(G)$, якщо відображення f належить перетину класів $T_{\alpha,\beta}(G)$, $T^*_{\gamma,\delta}(G)$. При цьому завжди припускається відомим, про які параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ йдеться. Клас $T(G)$ будемо називати також класом відображень з обмеженими N-інтегральними характеристиками.

Далі, в теоремах 2.I.I - 2.I.3 та лемах 2.I.I - 2.I.2 досліджуються питання вкладення класів відображень $T_{\alpha,\beta}(G)$, $T^*_{\gamma,\delta}(G)$ у залежності від параметрів $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ $(1 \le \alpha < \beta \le 2, 1 \le \gamma < \delta \le 2)$ і вивчаються диференціальні властивості відображень цих класів.

Наступне твердження показує, що теорема I.2.8 має обернену.

Теорема 2.I.4. Якщо $1 \le \alpha < \beta \le 2$, то всяке гомеоморфне відображення $f: G \to G^*$ класу $T_{\alpha,\beta}(G)$ належить класу $H_{\alpha,\beta}(G)$.

Аналогічна пропозиція наводиться стосовно класів відображень $T^*_{\gamma,\delta}(G)$, $H^*_{\gamma,\delta}(G)$, тим самим встановлено геометричний критерій належності гомеоморфізмів до класів відображень з обмеженими N-інтегральними характеристиками.

Теорема 2.I.7. Нехай $f: G \to G^*$ -гомеоморфізм і $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - деякі постійні $(1 \le \alpha < \beta \le 2, 1 \le \gamma < \delta \le 2)$.
Наступні умови еквівалентні:

I) Існують обмежені субадитивні функції Φ та Φ^*, задані на відкритих підмножинах області G, і нормальна система околів $\{\mathcal{U}_t(x)\}$, $\{\mathcal{U}_t(x)\} \subset G$, такі, що для всіх $x \in G$ виконуються нерівності

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{R^*(x,t)}{r(x,t)} \left(\frac{R(x,t)}{r^*(x,t)} \right)^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} \le \Phi'(x),$$

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{R(x,t)}{r^*(x,t)} \left(\frac{R^*(x,t)}{r(x,t)} \right)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}\frac{\delta-\gamma}{\gamma\delta}} \le \Phi^{*\prime}(x),$$

де $\Phi'(x)$, $\Phi^{*\prime}(x)$- похідні субадитивних функцій Φ і Φ^* відповідно;

2) f та f^{-1} є ACL-відображеннями, невироджено диференційованими п.в. у своїх областях визначення, і при цьому кінцеві інтеграли

$$\int\limits_G N_\alpha^{\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}}(x,f)\,dx\,,\ \int\limits_G N_\delta^{*\frac{\gamma\delta}{\delta-\gamma}}(x,f)\,|J(x,f)|\,dx\,;$$

3) f є відображенням класу $W^1_{\frac{\beta}{\beta-1},loc}(G)$,

f^{-1} є відображенням класу $W^1_{\frac{\delta}{\delta-1},loc}(G^*)$

і при цьому кінцеві інтеграли з умови 2.

Умова I теореми 2.I.7 може бути прийнята за геометричні, а умови 2) і 3) за аналітичні визначення класу відображень з обмеженими N-інтегральними характеристиками.

У § 2 даної глави вводяться наступні класи відображень.

Нехай $f: G \to G^*$ - невироджено диференційоване п.в. у області G, тоді визначимо наступні величини ($1 \le \alpha$):

$$M_\alpha(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{\ell^\alpha(x,f)}\,,\quad M_\alpha^*(x,f) = \frac{L^\alpha(x,f)}{|J(x,f)|}\,.$$

Означення 2.2.I. Гомеоморфне відображення $f: G \to G^*$ назвемо відображенням класу $B_{\alpha,\beta}(G)$ ($1 \le \alpha < \beta < \infty$), якщо f та f^{-1} є ACL-відображеннями, невироджено диференційованими переважно всюди /п.в./ у своїх областях визначення, і при цьому

$$M_{\alpha,\beta}(f) = \int\limits_G M_\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(x,f)\,dx < \infty.$$

Величину $M_{\alpha,\beta}(f)$ будемо називати M-середньою характеристикою відображення f.

Означення 2.2.2. Гомеоморфне відображення $f: G \to G^*$ назвемо відображенням класу $B^*_{\gamma,\delta}(G)$ ($1 \le \gamma < \delta < \infty$), якщо f та f^{-1} є ACL-відображеннями, невироджено диференційованими п.в. у своїх областях визначення, і при цьому

$$M^*_{\gamma,\delta}(f) = \int\limits_G M_\delta^{*\frac{\gamma}{\delta-\gamma}}(x,f)\,dx < \infty.$$

Величину $M^*_{\gamma,\delta}(f)$ будемо називати M^*-середньою характеристикою відображення f.

Означення 2.2.3. Гомеоморфне відображення $f:G\to G^*$ назвемо відображенням класу $B(G)$, якщо відображення f належить перетину класів $B_{\alpha,\beta}(G)$ та $B^*_{\gamma,\delta}(G)$. При цьому завжди припускається відомим, про які параметри $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ідеться. Клас $B(G)$ будемо також називати класом плоских відображень з обмеженими M-інтегральними характеристиками.

Властивості відображень класів $B_{\alpha,\beta}(G), B^*_{\gamma,\delta}(G), B(G)$ досліджуються в теоремах 2.2.I - 2.2.. .

Теорема 2.2.6. Якщо гомеоморфізми $f:G\to G^*$ та $f^{-1}:G^*\to G$ є ACL-відображеннями, невироджено диференційованими п.в. у своїх областях визначення, то при кожних α,β $(1\le\alpha<\beta\le 2)$ для будь-якого конденсатора $(E,\mathcal{D})$, що лежить в G, справедлива нерівність

$$cap_\alpha^\beta(E^*,\mathcal{D}^*)\le\left(\int\limits_{\mathcal{D}\setminus E} M_\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(x,f)\,dx\right)^{\beta-\alpha} cap_\beta^\alpha(E,\mathcal{D}).$$

Тим самим встановлено, що теорема I.4.4 має обернену. Оскільки аналогічне твердження наводиться і відносно відображень класу $B^*_{\gamma,\delta}(G)$, то отримуємо таким чином ємнісний критерій належності гомеоморфізмів до класів відображень з обмеженими M-інтегральними характеристиками.

Теорема 2.2.9. Нехай $f:G\to G^*$ -гомеоморфізм і $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - деякі постійні $(1\le\alpha<\beta\le 2, 1\le\gamma<\delta\le 2)$. Наступні умови еквівалентні:

I) f, f^{-1} є ACL-відображеннями, невироджено диференційованими п.в. у своїх областях визначеннями, і при цьому кінцеві інтеграли

$$\int\limits_G M_\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(x,f)\,dx,\quad \int\limits_G M_\delta^{*\frac{\gamma}{\delta-\gamma}}(x,f)\,dx;$$

2) f є відображенням класу $W^1_{\frac{\beta}{\beta-1},loc}(G)$,

f^{-1} є відображенням класу $W^1_{\frac{\delta}{\delta-1},loc}(G^*)$

і при цьому кінцеві інтеграли, як і в умові I;

3) існують обмежені субадитивні функції Φ і Φ^*, задані на відкритих підмножинах області G, такі, що для будь-якого конденсатора $(E,\mathcal{D})$, що лежить в G, виконуються нерівності

$$\mathrm{cap}^{\beta}_{\alpha}(E^*, \mathcal{D}^*) \leq \Phi^{\beta-\alpha}(\mathcal{D})\,\mathrm{cap}^{\alpha}_{\beta}(E, \mathcal{D}),$$

$$\mathrm{cap}^{\delta}_{\gamma}(E, \mathcal{D}) \leq \Phi^{*\,\delta-\gamma}(\mathcal{D})\,\mathrm{cap}^{\gamma}_{\delta}(E^*, \mathcal{D}^*).$$

Умови I),2) теореми 2.2.9 можна прийняти за аналітичні, а умову 3)-за вмнісне визначення класу плоских відображень з обмеженими M-інтегральними характеристиками.

У § 3 другої глави розглядаються відображення класу BL.

Оскільки при $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 2$ класи відображень $H(G)$, $K(G)$, $T(G)$, $B(G)$ співпадають між собою і є гомеоморфізмами класу відображень з обмеженими інтегралами Діріхле, можна навести наступний критерій належності відображень до цього класу.

Теорема 2.3.I. Нехай $f: G \to G^*$ - гомеоморфізм. Наступні умови еквівалентні:

I) f і f^{-1} є ACL-відображеннями, невироджено диференційованими п.в. у своїх областях визначення, і при цьому кінцеві інтеграли

$$\int_G \mathcal{L}^2(x,f)\,dx, \quad \int_G \frac{\mathcal{L}(x,f)}{l(x,f)}\,dx;$$

2) f є відображенням класу $BL(G)$,

f^{-1} є відображенням класу $BL(G^*)$;

3) існують обмежені субадитивні функції Φ і Φ^*, задані на відкритих підмножинах області G, і нормальна система околів $\{\mathcal{U}_t(x)\} \subset G$ такі, що для всіх $x \in G$ виконуються нерівності

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \left(\frac{R^*(x,t)}{r(x,t)}\right)^2 \leq \Phi'(x),$$

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \left(\frac{R(x,t)}{r^*(x,t)}\right)^2 \leq \Phi^{*\prime}(x),$$

де $\Phi'(x), \Phi^{*\prime}(x)$ - похідні субадитивних функцій відповідно;

4) існують обмежені субадитивні функції Φ і Φ^*, задані на відкритих підмножинах області G, такі, що для будь-якого конденсатора $(E,\mathfrak{D})$, що лежить в G, виконуються нерівності

$$cap_1^2(E^*,\mathfrak{D}^*) \le \Phi(\mathfrak{D})\, cap_2(E,\mathfrak{D}),$$
$$cap_1^2(E,\mathfrak{D}) \le \Phi^*(\mathfrak{D})\, cap_2(E^*,\mathfrak{D}^*).$$

Умова 3) теореми 2.3.I може вважатись геометричним визначенням класу гомеоморфізмів з обмеженими інтегралами Діріхле.

У третій главі "Деякі узагальнення і застосування модульних та ємнісних методів" продовжується вивчення властивостей введених класів відображень.

В § I дано новий критерій належності гомеоморфізмів до класу квазіізометричних відображень.

Теорема 3.I.I. Нехай β, δ -фіксовані числа, $1 \le \beta < \infty$, $1 \le \delta < \infty$, $\beta \ne 2$, $\delta \ne 2$, $f: G \to G^*$ - гомеоморфне відображення обмежених областей у $\mathbb{R}^2$. Наступні умови еквівалентні:

I) f - квазіізометричне відображення;

2) для будь-якої відкритої множини $A \subset G$ та будь-якого конденсатора $(E,\mathfrak{D})$, що лежить в A, виконуються нерівності

$$cap_1^{\beta}(E^*,\mathfrak{D}^*) \le K_1 (m\mathfrak{D})^{\beta-1} cap_{\beta}(E,\mathfrak{D}),$$
$$cap_1^{\delta}(E,\mathfrak{D}) \le K_2 (m\mathfrak{D}^*)^{\delta-1} cap_{\delta}(E^*,\mathfrak{D}^*),$$

де K_1, K_2 - постійні.

В § 2 даної глави розглядаються середні відхилення $I_\alpha(f)$ і $O_\beta(f)$ гомеоморфізму $f:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}^*$ квазіконформно еквівалентних областей $\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{D}^*$

$$I_\alpha(f) = \left(\frac{1}{m\mathfrak{D}^*} \sup \frac{M_{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}^{\alpha+1}(\Gamma^*)}{M^{\alpha}(\Gamma)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \ \alpha > 1,$$

$$O_\beta(f)=\left(\frac{1}{m\mathcal{D}}\sup\frac{M^{\beta+1}_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Gamma)}{M^{\beta}(\Gamma^*)}\right)^{\frac{1}{\beta}},\ \beta>1,$$

де точна верхня грань береться по всіх сім"ях кривих Γ, що лежать в $\mathcal{D}$, для яких $M_{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}(\Gamma^*)$, $M(\Gamma)$ і $M_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Gamma)$, $M(\Gamma^*)$ не обертаються в нуль чи нескінченність одночасно. Ці відхилення співпадають з інтегральними характеристиками відображень, квазіконформних в (α,β)-середньому. Також вводяться до розгляду величини

$$I_\alpha(\mathcal{D},\mathcal{D}^*)=\inf_f I_\alpha(f),\ O_\beta(\mathcal{D},\mathcal{D}^*)=\inf_f O_\beta(f),$$

називані внутрішнім α - середнім та зовнішнім β - середнім коефіцієнтом квазіконформності пари областей $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}^*$.

В § 3 знаходимо розв"язання наступної задачі.

У класі відображень, квазіконформних у середньому, плоских кругових кілець знайти екстремальні відображення, що надають мінімум величинам $I_\alpha(f)$ і $O_\beta(f)$.

Нехай $\mathcal{D}_{r_0}=\{x\in\mathbb{R}^2: 0<r_0<|x|<1\}$, $\mathcal{D}_{\rho_0}=\{y\in\mathbb{R}^2: 0<\rho_0<|y|<1\}$ - кругові кільця, $0<\rho_0\le r_0<1$. В такому разі

$$I_\alpha(\mathcal{D}_{r_0},\mathcal{D}_{\rho_0})=\left(\frac{2}{1-\rho_0^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\frac{\left(1-\rho_0^{\frac{2}{\alpha+1}}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\ln\frac{1}{r_0}}.$$

а екстремальне відображення має вигляд

$$f_\alpha(x)=\left\{\rho=\left(1+\left(\rho_0^{\frac{2}{\alpha+1}}-1\right)\frac{\ln r}{\ln r_0}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}},\ \psi=\varphi,\ r_0<r<1,\ 0\le\varphi<2\pi\right\},$$

$$O_\beta(\mathcal{D}_{r_0},\mathcal{D}_{\rho_0})=\left(\frac{2}{1-r_0^2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2}{\beta-1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\frac{\ln\frac{1}{\rho_0}}{\left(r_0^{\frac{2}{1-\beta}}-1\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}}$$

і відповідне йому екстремальне відображення

$$g_\beta(x)=\left\{\rho=\rho_0^{\frac{r^{\frac{2}{1-\beta}}-1}{r_0^{\frac{2}{1-\beta}}-1}},\ \psi=\varphi,\ r_0<r<1,\ 0\leq\varphi<2\pi\right\}.$$

Зазначимо, що

$$\lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha(\mathcal{D}_{r_0},\mathcal{D}_{\rho_0})=\lim_{\beta\to\infty} O_\beta(\mathcal{D}_{r_0},\mathcal{D}_{\rho_0})=\frac{\ln\frac{1}{\rho_0}}{\ln\frac{1}{r_0}},$$

тобто коефіцієнту квазіконформності плоских кругових кілець.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В НАСТУПНИХ РОБОТАХ:

I. Гольберг А.Л. Некоторые экстремальные задачи плоских отображений, квазиконформных в среднем.- Симферополь: СФ ДИСИ, 1989.- 7 с.-Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 206I Ук-89 Деп.

2. Гольберг А.Л. Об одной экстремальной задаче плоских отображений, квазиконформных в среднем // Материалы респ. совещания-семинара по комплексному анализу, Алушта, 27 сент. - 4 окт. 1989 г. - Киев: ИМ АН Украины, 1989.-С.15.

3. Гольберг А.Л., Кудьявин В.С. Дифференциальные свойства одного класса плоских топологических отображений.-Симферополь: СФ ДИСИ, 1989.- 6 с.-Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2138 Ук-89 Деп.

4. Гольберг А.Л. Экстремальные отображения плоских колец и ρ-модули // Вопросы анализа и приближений: Сб.науч.тр.- Киев: ИМ АН Украины, 1990.-С.25-29.

5. Гольберг А.Л. Геометрические свойства плоских топологических отображений с ограниченными интегральными характеристиками.- Симферополь: КИПКС, 1991.-19 с.-Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № I2I8 Ук-91 Деп.

6. Гольберг А.Л. О соотношении некоторых классов плоских гомеоморфизмов // Материалы I Всесоюзной школы по теории

потенциала, Кацивели, 26 июня - 3 июля 1991 г. - Киев: ИМ АН Украины, 1991.- С.9.

7. Гольберг А.Л., Кудьявин В.С. Средние коэффициенты квазиконформности пары областей // Укр.мат.журн.- 1991.-43, № 12.- С.1709-1712.

8. Гольберг А.Л. О некоторых классах плоских топологических отображений с первыми обобщенными производными // Укр. мат.журн.- 1992.- 44, № 8.- С.1114-1116.

9. Гольберг А.Л., Кудьявин В.С. Об одном экстремальном отображении плоских колец // Комплексный анализ и теория потенциала: Сб.науч.тр.- Киев: ИМ АН Украины, 1992.- С.23-26.

Підп. до друку I4.06.93. Формат 60x84/I6. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. I,I6. Ум. фарбо-відб. I,I6. Обл.-вид. арк. 0,9.
Тираж I00 пр. Зам. 235. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3