ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

МАЛИЦКИЙ Игорь Иванович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ РЯДОВ ТЕЙЛОРА И АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.01. - математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Харьков - 1993

Работа выполнена на кафедре основ высшей математики
Харьковского авиационного института

Научный руководитель - доктор физико-математических наук,
доцент РВАЧЕВ В.А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Бабенко В.Ф.,
(Днепропетровский госуниверситет),
доктор физико-математических наук,
доцент Гришин А.Ф.,
(Харьковский госуниверситет).

Ведущая организация - Институт математики АН Украины, г. Киев

Защита состоится "5" ноября 1993 года в 15^{15} часов на заседании Специализированного Совета К 053.06.02 Харьковского государственного университета (310077, Харьков, пл. Свободы 4, ауд. 6 - 48).

С диссертацией можно ознакомиться в центральной научной библиотеке ХГУ.

Автореферат разослан "9" сентября 1993 года

Ученый секретарь
Специализированного совета А.С.Сохин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена изучению и развитию обобщенных рядов Тейлора, их применению при решении функционально-дифференциальных уравнений, уточнению оценок констант в банаховых пространствах бесконечно дифференцируемых функций. Актуальность этой задачи обусловлена следующим:

В теории приближений и вычислительной математике находят успешное применение обобщенные ряды Тейлора (ОРТ), построенные с помощью атомарных функций (а. ф.). Аппарат ОРТ и а. ф. позволяет успешно исследовать ряд функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), которые применяются в таких областях естествознания, как теория переноса и рассеяния нейтронов, теория распространения волн и другие.

Целью работы является развитие теории обобщенных рядов Тейлора с использованием атомарных функций для новых классов бесконечно дифференцируемых функций и их применение при решении линейных функционально - дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Работа носит теоретический характер. Основные результаты работы следующие:

1). Построены ОРТ в точках, принадлежащих некоторой окрестности нулей производных порядка j атомарной функции $up(x)$.

2). Доказана теорема единственности ограниченных решений в многоточечных краевых задачах для ФДУ вида

$$y'(x) = \lambda y(2x), \qquad \lambda \neq 2, \ |\lambda| < 4.$$

3). Уточнена оценка констант в основных леммах и теоремах для ОРТ в банаховых пространствах бесконечно дифференцируемых функций.

Практическая ценность. Результаты диссертации могут практически применяться в теории функций действительного переменного, в частности, в теории приближения функций, теории функционально-дифференциальных уравнений. Некоторые результаты перспективны для применения в численном анализе.

Метод исследования. Основные результаты работы получены на основе методов конструктивной теории функций, использованы элементы теории сплайн-функций, атомарных функций и функционального анализа.

Апробация работы. Результаты, полученные в ходе исследования неоднократно обсуждались на семинаре по теории атомарных функций кафедры основ высшей математики Харьковского авиационного института. Основные результаты работы докладывались на Республиканской конференции по теории приближения функций, г. Одесса, сентябрь 1986г и на Международной конференции по теории приближения и задачам вычислительной математики, г. Днепропетровск, май 1993г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 8-ми печатных работах.

Структура и обьем. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Главы подразделены на 13 параграфов. Общий обьем диссертации - 119 страниц машинописного текста, список литературы включает 68 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обзор по теме работы и смежным вопросам. Подчеркивается, что глубокие исследования по атомарным функциям и их приложение к различным вопросам анализа были впервые предприняты В. А. Рвачевым. В настоящей работе рассматриваются финитные бесконечно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие линейным ФДУ типа

$$Ly(x) = \lambda \sum_{k=1}^{M} C_k y(ax - b_k) ,$$

где

$L=D^J+a_1 D^{J-1}+ \cdots +a_J; D = \frac{d}{dx}$; $|a| > 1$: $a_i, b_k, \lambda, C_k \in R$; $i = \overline{1,J}$.

В главе 1 описаны а.ф. $up(x)$, $up(x/h)$, $y^*_{k,h}(x)$, $\sigma_j(x)$, $h_j(x)$, $1_j(x)$. Введены пространства неквазианалитических функций UP_j, H_ρ, H_α, H_ω, A_j, B_j, которые используются в дальнейшем. Для удобства применения при доказательстве новых теорем приведены без доказательства лемма о мажоранте (Л.1), основная лемма (Л.2), а также леммы Л.3 - Л.6. Сформулированы теоремы Т.1-- Т.4 и следствия к Т.3 В §4 главы 1 проводится доказательство Т.3 для пространства H_ω (доказательство автора). Соответствующая этому случаю теорема обозначается как Т.1.3.Д.

Теорема 1.3.Д. Если $f(x) \in H_\omega$, то

1. Имеет место разложение в ОРТ

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in N_j} f^{(j)}(x_{j,k}) \cdot \varphi_{j,k}(x) . \qquad (0.1)$$

2. Ряд (0.1) и ряды, полученные в результате его j - кратного дифференцирования сходятся равномерно

В главе 2 для пространства $L^1_{[-1,1]}$ автором доказана основная лемма, которая обозначена Л.2*.

Лемма 2*.

1. Для функций h_j и l_j выполняются соотношения

1.1. $\| h_j \|_{L^1_{(I)}} = 1 + \frac{1}{2^{j-1}}$;

1.2. $\| l_j \|_{L^1_{(I)}} = 1 - \frac{1}{2^{j-1}}$; $\quad j \geq 1$.

2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in A_j$. Тогда

$$\| \varphi_1 - \varphi_2 \|_{L^1_{(I)}} \leq \frac{1}{2^{j-2}} .$$

Там же в §2 введены константы

$$g_j = \sup_{\varphi \in B_j} \max_S \|\varphi\|_{L^1_{E_s}} ; \quad s = \overline{0,3}; \quad E_S = \left[-1+s/2; -1+\frac{s+1}{2}\right];$$

и

$$K_j = \sup_{\substack{\varphi \in B_j \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|\varphi^{(j)}\|_C}{\max_k |C_k(\varphi)|}; \quad k = 0,1,2, \ldots$$

Вычислены g_i и K_i для $i = \overline{0,2}$. С учетом полученных результатов выполнены оценки констант в леммах 4*, 5*, 6*.

Лемма 4*. Пусть $\varphi(x) \in A_j$, $j \geq 2$.

Тогда $\|\varphi^{(k)} - \sigma_j^{(k)}\|_{C(I)} \leq C_4^* \cdot 2^{k-j} \cdot P_{k,0}$.

где $C_4^* = 15$; $P_{k,0} = 2^{\frac{k(k+1)}{2}}$; $0 \leq k \leq j-2$.

<u>Лемма 5</u>.* Пусть 1. $\varphi(x) = \sum_{k\in N_j} C_k \cdot \varphi_{j,k}(x)$;

2. $|C\ | \le M$.

Тогда $\|\varphi^{(j)}(x)\|_{C(I)} \le M\cdot C_5^*$; $C_5^* = 4{,}9$.

<u>Лемма 6</u>*. Пусть

1. $\varphi(x) = \sum_{k\in N_j} C_k \cdot \varphi_{j,k}(x)$;

2. $|C_k| \le M\cdot P_{j,0}$, где $P_{j,0} = 2^{\frac{j(j+1)}{2}}$.

Тогда $\|\varphi^{(r)}\|_{C(I)} \le C_6^*(r)\, M$.

Рассмотрим класс $H_\rho[0,2]$ таких функций $\varphi(x)$, что

$$H_\rho[0,2] = \left\{f \in C^\infty[0,2]: |f^{(j)}(x)| \le C(f)\rho^j 2^{j(j+1)/2}; 1<\rho<2; j=0,1,2\ldots\right\}.$$

Введем пространство $\overset{\circ}{H}_\rho[0,2]$ -

$$\overset{\circ}{H}_\rho[0,2] = \left\{f \in C^\infty[0,2]: |f^{(j)}(x)| \le \alpha_j(f)\rho^j 2^{j(j+1)/2}; \lim_{j\to\infty}\alpha_j(f)=0; 1<\rho<2.\right\}$$

В пространстве $\overset{\circ}{H}_\rho[0,2]$ введем две нормы

$$\|\varphi\|_{H_{\rho,1}} = \sup_j \frac{\|\varphi^{(j)}\|_{C[0,2]}}{\rho^j\cdot 2^{j(j+1)/2}}$$

и

$$\|\varphi\|_{H_{\rho,2}} = \sup_j \frac{\max_k \cdot |\varphi^{(j)}(x_{j,k})|}{\rho^j\cdot 2^{j(j+1)/2}}.$$

Как показано в [55] нормы $\|\varphi\|_{H_{\rho,1}}$ и $\|\varphi\|_{H_{\rho,2}}$ эквивалентны, т.е.

$\exists\, a,\, b > 0$, что $\qquad a\cdot\|\varphi\|_{H_{\rho,1}} \le \|\varphi\|_{H_{\rho,2}} \le b\cdot\|\varphi\|_{H_{\rho,1}}$.

Если $1 < \rho_{1,2} < 2$ и $\rho_1 < \rho_2$, то $H_{\rho_1}[0,2] \subset \overset{o}{H}_{\rho_2}[0,2]$.

Следует отметить - пространство $\overset{o}{H}_{\rho}$ с нормой $\|\varphi\|_{H_{\rho,2}}$ изометрично пространству c_0, где c_0 - пространство стремящихся к нулю последовательностей с $\|x\|_1 = \sup_n |x_n|$, т.е.

$$c_0 = \left\{ x_n:\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0;\ \ n = 1,2,\ldots \right\}$$

В главе 3 рассмотрены вопросы восстановления бесконечно дифференцируемых функций из класса $\overset{o}{H}_{\rho}$ по информации о значениях производной этой функции в точках $\tilde{x}_{j,k}$, близких к $x_{j,k}$, т.е. исследована возможность изменения ("шевеления") $x_{j,k}$ на $\tilde{x}_{j,k}$ таким образом, чтобы по значениям $f^{(j)}(\tilde{x}_{j,k})$ в новом наборе точек тоже можно было восстановить $f(x)$ с помощью ОРТ. Доказана теорема 3.1 однозначной восстановимости функций $f(x)$, принадлежащих классу $\overset{o}{H}_{\rho}$.

<u>Теорема 3.1</u>. Пусть $1 < \rho < 2$. Существует $\Delta_\rho > 0$, что для любых $\tilde{x}_{j,k}$, для которых выполняется

$$|x_{j,k} - \tilde{x}_{j,k}| < \Delta_\rho\cdot 2^{1-j}, \quad \text{где}$$

$x_{j,k} = k\cdot 2^{1-j}$, если $j > 0$, $x_{0,k} = k \in \{0;\pm1\}$

для любого набора $C_{j,k}$, у которого $\lim_{j\to\infty} C_{j,k} = 0$

существует единственная функция $f(x)$

из класса $\overset{o}{H}_{\rho}[-1,1]$ такая, что

$$f^{(j)}(\tilde{x}_{j,k}) = C_{j,k}\cdot\rho^{j}\cdot 2^{j(j+1)/2}$$

и
$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in N_j} C_{j,k} \cdot \Phi_{j,k,\rho}(x).$$

где
$$\Phi_{j,k,\rho}(x) = \rho^j \cdot 2^{j(j+1)/2} \cdot \tilde{\varphi}_{j,k}(x) \in \overset{o}{H}_{\rho}[-1,1],$$

Отметим, что
$$\Phi^{(j)}_{m,k,\rho}(\tilde{x}_{j,s}) = \rho^m \cdot 2^{m(m+1)/2} \cdot \delta^m_j \cdot \delta^k_s ,$$

δ^m_j ; δ^k_s - символы Кронекера.

В банаховых пространствах функции $\Phi_{j,k,\rho}(x)$ образуют базисы - всякая функция $\varphi(x) \in \overset{o}{H}_{\rho}[-1,1]$ представима в виде ряда
$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in N_j} d_{j,k} \cdot \Phi_{j,k,\rho}(x)$$

и это разложение единственно, причем
$$d_{j,k} = \varphi^{(j)}(\tilde{x}_{j,k}) \cdot \rho^{-j} \cdot 2^{-\frac{j(j+1)}{2}} .$$

В этой же главе с помощью теоремы 3.2. построен ОРТ в окрестности точек $x_{j,k}$. Если некоторая функция $\varphi(x) \in \overset{o}{H}_{\rho}$, тогда обозначим
$$\varphi_r(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k\in N_l} C_{l,k}(\varphi) \cdot \tilde{\varphi}^{(r)}_{l,k}(x), \qquad (0.2)$$

где $C_{l,k}(\varphi) = \varphi^{(l)}(\tilde{x}_{l,k})$, $l = 0,1,2,\dots;$ $k \in N_l$.

<u>Теорема 3.2</u>. Пусть $\varphi(x) \in \overset{o}{H}_{\rho}$ и числа $C_{l,k}(\varphi)$ удовлетворяют неравенствам

$|C_{1,k}| \le C \cdot \rho^{l} \cdot P_{1,c}$, $\quad 1 < \rho < 2$. Тогда

1. Ряд $\varphi_r(x)$ (0.2) сходится равномерно со всеми своими производными.

2. $c_0(x) \in \overset{\circ}{H}_\rho$.

3. $\varphi(x) = \varphi_0(x)$

В §3 главы 3 с помощью ОРТ доказана теорема 3.3 единственности решений в многоточечных краевых задачах для ФДУ вида

$$y'(x) = \lambda y(2x), \qquad \lambda \ne 2, \ |\lambda| < 4 \qquad (0.3)$$

Обозначим $y_1(x)$, $y_2(x)$ через $y_{1;2}(x)$.

Теорема 3.3.

1. Пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ ограниченные на R_+^+ т.е.
$$|y_{1;2}(x)| < C.$$
2. Совпадают в нуле и в четных целочисленных значениях аргумента, т.е. $y_1(2k) = y_2(2k)$, $k = 0;1;2;\ldots$
3. Являются решениями (0.3), т.е.
$$y'_{1;2}(x) = \lambda y_{1;2}(2x); \quad \lambda \ne 2; \quad |\lambda| < 4.$$

Тогда
$$y_1(x) \equiv y_2(x); \qquad x \in R^+ = [0,\infty).$$

В главе 4 в §1 построены точные решения уравнения вида $y'(x) - ky(x) = \lambda y(2x)$. Построение точных решений выполнено при использовании доказанной теоремы 4.1. о "начальных множествах".

Теорема 4.1 Для решений уравнения вида
$$k_1 f\left[\frac{z+h}{2}\right] - k_2 f\left[\frac{z-h}{2}\right] - \lambda f\left[z\right] = 0.$$
существуют два непересекающихся отрезка ("начальные множества") $E_0^{(1)}$ и $E_0^{(2)}$ таких, чт две произвольные начальные функции $f^{(1)}(z)$ и

$f^{(2)}(z)$, заданные на $E^{(1)}_{\Omega}$ и $E^{(2)}_{\Omega}$, единственным образом определяют решение уравнения.

Там же доказана теорема 4.2. о приближении линейными комбинациями сдвигов функции $y_{k,h}(x)$.

Теорема 4.2. Для любой непрерывно-дифференцируемой функции $f(x)$ из интервала $E = [a;b]$, т.е. $f(x) \in C^1_E$, для любого положительного ε существуют $h > 0$ и такие коэффициенты T^h_j, что

$$\|f(x) - \sum_j T^h_j \cdot y^*_{k,h}(x - jh)\|_{C^1_E} \le \varepsilon,$$

где $$y^*_{k,h}(x) = \frac{y_{k,h}(x)}{y_{k,h}(0)}.$$

В §2 главы 4 теоремой 4.3. доказана плотность решений в виде линейных комбинаций сдвигов сжатий а.ф. $y_{k,h}(x)$ для ФДУ вида уравнения

$$y'(x) - ky(x) = \lambda y(2x)$$

в пространстве всех ограниченных решений на любом интервале.

Теорема 4.3 Для любого решения $\varphi(x)$ уравнения

$$y'(x) - ky(x) = \lambda y(2x),$$

для любого $\varepsilon > 0$ на интервале Q, при любом натуральном s существует h и точные решения приведенного уравнения φ^* вида

$$\varphi^*(x) = \sum_k C_k \cdot y_{k,h}\left[x - k\cdot 2^{-s}\right], \quad C_k \in R;$$

такие, что $\|\varphi - \varphi^*\|_{C^s_Q} < \varepsilon$.

Автор выражает глубокую признательность В.А.Рвачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Положения, выносимые на защиту.

1). Построение обобщенных рядов Тейлора (ОРТ) для неквазианалитического класса функций $\overset{\circ}{H}_{\rho}$ для точек $\tilde{x}_{n,k}$.

2) Решение вопроса об однозначном восстановлении функций из некоторого неквазианалитического класса по набору значений n - ой производной в точках $\tilde{x}_{n,k}$.

3). Уточнение оценок констант в основных леммах и теоремах для ОРТ в пространстве неквазианалитических функций.

4). Аппроксимация а.ф. $y_{k,h}(x)$ и теорема о плотности решений в виде линейных комбинаций сдвигов сжатий а.ф. $y_{k,h}(x)$ для ФДУ вида

$$y'(x) - k\cdot y(x) = \lambda\cdot y(2x).$$

Результаты по теме диссертации опубликованы в следующих работах.

1. Малицкий И.И. Применение атомарных функций для построения решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. -В кн.: Мат. методы анализа динам. систем. -Харьков.: ХАИ, -1981. -Вып. 5. -С. 48-50.

2. Малицкий И.И. О применении атомарных функций к решению дифференциально-функциональных уравнений. -В кн.: Мат. методы анализа динам. систем. -Харьков.: ХАИ, -1982. -Вып. 6. -С. 106-107.

3. Малицкий И.И. Некоторые применения обобщенного ряда Тейлора для решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. -В кн.: Мат. методы анализа динам. систем. -Харьков.: ХАИ, -1983. -Вып. 7. -С. 8-10.

4. Малицкий И.И. Обобщенные ряды Тейлора и теория существования и единственности решения для дифференциально-функциональных уравнений. -В кн.: Мат. методы анализа динам. систем. -Харьков.: ХАИ, -1984. -Вып. 8. -С. 25-29.

5. Малицкий И.И. Применение обобщенных рядов Тейлора в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. //Докл. АН УССР. -Сер. А. -1985. -N10. -С. 17-18.

6. Малицкий И.И. О приближении гладких функций линейными комбинациями сдвигов функций. -В кн.: Методы математической физики и их приложения. -Харьков.: ХАИ, -1988. -С. 96-99.

7. Малицкий И.И. К вопросу об обобщенных рядах Тейлора для некоторого класса неквазианалитических функций. Деп. рук. -Киев, УкрНИИНТИ, N99-УК93 - 04.02.93. -С. 84.

8. Малицький I.I. Апроксимація C^{∞}-функцій сплайнами безкінечної гладкості. Тези доповідей Международної конференції. -Дніпро-ськ, 26-28 травня 1993р. -С. 122.

Тип ХАИ. Зак 78 тир. 100