АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

На правах рукописи

ХАБИБУЛЛИН Булат Нурмиевич

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ВЫМЕТАНИЕ

01.01.01 - математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Харьков - 1993

Работа выполнена в Башкирском государственном университете

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Азарин В.С.

доктор физико-математических наук, профессор Ронкин Л.И.

доктор физико-математических наук, профессор Тамразов П.М.

Ведущая организация: Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра Российской АН

Защита диссертации состоится "20" сентября 1993 г. в 15 часов на заседании специализированного совета Д 016.27.02 в ФТИНТ АН Украины по адресу: 310164, Харьков, пр. Ленина, 47.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФТИНТ АН Украины.

Автореферат разослан "_____" ________________ 1993 г.

Ученый секретарь специализированного совета доктор физ.-мат.наук

В.А.Ткаченко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Предмет исследования. Одно из центральных мест в теории целых функций одного и многих комплексных переменных занимает исследование взаимосвязи между распределением нулей функции и ее поведением. В эту тематику включаются проблемы описания нулевых множеств и множеств (не-)единственности для целых функций из определенных классов и пространств. Актуальность этой проблематики, наряду с тем, что она продиктована внутренней логикой теории целых функций, естественным образом инициируется вопросами, связанными с полнотой систем функций, интерполяцией, аналитическим продолжением, представлением рядами, уравнениями свертки, со спектральным синтезом и другими проблемами.

В диссертации основные исследования вопросов, прямо или косвенно отражающих взаимосвязи между распределением нулей и поведением целой функции, сконцентрированы на следующих темах.

I. Условия вполне регулярного роста (вп.р.р.) целой в $\mathbb{C}$ функции конечного порядка на системе лучей.

2. Множества (не-)единственности для весовых пространств целых функций одной переменной.

3. Аналитические множества (не-)единственности чистой коразмерности I (дивизоры (не-)единственности) для весовых алгебр целых функций многих переменных.

4) Экстремальные оценки типа (кругового индикатора) целых в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, функций порядка ρ, делящихся на заданную целую функцию.

5. Полнота систем экспонент в пространствах функций, голоморфных в области.

6. Представление мероморфных функций в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, в виде частного целых функций минимального роста.

7. Теоремы единственности для целых функций конечного порядка с ограничениями на радиальный индикатор в $\mathbb{C}^n$.

Методика исследований в диссертации сцементирована воедино планомерным применением фундаментального в теории потенциала понятия выметания и его развития.

Тематика, отраженная в п.I, берет свое начало в работах Б.Я.Левина и А.Пфлюгера [I], 1936-1939 гг. Основная теорема о целых функциях вп.р.р., полученная ими, дает полное описание последовательности нулей целой функции вп.р.р. на всей плоскости.

Эта теорема обобщалась в работах В.С.Азарина, С.К.Балашова, А.Ф.Гришина, в цикле работ А.А.Кондратюка и др.(обзор в [2]) как для класса E_ρ целых функций конечного типа при порядке ρ , так и для более общих классов функций. Однако до недавнего времени речь, как правило, шла о вп.р.р. на множествах, совпадающих с плоскостью $\mathbb{C}$. Определенная информация о вп.р.р. целой функции в угле может быть получена из результатов Н.В.Говорова о голоморфных функциях вп.р.р. в угле. Условия более слабые, чем вп.р.р. целой функции на одном луче (слабая регулярность, ρ -регулярность) исследовались А.Ф.Гришиным и М.Л.Содиным [3] . Эти условия можно рассматривать и как первое приближение к условиям вп.р.р. на одном луче. В общей постановке очерченную тематику можно сформулировать как следующий вопрос: каковы условия на последовательность нулей функции $f\in E_\rho$, при которых функция f вп.р.р. на замкнутом множестве $S\subset\mathbb{C}$,состоящем из лучей с началом в нуле (далее такое множество S называем системой лучей)? Такие условия для произвольной системы лучей и даже для одного угла или одного луча неизвестны в общем случае и поныне. Актуальность исследования этого вопроса вызвана еще и тем, что после работ О.В.Епифанова и В.А.Ткаченко 1973-1974 гг., о разрешимости уравнений свертки в выпуклых и ρ-выпуклых областях точные условия разрешимости их в терминах спектра характеристической функции сводятся к описанию распределения нулей целой функции вп.р.р. $f\in E_\rho$ на ρ-допустимой системе лучей S . При этом система лучей S ρ-допустима, если раствор любого дополнительного к S угла, т.е. связной компоненты дополнения $\mathbb{C}\setminus S$, меньше π/ρ . Полученный в диссертации критерий вп.р.р. $f\in E_\rho$ на S для широкого класса систем лучей S , охватывающего и ρ-допустимые системы лучей S , потребовал нового подхода, основанного на конструктивной технике выметания субгармонической функции и ее распределения масс на систему лучей S . При этом классические методы выметания меры и потенциала, разработанные Валле-Пуссеном, М.Брело, А.Картаном, М.Риссом, Н.С.Ландкофом и др., а также аксиоматические теории потенциала в силу ряда причин неприемлемы непосредственно для рассматриваемой ситуации.

Одна из классических задач, вкладывающаяся в п.2, состоит в следующем. Каковы условия на последовательность комплексных чисел $\Lambda=\{\lambda_n\}$, при которых существует целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) $f\not\equiv 0$, т.е. $f\in E_1$, такая, что обращается в нуль на последовательности Λ (пишем $f(\Lambda)=0$)
и

$$\log|f(iy)| \le p(iy), \quad y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где p - субгармоническая функция конечного типа при порядке I ?

Изучение этой задачи началось с теоремы Ф.Карлсона, полученной в начале века: при

$$p(z) = \pi b\,|\operatorname{Im} z| \tag{2}$$

и $\Lambda = \mathbb{N}$ существование ц.ф.э.т. $f \not\equiv 0, f(\mathbb{N}) = 0$, возможно тогда и только тогда, когда $b \geqslant 1$. Этот результат неоднократно уточнялся и обобщался в работах Т.Карлемана, А.Ф.Леонтьева, Б.Я.Левина, Ж.Кахана, Л.А.Рубеля, В.Фукса и др. для случая (2) прежде всего в связи с вопросами полноты системы экспонент в пространствах функций, голоморфных в областях типа полосы. При этом на последовательность Λ накладывались жесткие условия близости к положительной полуоси $\mathbb{R}_+$ и определенной регулярности распределения точек из Λ.

В случае, когда Λ - произвольная последовательность <u>положительных</u> чисел и функция p имеет вид (2) или $p(z) = \log|g(z)|$, где g - ц.ф.э.т., имеющая нули в правой полуплоскости <u>только на</u> $\mathbb{R}_+$, полное решение сформулированной задачи было дано в совместной работе П.Мальявена и Л.А.Рубеля [4].

Другая крайняя ситуация относительно результата П.Мальявена и Л.А.Рубеля была рассмотрена в работе И.Ф.Красичкова-Терновского [5] в связи с задачей спектрального синтеза. В [5] показано, что для последовательности $\Lambda \subset i\mathbb{R}_+$ существование прилюбом $\varepsilon > 0$ ц.ф.э.т. $f_\varepsilon \not\equiv 0$, такой, что $f_\varepsilon(\Lambda) = 0$ и $\log|f_\varepsilon(iy)| \le$ $\le \varepsilon|y|$, $y \in \mathbb{R}$, эквивалентно соотношению $\Lambda(t) = O(t)$, $t \to +\infty$, где $\Lambda(t)$ - число точек последовательности Λ в круге $|z| \le t$.

Актуальность распространения этих результатов на последовательности <u>комплексных</u> чисел Λ становится очевидной, если учесть, что, в частности, исследование полноты системы экспонент $\mathcal{E}(\Lambda) =$ $= \{\exp \lambda z : \lambda \in \Lambda\}$ в пространстве функций, голоморфных в неограниченной выпуклой области $G \subset \mathbb{C}$, сводится к решению сформулированной выше задачи. Такое распространение в диссертации достигается с помощью новой конструкции выметания субгармонической функции на прямую в $\mathbb{C}$. При этом результат выметания δ-субгармоническая функция, т.е. разность субгармонических функций, с распределением зарядов (заряд = вещественнозначная мера) на этой прямой, что существенно отличается от классического выметания.

Проблематика пункта 2 в общей формулировке состоит в следующем. Пусть E - некоторое пространство целых функций в $\mathbb{C}$. При каких условиях на последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ она является множеством единственности для E, т.е. всякая целая функция $f \in E$, обращающаяся в нуль на Λ, тождественно равна нулю (в противном случае Λ - множество неединственности для E)?

Необходимость исследования этого вопроса для различных пространств E, в частности, для весовых пространств, задаваемых ограничениями на рост в бесконечности, возникает в самых разнообразных задачах, например, в связи с вопросами полноты и интерполяции. Поэтому круг известных необходимых или достаточных условий, при которых последовательность Λ является множеством (не-)единственности для различных пространств E трудно обозрим. В то же время результаты законченного характера, когда не накладывается никаких специальных ограничений на расположение или определенную регулярность распределения точек из Λ, редки. Известно два нетривиальных основных результата, в которых описание множеств (не-) единственности для весового пространства E дается в завершенной форме и множества неединственности для E не совпадают, вообще говоря, с последовательностью нулей функций из E.

Первый из них относится к алгебре функций конечного λ-типа $E(\lambda)$, где $\lambda(t)$, $t \geq 0$, - непрерывная неотрицательная возрастающая функция (<u>функция роста</u>). Алгебра $E(\lambda)$ состоит из целых функций f, удовлетворяющих оценке

$$\log|f(z)| \leq A_f \lambda(A_f|z|) + A_f, \tag{3}$$

A_f - постоянная. В совместной работе Л.А.Рубеля и Б.А.Тейлора [6] при некоторых ограничениях на функцию роста, а затем через несколько лет в статье Д.Майлза [7], 1972 г., без каких-либо ограничений установлено, что последовательность Λ - множество неединственности для $E(\lambda)$ тогда и только тогда, когда существует постоянная A такая, что $N_\Lambda(r) \leq A\lambda(Ar) + A$, $r \geq 0$, где

$$N_\Lambda(r) = \int_0^r \frac{\Lambda(t)}{t} dt, \quad 0 \notin \Lambda \tag{4}$$

История доказательства этого результата показывает, что точное описание распределения нулей целых функций из заданного пространства

(для $E(\lambda)$ в 1968 г., [6]) отнюдь не обеспечивает полной информации о множествах (не)-единственности.

Один из глубоких результатов теории целых функций - это теорема Берлинга - Мальявена [8] о радиусе полноты системы экспонент $\{exp\ i\lambda_n x\},\ \Lambda=\{\lambda_n\}$, который можно трактовать и как описание множеств единственности для пространства, состоящего из ц.ф.э.т. f, ограниченных на $\mathbb{R}$ и таких, что $h_f(\pm\pi/2)<a$, где h_f - индикатор роста f.

Важнейший тип весового пространства целых функций - пространство $E[\rho,h)$, состоящее из целых функций $f\in E_\rho$ с индикатором $h_f(\theta)<h(\theta),\theta\in\mathbb{R}$, где h - ρ-тригонометрически выпуклая 2π-периодическая строго положительная функция. Полное описание множеств единственности для пространств $E[\rho,h)$ при $\rho=1$ позволило бы получить критерий полноты системы экспонент $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве $H(G)$ функций, голоморфных в ограниченной выпуклой области $G\subset\mathbb{C}$ с опорной функцией $h(-\theta)$, в терминах распределения точек из Λ. Законченное описание множеств единственности для $E[\rho,h)$ в настоящее время неизвестно ни для каких $\rho>0$ и $h<+\infty$. Конструктивный подход к получению, например, достаточных условий, при которых Λ - множество неединственности для $E[\rho,h)$, основанный на дополнении последовательности Λ до множества нулей функции $f\not\equiv 0$ из $E[\rho,h)$ затруднителен. Прежде всего это связано со сложной структурой распределения нулей функций из $E[\rho,h)$.

Вышеизложенное делает актуальной проблему разработки новых неконструктивных методов описания множеств (не-)единственности. Один из таких методов интенсивно развивается в настоящее время В.С.Азариным и В.Б.Гинером применительно к пространству $E[\rho,h)$. Этот метод опирается на теорию предельных множеств в смысле В.С.Азарина. В нашей работе избран другой подход, основанный на теореме Л.Кусиса о наименьшей супергармонической мажоранте [9], позволяющей выразить значения этой мажоранты в точках $z\in\mathbb{C}$ через выметания (относительно конуса супергармонических в $\mathbb{C}$ функций) меры Дирака δ_z, т.е. единичной массы в точке z.

При переходе к целым функциям в $\mathbb{C}^n$, $n>1$, одним из возможных и естественных аналогов последовательностей точек в $\mathbb{C}$, не имеющих в $\mathbb{C}$ предельных точек, являются аналитические множества $\Lambda\subset\mathbb{C}^n$ чистой коразмерности 1, которые совпадают с нулевым множеством некоторой целой функции F_Λ. Задаче описания анали -

тических множеств неединственности чистой коразмерности (см.п.3) для алгебр целых функций можно придать следующую более общую формулировку. Через $I(F)$ обозначаем класс всех целых функций, делящихся на целую функцию F в кольце $H(\mathbb{C}^n)$ всех целых функций в $\mathbb{C}^n$. Каковы условия на функцию F или на распределение ее нулей, при которых идеал $I(F)\cap E$, где E - заданная подалгебра в $H(\mathbb{C}^n)$, нетривиален, т.е. содержит ненулевую функцию?

Ряд результатов об оценках роста целой функции при заданных оценках роста характеристик нулевого множества этой функции можно рассматривать как условия нетривиальности идеалов $I(F)\cap E$, где E - весовая алгебра (В.Штолль, Л.И.Ронкин, Р.О.Куяла, В.А.Тейлор, Г.Скода, П.Лелон и Л.Груман и др., обзор в [10]). При этом, как правило, ненулевая функция $f = Fh \in I(F)\cap E$ такова, что либо целая функция h не обращается в нуль на $\mathbb{C}^n$, либо h довольно просто конструируется из самой функции F. Новый метод, основанный на принадлежащем Г.Бауэру и Г.Мокободзки (см.П.-А.Мейер [11]) понятии абстрактного выметания и на многомерном обобщении теоремы П.Кусиса о наименьшей мажоранте (подробнее ниже), позволяет охватить ситуации, когда конструкция мультипликатора h отмеченными способами не улавливается. Более того, метод применим к оценкам (см. п.4) типа (кругового индикатора) при порядке ρ ненулевых целых функций минимального роста из $I(F)$, точным при $\rho \le 1$, и может быть использован для получения новых достаточных условий для множеств единственности целых функций конечного порядка с ограничениями на радиальный индикатор, что отражает тематику, отмеченную в п.7. В важном частном случае $\rho = 1$ эти результаты, по существу, теоремы о (не-)полноте системы $\mathcal{E}(\Lambda) = \{\exp\langle z,\lambda\rangle : \lambda \in \Lambda\}$, $\langle z,\lambda\rangle = z_1\lambda_1 + z_2\lambda_2 + \ldots + z_n\lambda_n$, в пространствах функций, голоморфных в областях из $\mathbb{C}^n$.

Тематика п.6 относится к задаче о представлении мероморфной функции f в $\mathbb{C}^n$, $n \ge 1$, в виде частного $f = g/h$ двух целых функций g и h по возможности минимального роста по отношению к росту характеристик функции f. Истоки этой задачи - в классическом результате Р.Неванлинны о представлении мероморфной функции ограниченной характеристики в единичном круге из $\mathbb{C}$ отношением ограниченных голоморфных функций. Эта задача в $\mathbb{C}$ и при условии, что g и h не имеют общих нулей, достаточно полно рассмотрена А.А.Гольдбергом [12] . Если не накладывать ограничений на множества нулей функций g и h, то для $n = 1$ и при условии

$$T_f(r) \le \lambda(r), \ \lambda \text{ - функция роста}, \tag{5}$$

где T_f - характеристика Неванлинны для f, Л.А.Рубель и Б.А.Тейлор [6] при некоторых ограничениях на λ, а затем Д.Майлз [7] без каких-либо условий на λ указали построение g и h такое, что

$$\log(|g(z)| + |h(z)|) \le A\lambda(Br) + C, \quad r = |z| \ge 0, \tag{6}$$

где A, B, C - постоянные.

Для $n > 1$ первые результаты по задаче представления при условии (5) и для $\lambda(r) = const\, r^{\rho}$ принадлежат П.Лелону и В.Штоллю. Дальнейшее продвижение для функций многих переменных при условии медленного роста или весьма специальном условии "сбалансированности" функции λ осуществлено Б.А.Тейлором и Р.О.Куялой [13], получившими представление с оценкой (6). Наконец, при условии плюрисубгармоничности функции $\log \lambda(|z|)$, $z \in \mathbb{C}^n$, Г.Скода получил в [14] представление с несколько худшей оценкой, чем в (6), а именно: перед функцией λ стоит степенной множитель r^k, где k зависит от размерности n. Важно отметить, что функция $\log T_f(|z|)$, вообще говоря, не плюрисубгармонична, т.е. нельзя полагать $\lambda(r) = T_f(r)$.

Аналог задачи о представлении для δ-субгармонических функций был рассмотрен О.В.Веселовской, 1984 г..

Анализ перечисленных результатов по задаче представления указывает на определенный разрыв между случаями медленного роста мажоранты λ как в методах (метод $\partial\bar{\partial}$-задачи у Г.Скоды и метод рядов Фурье у Р.О.Куялы), так и силе оценок и условий на функцию роста λ. Таким образом, возникает необходимость единого подхода к задаче представления мероморфной функции f, который давал бы возможность оценивать целые функции минимального роста g и h в представлении $f = g/h$ не через мажоранту λ из (5) со специальными свойствами, а через саму характеристику Неванлинны T_f функции f и другие ее характеристики.

В соответствии с изложенным цели диссертации состоят в получении критерия вп.р.р. целых функций на возможно более широком классе систем лучей в терминах распределения нулей этих функций; описании множеств единственности для классов ц.ф.э.т. в $\mathbb{C}$, выделяемых ограничением на рост вдоль фиксированной прямой; в разработке общего неконструктивного метода описания множеств (не-)единственности для широкого класса весовых пространств целых функций одной переменной и его применений, в частности, к вопросам, связанным с полнотой систем экспонент в пространствах голоморфных функций; распространении этого метода и его применений на целые функции многих переменных, включая приложения к задаче представления мероморфных функций многих переменных в виде частного целых функций минимального роста.

Научная новизна и практическая ценность работы. Разработан новый подход к исследованию распределения нулей целых функций вп.р.р. на системе лучей и для широкого класса систем лучей $S \subset \mathbb{C}$ получен критерий вп.р.р. функции $f \in E_\rho$ на S.

Установлены условия окончательного характера на последовательности комплексных чисел Λ, при которых существует ц.ф.э.т. $f \not\equiv 0$, $f(\Lambda)=0$, с заданными ограничениями на рост вдоль прямой. Последнее позволило получить критерий полноты системы экспонент $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве $H(G)$ в терминах распределения показателей Λ, когда G - произвольная неограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Этот критерий, в котором не накладывается никаких специальных ограничений на последовательность Λ - первый результат такого рода для пространств $H(G)$. Для получения перечисленных результатов разработаны новые конструктивные техники выметания субгармонической функции и меры на систему лучей в $\mathbb{C}$, которые могут быть полезны и в других вопросах, связанных с исследованием поведения целых и субгармонических функций на лучах в $\mathbb{C}$.

Разработан новый общий подход к описанию множеств (не-)единственности для широкого класса весовых пространств целых функций одной переменной. С помощью этого метода удается дать новые неконструктивные доказательства известных результатов об описании множеств единственности и получить новые теоремы (не-)единственности для целых функций, о полноте систем экспонент $\mathcal{E}(\Lambda)$ и об устойчивости полноты при сдвигах показателей Λ в пространствах голоморфных функций. В целях распространения этого подхода на функции многих переменных получена теорема о наименьшей мажоранте, позволяющая, в частности, дать через посредство абстрактного выметания двойственное определение наименьшей плюрисубгармонической мажоранты для функции в области $G \subset \mathbb{C}^n$, новое при $G \neq \mathbb{C}$.

С помощью теоремы о мультипликаторе, опирающейся на теорему о наименьшей мажоранте, установлены критерии для аналитических множеств единственности коразмерности I для весовых алгебр целых функций в $\mathbb{C}^n$; получены оценки наименьшего возможного типа и кругового индикатора целых функций, делящихся на заданную целую функцию (точные при порядке $\rho \le 1$); даны результаты законченного характера о представлении мероморфной функции в $\mathbb{C}^n$ в виде частного целых функций минимального роста, среди которых есть и учитывающие тип (круговой индикатор) целых функций, участвующих в представлении; предложен общий подход к получению теорем единственности для целых функций многих переменных и намечены перспективы распространения этого подхода на голоморфные функции многих переменных в области из $\mathbb{C}^n$.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [22 - 36].

Результаты диссертации докладывались на семинарах в Башгосуниверситете, в Институте математики в г. Уфе, в Харьковском государственном университете, на XI Всесоюзной школе по теории операторов (Челябинск, 1986 г.), на Всесоюзном симпозиуме по теории приближения функций (Уфа, 1987 г.), на УП Всесоюзной конференции по комплексному анализу и дифференциальным уравнениям (Черноголовка, 1989 г.), на Республиканской школе-семинаре в Харькове (1990 г.).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, вводного § 0 и шести глав. Общий объем работы 298 страниц. Список литературы - 126 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава I. Выметание на систему лучей и целые функции вполне регулярного роста. Основной прием, использованный в этой главе - это сведение исследования поведения субгармонической функции на системе лучей $S \subset \mathbb{C}$ к изучению субгармонической функции, совпадающей с u на S, с распределением масс, сосредоточенным на S. Это потребовало разработки техники выметания на систему лучей меры и субгармонической функции. Конструкция выметания меры и некоторые свойства выметенной меры рассматриваются в первых двух параграфах.

Через (α,β) и $[\alpha,\beta]$ обозначаем соответственно углы $\alpha < \arg z < \beta$ и $\alpha \le \arg z \le \beta$ в $\mathbb{C}$; $\omega(\zeta, E; (\alpha,\beta))$ - гармоническая мера пересечения борелевского множества E с границей угла (α,β) в точке $\zeta \in [\alpha,\beta]$ относительно угла (α,β).

Пусть S -система лучей. Гармонической мерой борелевского множества $E \subset \mathbb{C}$ в точке $\zeta \in \mathbb{C}$ относительно множества $\mathbb{C} \setminus S$ называем функцию $\omega(\zeta, E; \mathbb{C} \setminus S)$, равную $\omega(\zeta, E; (\alpha,\beta))$ для точек ζ, попавших в дополнитель -

ные к S углы (α,β) , и равную характеристической функции $\chi_E(\zeta)$ множества E при $\zeta\in S$.

Определение. Пусть μ - мера, S - система лучей. Неотрицательную функцию μ_S^b борелевских подмножеств $E\subset\mathbb{C}$, определенную по правилу

$$\mu_S^b(E)=\int\omega(\zeta,E;\mathbb{C}\setminus S)\,d\mu(\zeta), \tag{7}$$

будем называть выметанием меры μ на S , или выметанием из $\mathbb{C}\setminus S$.

Интеграл в (7) априори не конечен для компактов $E\subset\mathbb{C}$. Критерий того, что μ_S^b - мера, т.е. конечная на компактах функция множеств, дает приводимая ниже теорема I.I.I.

Через $D(t)\subset\mathbb{C}$ обозначаем круг радиуса t с центром в нуле; для меры μ полагаем $\mu(t)=\mu(D(t))$. Класс всех мер μ конечного типа при порядке ρ , т.е. таких, что $\mu(t)=O(t^\rho)$, $t\to+\infty$, обозначаем через $\mathcal{M}_\rho$.

Систему лучей S называем допустимой для меры $\mu\in\mathcal{M}_\rho$, если для любого дополнительного к S угла (α,β) раствора $\beta-\alpha=\pi/\gamma\geqslant\pi/\rho$ конечен интеграл

$$\int\limits_{(\alpha,\beta)\setminus D(1)} -\operatorname{Im}\frac{1}{(\zeta e^{-i\alpha})^\gamma}\,d\mu(\zeta),$$

где в знаменателе рассматривается ветвь аналитической функции, положительная на $\mathbb{R}_+$.

Теорема I.I.I. Пусть $\mu\in\mathcal{M}_\rho$, S - система лучей. Следующие утверждения эквивалентны:

I) Для некоторого $t_0>0$ выполнено $\mu_S^b(t_0)<+\infty$.

2) Система лучей S допустима для меры μ .

3) μ_S^b - мера конечного типа при том же порядке ρ .

Следующая за ней теорема I.2.I показывает, что значения интеграла по выметенной мере μ_S^b от μ_S^b -интегрируемой функции f , определенной на S , совпадает со значением интеграла по мере $\mu\in\mathcal{M}_\rho$ от гармонического продолжения функции f в $\mathbb{C}\setminus S$, что вполне согласуется с классическими схемами выметания.

Основной результат главы I сформулирован в § I.3.

Определение. Пусть u - субгармоническая функция в $\mathbb{C}$, S - система лучей. Субгармоническую в $\mathbb{C}$ функцию u_S^b , совпа -

дающую с u на S и гармоническую вне S, будем называть выметанием функции u на S, или выметание u из $\mathbb{C}\setminus S$.

Распределение масс субгармонической функции u обозначаем через μ_u.

Класс всех субгармонических в $\mathbb{C}$ функций u конечного типа при порядке ρ, т.е. таких, что $\overline{\lim}\, |z|^{-\rho} u(z) < +\infty$, обозначаем через $\mathcal{U}_\rho$.

Теорема I.3.I (основная). Пусть $u \in \mathcal{U}_\rho$ и система лучей S допустима для распределения масс μ_u, μ_u^b - выметание меры μ_u на S. Когда S состоит только из одного луча, предполагаем, что $\rho < 1$. При этих условиях существует выметание $u^b \in \mathcal{U}_\rho$ функции u на S с распределением масс μ_u^b.

Таким образом, в соответствии с теоремой I.I.I выметание субгармонической функции u на S возможно в том случае, когда выметание μ_u^b на S определяет меру на S. Более того, если растворы дополнительных к S углов не превышают π/ρ, то допустимость S для распределения масс μ_u - необходимое условие существования выметания $u^b \in \mathcal{U}_\rho$ функции $u \in \mathcal{U}_\rho$ на (теорема I.4.2).

Доказательство основного результата главы I при натуральном ρ использует важное свойство выметенной меры: если мера $\mu \in \mathcal{M}_\rho$, $\rho \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию Линделефа, то и выметание μ^b меры на допустимую для μ систему лучей S "наследует" это свойство (теорема I.4.I). Напомним, что мера (заряд) ν удовлетворяет условию Линделефа при порядке $\rho \in \mathbb{N}$, если выполнено соотношение

$$\left| \int_{1 \le |\zeta| < t} \zeta^{-\rho}\, d\mu(\zeta) \right| = O(1), \quad t \to +\infty.$$

Теорема I.5.I. В условиях и обозначениях основной теоремы I.3.I следующие утверждения эквивалентны:

I) u^b вполне регулярного роста в $\mathbb{C}$ (при порядке ρ).

2) Функции u вп.р.р. на системе лучей S и для каждого дополнительного к S угла (α,β) раствора $\pi k/\rho$, $k \in \mathbb{N}$,

существует конечный предел

$$\lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{u(te^{i\alpha})+(-1)^{k-1}u(te^{i\beta})}{t^{\rho+1}}\,dt$$

3) Мера μ_u^{b} правильно распределена (при порядке ρ).

Определения использованных терминов – в обзоре [2].

Особенно простой вид теорема I.5.I приобретает, как отмечено во вводном § 0, в случае, когда система лучей S ρ-допустима.

Последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$, не имеющую предельных точек в $\mathbb{C}$, отождествляем с целочисленной мерой, обозначаемой тем же символом Λ: $\Lambda(E) = \sum_{\lambda_n\in E} 1$.

Теорема 0.I. Целая функция $f \in E_\rho$ с последовательностью нулей Λ, перенумерованной с учетом кратности, имеет вп.р.р. на ρ-допустимой системе лучей S тогда и только тогда, когда выметание Λ_S^{b} – правильно распределенная мера (при порядке ρ).

Глава П. Выметание конечного рода и рост целой функции экспоненциального типа вдоль прямой.

Разработанная в главе I техника показывает, что выметание меры или субгармонической функции конечного типа при порядке ρ из угла раствора $\geqslant \pi/\rho$ возможно лишь при специальных условиях на меру (теорема I.I.I) или функцию (теорема I.4.2). Выметание нового типа, рассматриваемое в главе П, дает возможность преодолеть эти препятствия, если пожертвовать некоторыми требованиями к выметанию меры или функции. Достаточно допустить, чтобы выметание μ^B меры μ на систему лучей S могло быть зарядом, а выметание u^B функции $u \in \mathcal{U}_\rho$ на S являлось δ-субгармонической функцией с распределением зарядов μ_u^B.

Конструкция выметания рода q, где q – целое неотрицательное число, применяется и детально рассматривается в главе П лишь для случая $q = 1$ (при $q = 0$ оно совпадает с выметанием, представленным в главе I), когда S – мнимая ось. Общая ситуация произвольных q и S и перспективы дальнейшего применения вынесены в замечания, поскольку в идейном плане техника выметания рода $q > 1$ несет мало принципиально нового по сравнению со случаем $q = 1$, но требует технически более громоздких выкладок.

Для $E \subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{mes} E$ обозначаем лебегову меру на мнимой оси множества $E \cap i\mathbb{R}$, $\omega_i(\zeta, E)$ – гармоническая мера множества $E \cap i\mathbb{R}$ в точке $\zeta \in \mathbb{C}$ относительно той полуплоскости (правой или левой) в замыкании которой лежит точка ζ.

Гармоническим зарядом рода I в точке $\zeta \neq 0$ относительно $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}$ называем функцию борелевских множеств $E \subset \mathbb{C}$, определенную как

$$\Omega(\zeta, E) = \omega_i(\zeta, E) - \frac{mes\, E}{\pi}\left|Re\frac{1}{\zeta}\right|.$$

Заряд ν на $\mathbb{C}$ называем зарядом конечного типа (при порядке I), если его полная вариация $|\nu|$ - мера конечного типа при порядке I.

Определение. Пусть ν - заряд конечного типа и $0 \notin supp\,\nu$. Выметанием рода I заряда ν на мнимую ось будем называть заряд ν^B с носителем на $i\mathbb{R}$, определенный по правилу

$$\nu^B(E) = \int_{\mathbb{C}} \Omega(\zeta, E)\, d\nu(\zeta),$$

E - борелевские множества в $\mathbb{C}$.

Аналогом теоремы I.3.I для выметания рода I является

Теорема 2.I.I. Пусть u - δ-субгармоническая функция с распределением зарядов ν конечного типа (при порядке I), $0 \notin supp\,\nu$ и функция u представлена в виде разности субгармонических функций порядка I. Тогда найдется δ-субгармоническая функция u^B с распределением зарядов ν^B, представимая в виде разности субгармонических функций порядка I и такая, что $u = u^B$ на $i\mathbb{R}$ вне множества нулевой емкости.

Вообще говоря, выметание рода I меры или субгармонической функции конечного типа на мнимую ось имеет более высокую категорию роста, чем исходные мера или функция. Эти осложнения удается снять, если наложить на выметаемую меру (заряд) ν специальное условие:

$$\left|\int_{1 \le |\zeta| \le t} \left|Re\frac{1}{\zeta}\right| d\nu(\zeta)\right| = O(1). \qquad (A)$$

При условии (A) выметание ν^B заряда конечного типа ν по-прежнему заряд конечного типа (теорема 2.2.I); если заряд ν сосредоточен вне пары вертикальных углов

$$W_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |Re\,\zeta| \le \delta|\zeta|\}, \text{ где } \delta > 0, \qquad (B)$$

то существует постоянная $c > 0$ такая, что (теорема 2.2.2)

$$|\nu^B|([i(y-\tau), i(y+\tau)]) \le c\tau, \quad 0 \le \tau \le 1, \; y \in \mathbb{R};$$

как показано в § 2.3, выметание ν^B "наследует" условие Линделефа при порядке I (теорема 2.3.I).

Применения выметания рода I к целым функциям касаются задачи, сформулированной при (I). В § 2.4 доказаны основные результаты о росте ц.ф.э.т. вдоль $i\mathbb{R}$, обращающихся в нуль на последовательности $\Lambda\subset\mathbb{C}$.

Для последовательности $\Lambda=\{\lambda_n\}\subset\mathbb{C}$, не имеющей предельных точек в $\mathbb{C}$, определим логарифмическую функцию интервалов

$$l_\Lambda(r,R)=\max\{l_\Lambda^-(r,R),\, l_\Lambda^+(r,R)\},$$

где

$$l_\Lambda^-(r,R)=\sum_{\substack{r\le|\lambda_n|<R\\ \operatorname{Re}\lambda_n<0}}-\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_n},\quad l_\Lambda^+(r,R)=\sum_{\substack{r\le|\lambda_n|<R\\ \operatorname{Re}\lambda_n>0}}\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_n}.$$

Для функции $p\in\mathcal{U}_1$ полагаем

$$J_p(r,R)=\frac{1}{2\pi}\int_r^R\frac{p(iy)+p(-iy)}{y^2}\,dy.$$

Теорема 2.4.I. Если при некотором $\delta>0$ функция $p\in\mathcal{U}_1$ гармонична внутри пары углов W_δ из (8) и $\Lambda\cap W_\delta=\varnothing$, то следующие утверждения эквивалентны:

I) Существует ц.ф.э.т. $f\not\equiv 0$ такая, что $f(\Lambda)=0$ и выполнено (I).

2) Существует постоянная M такая, что

$$l_\Lambda(r,R)\le J_p(r,R)+M,\quad 1\le r<R<+\infty.$$

При $\Lambda\subset\mathbb{R}_+$ и функции p специального вида теорема 2.4.I дает основной результат Л.А.Рубеля и П.Мальявена из [4].

Теорема 2.4.2. Пусть Λ - последовательность комплексных чисел конечной верхней плотности, т.е. $\Lambda(t)=O(t)$, $t\to+\infty$, и $p\in\mathcal{U}_1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

I) Для любого $\varepsilon>0$ найдется ц.ф.э.т. $f_\varepsilon\not\equiv 0$ такая, что $f_\varepsilon(\Lambda)=0$ и

$$\log|f_\varepsilon(iy)|\le p(iy)+\varepsilon|y|,\quad y\in\mathbb{R}\setminus E_\varepsilon,$$

где E_ε - множество конечной лебеговой меры на $\mathbb{R}$.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная M_ε такая, что

$$\ell_\Lambda(r, R) \le J_p(r, R) + \varepsilon \log \frac{R}{r} + M_\varepsilon, \quad 1 \le r < R < +\infty.$$

Из теорем 2.4.I и 2.4.2 легко вытекают (§ 2.5) условия полноты экспоненциальной системы

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{ z^{k-1} e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda, k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le \Lambda(\{\lambda\}) \}$$

с показателями $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ в замкнутой полосе и в произвольной неограниченной выпуклой области.

Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в замкнутой полосе $|\operatorname{Im} z| \le A$, если любую функцию, голоморфную в открытой полосе $|\operatorname{Im} z| < A$ и непрерывную во всех конечных точках замкнутой полосы $|\operatorname{Im} z| \le A$, можно аппроксимировать с любой точностью конечными линейными комбинациями функций из $\mathcal{E}(\Lambda)$ в топологии равномерной сходимости на компактах из замкнутой полосы $|\operatorname{Im} z| \le A$.

Теорема 2.5.I. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$|\operatorname{Re} \lambda_n| \ge \delta |\lambda_n|, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

при некотором $\delta > 0$. Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в замкнутой полосе $|\operatorname{Im} z| \le \pi b$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{1 \le r < R < +\infty} \left(\ell_\Lambda(r, R) - b \log \frac{R}{r} \right) = +\infty.$$

Условие отделенности (9) от мнимой оси по существу. Во всяком случае, как показывает пример 2.5.I, при условии $\Lambda \cap i\mathbb{R} \ne \emptyset$ получить информацию о полноте системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ только с помощью логарифмической функции интервалов $\ell_\Lambda(r, R)$, вообще говоря, невозможно.

Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в области $G \subset \mathbb{C}$, если она полна в пространстве $H(G)$ в топологии равномерной сходимости на компактах.

Пусть G - выпуклая область в $\mathbb{C}$, $K_G(\theta) = \sup\{ \operatorname{Re} z e^{-i\theta};\ z \in G \}$ - опорная функция этой области. Наименьшей шириной, или широтой области G называется [I6] величина

$$\Delta_G = \inf_\theta \left\{ K_G\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) + K_G\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) \right\}. \qquad (10)$$

Если выпуклая область G неограничена, то хотя бы для одного значения θ, при котором $\inf$ в (10) достигается, луч $\{\alpha + t\exp(i\theta):\ t \geq 0\}$ при некотором $\alpha \in G$ лежит в области G. Каждое такое направление θ называем направлением звездности области G.

Последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ сопоставим логарифмическую блок-плотность

$$D_\ell(\Lambda) = \overline{\lim_{a \to +\infty}} \frac{1}{\log a} \overline{\lim_{r \to +\infty}} \ell_\Lambda(r, ar).$$

Для $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ она введена в [4].

Теорема 2.5.3. Пусть G - выпуклая неограниченная область в $\mathbb{C}$ широты $2\pi\Delta$, θ -направление звездности области G. Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в G тогда и только тогда, когда Λ не является последовательностью конечной верхней плотности или $D_\ell(\Lambda_\theta) \geq \Delta$, где

$$\Lambda_\theta = \{\lambda \exp(i\theta):\ \lambda \in \Lambda\}$$ - поворот Λ на угол θ.

Из этого критерия полноты можно извлечь и утверждения качественного характера. Так, если Λ - последовательность нулей ц.ф.э.т. и неограниченная выпуклая область G звездна в направлении 0, то из полноты системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в G следует полнота "правой половины" $\mathcal{E}(\Lambda_+)$ этой системы в области G, где $\Lambda_+ = \{\lambda \in \Lambda:\ \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ (следствие теоремы 2.5.3).

Заключительный пример 2.5.2 показывает, что в утверждениях §§ 2.4, 2.5 существенны именно оценки логарифмической функции интервалов $\ell_\Lambda(r, R)$ по всевозможным интервалам $[r, R)$, а асимптотическое поведение функции $\ell_\Lambda(0, R)$ не улавливает требуемой информации.

Глава III. Множества единственности для пространств целых функций одной переменной. В этой главе разрабатывается общий подход к описанию множеств (не-)единственности для пространств целых функций в $\mathbb{C}$, задаваемых системой мажорант.

Определение [9]. Мера $m \geq 0$ с компактным носителем в $\mathbb{C}$ называется мерой Йенсена, если для любой непрерывной субгармонической в $\mathbb{C}$ функции u выполнено неравенство

$$u(0) \leq \int u\, dm.$$

Класс всех мер Йенсена обозначаем через $\mathcal{M}$.

Из определения абстрактного выметания относительно выпуклого конуса, приведенного ниже при обсуждении результатов главы IV, видно, что мера Йенсена есть выметание меры Дирака δ_0 относительно конуса всех непрерывных супергармонических функций в $\mathbb{C}$.

Определение. Субгармоническую в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функцию V называем функцией Йенсена, если существует постоянная $R>0$ такая, что

$$0 \le V(\zeta) \le \log^+ \frac{R}{|\zeta|}, \quad \zeta \ne 0. \tag{11}$$

Класс всех функций Йенсена обозначаем через $\mathcal{J}$. В §§ 3.1, 3.4 приведены свойства мер и функций Йенсена и взаимосвязь между ними. Из основных фактов отметим следующие.

Предложение 3.1.4. Пусть $m \in \mathcal{M}$ и G - односвязная область, содержащая 0 и $\operatorname{supp} m$,

$$V_m(\zeta) = \int \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| dm(z), \quad \zeta \ne 0. \tag{12}$$

Для любой субгармонической в G функции u_μ с распределением масс μ такой, что $u_\mu(0) \ne -\infty$, справедливо равенство

$$\int u_\mu\, dm = \int V_m\, d\mu + u_\mu(0). \tag{13}$$

Это утверждение можно рассматривать как обобщение формулы Пуассона - Йенсена, которое получается из (13) в частном случае, когда $m=\omega(0,\cdot)$ - гармоническая мера в точке 0 относительно области $D \subset\subset G$, а $V_m(\zeta)=G_D(0,\zeta)$ - продолженная нулем вне D функция Грина области G [17] .

Предложение 3.4.1. Отображение $P: m \to V_m$ осуществляет биекцию $\mathcal{M}$ на $\mathcal{J}$.

Таким образом, определение функций Йенсена есть ни что иное, как внутреннее описание потенциалов мер Йенсена (12).

Основной результат главы III, указывающий место мер и функций Йенсена в описании множеств (не-)единственности -

Теорема 3.2.1 (основная). Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}$ - последовательность комплексных чисел, $n=1,2,\dots,\ 0\notin\Lambda$, и $M(z)$ - локально интегрируемая по мере Лебега функция в $\mathbb{C}$, ограниченная снизу в некоторой окрестности нуля, $-\infty \le M(z) \le +\infty$.

Если существует целая функция $f \not\equiv 0$ такая, что $f(\Lambda)=0$

и

$$\log|f(z)| \le M(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

то справедливо соотношение

$$\sup_{m \in \mathfrak{M}} \Big(\sum_{\lambda_n \in \Lambda} V_m(\lambda_n) - \int M\,dm \Big) < +\infty. \tag{I4}$$

Обратно, если выполнено (I4), то существует целая функция $f \not\equiv 0$, такая, что $f(\Lambda)=0$ и справедливо неравенство

$$\log|f(z)| \le \sup_{|z-\zeta|\le 1} M(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В § 3.5 в терминах функций Йенсена дается критерий множеств неединственности для весовых пространств целых функций.

Пусть $\mathcal{P}=\{p_k\}$ - система субгармонических в $\mathbb{C}$ функций, $p_k \not\equiv -\infty$ и $p_k \le p_{k+1}$, $k = 1,2,\dots$.

Через E_k обозначим пространство целых функций f, удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \le C_f \exp p_k(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где C_f - постоянная, и полагаем $E_{\mathcal{P}} = \bigcup_k E_k$.
На систему $\mathcal{P}$ налагаем следующее ограничение:

$$\forall k\ \exists l: \quad \sup_{|z-\zeta|\le 1} p_k(\zeta) \le p_l(z) + \mathrm{Const}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 3.5.I. Пусть $0 \notin \Lambda$ - последовательность в $\mathbb{C}$. Следующие утверждения эквивалентны:

I) Λ - множество неединственности для $E_{\mathcal{P}}$.

2) Существует номер k такой, что

$$\sup_{V \in \mathcal{J}} \Big(\sum_{\lambda_n \in \Lambda} V(\lambda_n) - \int V\,d\mu_{p_k} \Big) < +\infty.$$

Таким образом, функции Йенсена играют роль тестовых функций, позволяющих выяснить, является ли данная последовательность множеством неединственности для заданного пространства типа $E_{\mathcal{P}}$. Здесь прослеживается определенная параллель с ролью финитных не -

отрицательных функций при определении отношения $\leqslant$ на множестве мер или обобщенных функций.

Классическим примером пространства типа E_ρ является пространство $E[\rho, h)$. В § 3.7 приведен с некоторым дополнением вариант теоремы 3.5.I применительно к пространству $E[\rho, h)$.

Пусть ρ – положительное число. Функцию V, которая обладает всеми свойствами функций Йенсена, кроме верхней оценки в (II), которая заменяется на условие

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(te^{i\theta})\,d\theta\right)t^{\rho-1}\,dt < +\infty$$

называем <u>функцией</u> <u>Йенсена</u> <u>порядка</u> ρ. Класс всех функций Йенсена порядка ρ обозначаем через $\mathcal{J}_\rho$. Класс всех 2π-периодических ρ-тригонометрически выпуклых функций обозначаем через $\mathcal{T}_\rho$ [2]. С каждой функцией $h \in \mathcal{T}_\rho$ ассоциируется мера $d\, s_h^{(\rho)}$ на окружности:

$$s_h^{(\rho)}(\theta) = h'(\theta - 0) + \int_0^{\theta} h(\varphi)\,d\varphi .$$

Для $h \in \mathcal{T}_\rho$ и непрерывной функции k полагаем

$$S_\rho(k, h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(\theta)\, d\, s_h^{(\rho)}(\theta)$$

и для $V \in \mathcal{J}_\rho$ (предложение 3.6.4)

$$k_V^{(\rho)}(\theta) = \int_0^{+\infty} V(te^{i\theta})\, t^{-\rho-1}\,dt \in \mathcal{T}_\rho .$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность ненулевых комплексных чисел. Полагаем

$$d_h^{(\rho)}(\Lambda) = \inf d \quad , \quad D_h^{(\rho)}(\Lambda) = \inf D$$

где первый инфимум берется по всем d таким, что

$$\sup_{V \in \mathcal{J}}\left(\sum_n V(\lambda_n) - d\, S_\rho(k_V^{(\rho)}, h)\right) < +\infty,$$

а второй инфимум – по всем D таким, что

$$\sup_{V \in \mathcal{J}_\rho}\left(\sum_n V(\lambda_n) - D\, S_\rho(k_V^{(\rho)}, h)\right) < +\infty .$$

Теорема 3.7.I. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Λ - множество единственности для $E[\rho, h)$.

2) $d_h^{(\rho)}(\Lambda) \geq 1$. 3) $D_h^{(\rho)}(\Lambda) \geq 1$.

Когда $h(-\theta)$ - опорная функция ограниченной выпуклой области G , а $\rho = 1$, теорема 3.7.I - критерий полноты системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в области G (теорема 3.7.2).

Утверждение, аналогичное теореме 3.7.I, формулируется и для пространства $E[\rho, h]$ целых функций f с индикатором (при порядке ρ) $h_f(\theta) \leq h(\theta) \in \mathcal{T}_\rho$ (теорема 3.7.3). Из основной теоремы следуют также условия (не-)полноты системы экспонент

$$\{\exp(i\lambda_n x)\}, \quad n = 1,2,\dots, \tag{15}$$

в пространстве функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 3.7.4. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ - последовательность попарно различных комплексных чисел, $0 \notin \Lambda$. Если

$$\sup_{V \in \mathcal{J}} \left(\sum_n V(\lambda_n) - \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\,dx \right) \tag{16}$$

равен $+\infty$, то система (15) полна в $C[-a,a]$. Обратно, если величина (16) ограничена сверху, то система (15) неполна после удаления одной (любой) экспоненты в $C[-a,a]$.

Наряду с результатами, формулируемыми в терминах функций Йенсена, методы главы III позволяют получать утверждения и более наглядные. Так с помощью конкретных функций Йенсена и функций Йенсена порядка ρ единым способом выводятся как известные, так и новые достаточные условия для множеств единственности.

Последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 \notin \Lambda$, сопоставим считающую функцию [3]

$$\Lambda(t; k) = \sum_{|\lambda_n| \leq t} k(\arg \lambda_n),$$

где $k \in \mathcal{T}_\gamma$ при некотором $\gamma \geq 0$ и $k \geq 0$. При этом $\|k\| = \max\{k(\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$. Введем шкалу верхних (k,ρ)-плотностей $\overline{D}_k^{(\rho)}(\Lambda)$ последовательности Λ (они зависят и от γ , $k \in \mathcal{T}_\gamma$, $k \geq 0$).

При $0 \leq \gamma < \rho$ полагаем $\overline{D}_k^{(\rho)}(\Lambda) =$

$$= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{1}{2r^{\rho}} \int_1^{r} \left(\left(\frac{r}{t}\right)^{\gamma} + \left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma} \right) \frac{\Lambda(t;k)}{t}\, dt .$$

При $\gamma=\rho$ полагаем $\overline{D}_k^{(\rho)}(\Lambda) =$

$$= \overline{\lim_{a\to+\infty}} \frac{1}{\log a} \overline{\lim_{r\to+\infty}} \int_r^{ar} \frac{\Lambda(t;k)}{t^{\rho+1}}\, dt .$$

При $\gamma>\rho$ полагаем $\overline{D}_k^{(\rho)}(\Lambda) =$

$$= \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{1}{2r^{\rho}} \Big(2\|k\| N_{\Lambda}(r) - \int_0^{r} \left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma} \frac{\Lambda(t;k)}{t}\, dt +$$

$$+ \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{\gamma} \frac{\Lambda(t;k)}{t}\, dt \Big).$$

В § 3.8 доказывается следующая теорема единственности, сформулированная во вводном § 0.

Теорема 0.6. <u>Пусть целая функция</u> $f \in E_{\rho}$ <u>с индикатором</u> h_f <u>(при порядке</u> ρ<u>) обращается в нуль на последовательности</u> Λ <u>и</u> $h_f \le h \in T_{\rho}$. <u>Если</u> $k \in T_{\gamma}$, $k \ge 0$ <u>и выполнено хотя бы одно из следующих трех условий</u>

1) $\gamma < \rho$ <u>и</u> $\overline{D}_k^{(\rho)}(\Lambda) > \frac{1}{\rho^2-\gamma^2} S_{\rho}(k,h)$;

2) $\gamma = \rho$ <u>и</u> $\overline{D}_k^{(\rho)}(\Lambda) > \frac{1}{\rho} S_{\rho}(k,h)$;

3) $\gamma > \rho$ <u>и</u>

$$\overline{D}_k^{(\rho)}(\Lambda) > \frac{\|k\|}{\rho^2} S_{\rho}(1;h) + \frac{1}{\gamma^2-\rho^2} S_{\rho}(k,h);$$

<u>то</u> $f \equiv 0$.

Если $k(\theta)\equiv 1$, то при $\gamma=0$ и $\gamma\to+\infty$ соответственно условия I) и 3) "замыкаются" на простейшем условии единственности

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{1}{r^{\rho}} N_{\Lambda}(r) > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_f(\theta)\, d\theta, \tag{I7}$$

которое является следствием классической формулы Йенсена [I] .

Условие единственности 2) - один из основных результатов работы [3] . Условия I) и 3) являются новыми и, в определенной сте -

пени независимы от условий 2) и (I7) (пример 3.8.I). Теорема единственности 0.6 точна при любых k и h, в чем легко убедиться на примерах правильно распределенных последовательностей Λ.

Из теоремы 0.6 следует широкий круг достаточных условий полноты системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в выпуклой области G в терминах (k, ρ)-плотностей последовательности Λ и геометрических характеристик области G (теорема 3.8.I). Дело в том, что если $k(\theta)$ и $h(-\theta)$ - опорные функции выпуклого компакта K и выпуклой области G, то величина $\pi \; S_1(k,h)$ - смешанная площадь Минковского множеств K и G [I8], которая при различных K становится периметром, шириной в данном направлении, широтой, площадью или иной традиционной характеристикой области G. Дальнейшее пополнение набора достаточных условий полноты $\mathcal{E}(\Lambda)$ в G возможно за счет известных соотношений между геометрическими характеристиками выпуклых множеств, которыми богаты теория выпуклых множеств [I8] и интегральная геометрия [I6].

Возможности и особенности общего подхода к описанию множеств (не-)единственности демонстрируют новые неконструктивные доказательства теоремы Рубеля - Тейлора - Майлза о множествах единственности для алгебры функций конечного λ-типа (§ 3.3) и теоремы Берлинга - Мальявена о радиусе полноты (§ 3.9). Первое доказательство получает развитие в главе У при исследовании множеств единственности в алгебрах целых функций многих переменных, а второе оказалось полезным для получения теорем неединственности в терминах разбиений и для исследования устойчивости полноты систем $\mathcal{E}(\Lambda)$ при сдвигах показателей Λ (§§ 3.I0,3.II).

Теорема 3.I0.I. Пусть $R(t)$ - возрастающая функция, $t \geq 0$, $R(0) \geq 1$, $\{\Omega_k\}$ - разбиение плоскости $\mathbb{C}$ на непересекающиеся борелевские множества, $k = 1,2,\ldots$, т.е. $\mathbb{C} = \bigcup\limits_k \Omega_k$ и $2|\Omega_k| \leq R(d_k) \leq d_k/2$ при $k > k_0$, где d_k - расстояние от нуля до Ω_k, $|\Omega_k|$ - диаметр Ω_k. Далее, пусть p - субгармоническая неотрицательная функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{|z-\zeta| \leq 2R(3|z|)} p(\zeta) \leq C p(z) + C, \quad z \in \mathbb{C},$$

где C - постоянная. Алгебра Хермандера A_p состоит из целых функций f, удовлетворяющих неравенству $|f(z)| \leq C_f \exp C_f \, p(z)$, $z \in \mathbb{C}$, C_f - постоянная.

Если Λ - последовательность комплексных чисел и для некоторой постоянной A выполнены оценки $\Lambda(\Omega_k) \leq A\mu_p(\Omega_k)$, $k = 1,2,\ldots$, то Λ - множество неединственности для A_p.

Аналогичный результат справедлив и для пространства $E[\rho, h)$.

Теорема 0.8. Пусть $h \in J_\rho$, $h(\theta) > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Тогда для любого числа $\alpha < 1$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что, как только разбиение $\{\Omega_k\}$ удовлетворяет условию $\varlimsup_{k\to\infty} |\Omega_k|/d_k < \varepsilon$, любая последовательность Λ, удовлетворяющая оценкам $\Lambda(\Omega_k) \leq \alpha\mu_H(\Omega_k)$ при достаточно больших k, где μ_H - распределение масс функции $H(re^{i\theta}) = h(\theta) r^\rho \in \mathcal{U}_\rho$, является множеством неединственности для $E[\rho, h)$.

Из результатов об устойчивости полноты систем экспонент отметим обобщение теоремы Александера - Редхеффера [19] из § 3.II.

Пусть K - выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, $A(K)$ - пространство функций, голоморфных во внутренности K (если она непустая) и одновременно непрерывных на K с естественной $\sup$-нормой, S^* - дополнение в $\mathbb{C}$ максимальной области гармоничности функции $H(re^{i\theta}) = h(\theta) r$, $h(-\theta)$ - опорная функция для K, $d(z, S^*)$ - расстояние от $z \in \mathbb{C}$ до S^*.

Говорим, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в $A(K)$ с точностью до k экспонент, если после присоединения k различных экспонент $\exp \lambda z$ с показателями $\lambda \notin \Lambda$ новая система полна в $A(K)$.

Теорема 3.II.I. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и $\Gamma = \{\gamma_n\}$ - последовательности в $\mathbb{C}$, каждая из которых состоит из попарно различных чисел. Если система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в $A(K)$ и выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n - \gamma_n|}{1 + d(\lambda_n, S^*) + d(\gamma_n, S^*)} < +\infty,$$

то система $\mathcal{E}(\Gamma)$ полна в $A(K)$ с точностью до двух экспонент.

Когда K - отрезок, теорема 3.II.I дает ослабленный вариант теоремы Александера - Редхеффера для пространства непрерывных на K функций.

Глава IУ. Теоремы о наименьшей мажоранте и о мультипликаторе. При доказательстве основной в главе III теоремы 3.2.I один из главных моментов - применение теоремы П.Кусиса о наименьшей супергармонической мажоранте в $\mathbb{C}$ [9]. В [9] она доказана методами, специфическими для комплексной плоскости, и приведена как самостоятельный факт без каких-либо применений.

В § 4.I теорема П.Кусиса обобщается сразу в нескольких направлениях. Это обобщение опирается на методы функционального анализа и общей теории потенциала.

Пусть G - область в $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{M}_G$ - конус положительных борелевских мер с компактным носителем в G.

Определение II . Мера $\mu \in \mathcal{M}_G$ называется выметанием меры $\nu \in \mathcal{M}_G$ (пишем $\nu \prec \mu$) если для любой плюрисубгармонической в G функции u выполнено неравенство $\int u\,d\nu \le \int u\,d\mu$.

Пусть F - функция, определенная в G, со значениями в $[-\infty, +\infty]$. Функцию

$$(\mathcal{M}_G F)(z) = \lim_{\zeta \to z} \inf \{u(\zeta): F \le u \text{ на } G\}$$

называем наименьшей плюрисупергармонической мажорантой функции F в G .

Теорема 4.I.I (о наименьшей мажоранте). Пусть G - область в $\mathbb{C}^n$ и функция F локально интегрируема по мере Лебега, полунепрерывна сверху в G и удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to 0} \int F(z+\zeta)\,d\omega^{(r)}(\zeta) = F(z), \; z \in G,$$

где $\omega^{(r)}$- единичная масса, равномерно распределенная в шаре $|\zeta| \le r$. Тогда $\mathcal{M}_G F \ge F$ на G и для любой меры $\nu \in \mathcal{M}_G$ выполнено равенство

$$\int \mathcal{M}_G F\,d\nu = \sup_{\nu \prec \mu} \int F\,d\mu .$$

В случае, когда $G = \mathbb{C}$, $\nu = \delta_z$ - мера Дирака в точке $z \in \mathbb{C}$, а F - непрерывная в $\mathbb{C}$ функция, теорема о наименьшей мажоранте - в точности теорема П.Кусиса из [9] .

Применения теоремы о наименьшей мажоранте осуществляются через следующую теорему, которая при $u = \log|f|$, f - целая функция, становится теоремой о существовании нетривиального мультипликатора из $H(\mathbb{C}^n)$, "погашающего" рост f .

Теорема 4.2.I (о мультипликаторе). Пусть u - субгармоническая, M - непрерывная в области $G \subset \mathbb{C}^n$ функции.

Если мера $\nu \in \mathcal{M}_G$ такова, что всякая плюрисубгармоническая функция на G ν-интегрируема, и существует функция $h \in H(G)$, $h \not\equiv 0$, такая, что $u + \log|h| \le M$ на G , то

$$\sup_{\nu \prec \mu} \int_G (u - M)\,d\mu < +\infty . \tag{18}$$

Обратно, если G - псевдовыпуклая область и для некоторой не-нулевой меры $\nu \in \mathcal{M}_G$ выполнено (18), то найдется голоморфная в G функция $h \not\equiv 0$ такая, что для любой точки $z \in G$ и любого числа δ, $0 < \delta <$ расстояния от z до границы области G, выполнено неравенство

$$u(z) + \log|h(z)| \le \sup_{|z-\zeta| \le \delta} M(\zeta) + (n+2)\log(1+|z|+\delta) - n\log\delta.$$

Глава V. Применения теоремы о мультипликаторе к целым и мероморфным функциям многих переменных. В § 5.1 получены условия нетривиальности идеалов $I(F) \cap E$, где E - весовая алгебра целых функций в $\mathbb{C}^n$, в терминах распределения нулей функции $F \in H(\mathbb{C}^n)$.

Функция λ на $\mathbb{C}^n$ называется круговой, если $\lambda(z\exp(i\theta)) = \lambda(z)$ для любых $z \in \mathbb{C}^n$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Пусть λ - непрерывная функция на $\mathbb{C}^n$, возрастающая на каждом луче с началом в нуле, $a \in (0, +\infty]$. Через $E(\lambda, a)$ обозначаем алгебру целых функций f, удовлетворяющих оценке $|f(z)| \le A_f \exp B_f \lambda(a_f z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, при некоторой постоянной $a_f < a$, A_f, B_f - постоянные. При $a = +\infty$ и для радиальной функции λ алгебра $E(\lambda, a)$ называется алгеброй функций конечного λ-типа [6], [13].

Теорема 0.12. Пусть $F \in H(\mathbb{C}^n)$, $F(0) \ne 0$, функция λ для $E(\lambda, a)$ круговая и удовлетворяет двум условиям

(L) $\qquad \log(1+|z|) = O(\lambda(z))$, $\quad |z| \to +\infty$;

(R) для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные постоянные δ, C_1, C_2 такие, что $|z-\zeta| \le \delta \Rightarrow \lambda(\zeta) \le C_1 \lambda((1+\varepsilon)z) + C_2$.

Идеал $I(F) \cap E(\lambda, a)$ нетривиален тогда и только тогда, когда существуют постоянные C_1, C_2 и постоянная $a_1 < a$ такие, что

$$N_F^*(z) \le C_1 \lambda(a_1 z) + C_2, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где

$$N_F^*(z) = \int_0^1 \frac{\Lambda_F(\tau; z)}{\tau} d\tau, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

а $\Lambda_F(\tau; z)$ - число нулей с учетом кратности целой функции $F_z(w) = F(wz)$ от одной переменной $w \in \mathbb{C}$ в круге $|w| \le \tau$.

Если $\lambda(t)$, $t \ge 0$, - функция роста, то $E(\lambda, a)$ - алгебра, порожденная круговой функцией $\lambda(|z|)$, $z \in \mathbb{C}^n$. В этой ситуации теорему 0.12 можно трактовать как описание дивизоров неединственности для алгебры $E(\lambda, a)$. Положительный дивизор Λ, т.е. пару $\Lambda = (A, k)$, где A - носитель дивизора Λ, k - функция кратности, будем называть дивизором неединственности для пространства $E \subset H(\mathbb{C}^n)$, если существует целая функция $f \not\equiv 0$, $f \in E$, такая, что носитель дивизора нулей Λ_f включает в себя носитель дивизора Λ, а функция кратности дивизора Λ_f мажорирует функцию кратности дивизора Λ на множестве A_f^* регулярных (обыкновенных) точек носителя A_f дивизора Λ_f (пишем $\Lambda_f \geq \Lambda$). Если нулевой элемент $0 \in \mathbb{C}^n$ не принадлежит носителю дивизора Λ (пишем $0 \notin \Lambda$), то проинтегрированная считающая функция дивизора N_Λ определяется равенством (4), где $\Lambda(t)$ - проективная площадь (с учетом кратности) части дивизора Λ, заключенной в шаре $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq t\}$.

Теорема 0.I3. Пусть Λ - положительный дивизор в $\mathbb{C}^n$, $0 \notin \Lambda$, λ - функция роста. Λ - дивизор неединственности для $E(\lambda, a)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $a_1 < a$ выполнено соотношение

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \quad N_\Lambda(t) / \lambda(a_1 t) < +\infty .$$

Этот результат является новым при $n = 1$ и $a < +\infty$, а при $n > 1$ и в случае $a = +\infty$. Так, при $n > 1$ и $a = +\infty$ теорема 0.I3 была известна лишь при условии медленного роста функции λ или при специальном условии "сбалансированности" λ [13].

Методы § 5.I развиваются в § 5.2 - 5.4 применительно к целым функциям конечного порядка, где получены результаты, родственные результатам § 5.I, в которых учитывается не только порядок роста функций, но и величина типа или кругового индикатора. Вещественнозначную функцию k, определенную на единичной сфере $S_n \subset \mathbb{C}^n$, называем круговой, если $k(s \exp(i\theta)) = k(s)$ для всех $s \in S_n$ и $\theta \in \mathbb{R}$.

Круговой индикатор плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^n$ функции u конечного типа при порядке ρ определяется как [20]

$$h^*_{cp}(z, u) = \overline{\lim_{s \to z}} \; \overline{\lim_{\xi \to \infty}} \; u(\xi s)/|\xi|^\rho , \quad \xi \in \mathbb{C}, \; z, s \in \mathbb{C}^n .$$

Теорема 5.2.I. Пусть F - целая функция в $\mathbb{C}^n$, $F(0) \neq 0$, k - круговая непрерывная функция на S_n. Если $h^*_{cp}(s, N_F^*) < k(s)$, $s \in S_n$, то в $I(F)$ найдется целая функция $f \not\equiv 0$ такая, что $h^*_{cp}(s, \log|f|) < P(\rho) k(s)$, $s \in S_n$, где величина

$$P(\rho) = \begin{cases} \pi\rho, & \rho \geq 1/2, \\ \pi\rho/\sin\pi\rho, & \rho < 1/2, \end{cases} \tag{19}$$

– наименьшая из возможных.

Этот результат нов и неэлементарен и в случае $n = 1$.

Определение. Пусть Λ – положительный дивизор в $\mathbb{C}^n$, $\rho > 0$. Точную нижнюю грань чисел σ, для которых существуют целые функции $f \not\equiv 0$ типа не выше σ при порядке ρ такие, что дивизоры их нулей $\Lambda_f \geq \Lambda$ будем называть экстремальным типом (при порядке ρ) дивизора Λ и обозначать его как $\sigma^*(\Lambda, \rho)$.

В § 5.3 получены оценки экстремального типа положительного дивизора через тип (при порядке ρ) считающей функции N_Λ. Приведем здесь лишь основной результат § 5.4, который дает точные оценки экстремального типа дивизора при порядке $\rho \leq 1$.

Теорема 0.15. Если считающая функция положительного дивизора Λ в $\mathbb{C}^n$ имеет тип σ при порядке ρ, т.е. $\overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} t^{-\rho} N_\Lambda(t) = \sigma$ и $\rho \leq 1$, то

$$\sigma \leq \sigma^*(\Lambda, \rho) \leq \sigma P(\rho) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \rho/2k) \tag{20}$$

и эти оценки неулучшаемы.

Нижняя оценка в (20) справедлива при любом ρ. Основная трудность – в получении точной верхней оценки. Эта проблема при $\rho > 1$ остается открытой. Тем не менее, пример 5.3.1 из § 5.3 показывает, что и при любом ρ верхняя оценка для $\sigma^*(\Lambda, \rho)$, вообще говоря, не меньше правой части в (20). В теореме 5.3.3 получена для любого $\rho > 0$ верхняя оценка для экстремального типа $\sigma^*(\Lambda, \rho)$, которая строго меньше домноженной на e^{n-1} правой части в (20).

В последнем § 5.5 главы V рассматривается задача о представлении мероморфной функции в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$.

Пусть f – мероморфная функция в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, $f(0) = 1$. Через $T_f^*(t; z)$, $t \geq 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, обозначаем характеристику Неванлинны мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $f_z(w) = f(wz)$ одной переменной $w \in \mathbb{C}$, $T_f^*(z) = T_f^*(1; z)$.

Теорема 0.16. Пусть для мероморфной в $\mathbb{C}^n$ функции f, $f(0) = 1$, выполнено неравенство $T_f^*(z) \leq \lambda(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, где λ – непрерывная круговая функция, возрастающая на каждом луче с началом в нуле и удовлетворяющая условиям (L) и (R) из теоремы 0.12. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся целые функции g_ε и h_ε

такие, что $f = g_\varepsilon / h_\varepsilon$, выполнена оценка

$$\log(|g_\varepsilon(z)| + |h_\varepsilon(z)|) \le C_\varepsilon \lambda((1+\varepsilon)z) + C_\varepsilon, \ z \in \mathbb{C}^n, \tag{21}$$

где C_ε - постоянная, $g_\varepsilon(0) = h_\varepsilon(0) = 1$.

Из теоремы 0.I6 легко следует, что в (2I) в качестве $\lambda((1+\varepsilon)z)$ можно взять $T_f((1+\varepsilon)|z|)$, где T_f - характеристика Неванлинны (теорема 0.I7). Таким образом, наряду с тем, что по сравнению с известными ранее результатами в теореме 0.I7 не требуется априорных ограничений на функцию роста λ в (5) и она выбирается минимально возможной - $\lambda(\tau) = T_f(\tau)$, теорема 0.I7 ликвидирует степенной множитель в представлении Г.Скоды [I4] и позволяет заменить постоянную B в (6) на постоянную, сколь угодно близкую к I.

Развитие теоремы 0.I6 позволяет получить точные верхние оценки наименьших возможных круговых индикаторов целых функций g и h в представлении $f = g/h$ через круговой индикатор (при порядке ρ) характеристики $\tilde{T}_f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, совпадающей почти всюду с характеристикой $T_f^*(z)$ (теорема 5.5.I). Если вместо кругового индикатора ограничиться рассмотрением типа характеристики T_f^*, то имеем следующий результат, новый и при $n = 1$.

Теорема 0.I8. Пусть f - мероморфная в $\mathbb{C}^n$ функция, $f(0) = 1$, и тип характеристики $T_f^*(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, меньше σ при порядке ρ. Тогда существуют целые функции g и h в $\mathbb{C}^n$ такие, что $f = g/h$ и тип каждой из них при порядке ρ меньше $P(\rho)\sigma$, где множитель $P(\rho)$ из (I9) - наименьший из возможных.

Для оценок типа целых функций, участвующих в представлении мероморфной функции, через тип характеристики Неванлинны вводится

Определение. Типом представления мероморфной функции f в $\mathbb{C}^n$ при порядке ρ будем называть точную нижнюю грань чисел $\sigma > 0$, для каждого из которых можно подобрать целые функции g и h типа меньше σ при порядке ρ такие, что $f = g/h$.

Точные оценки типа представления через тип характеристики Неванлинны удалось получить при порядке $\rho \le 1$. При $\rho > 1$ ситуация та же, что и в комментарии к теореме 0.I5.

Теорема 0.I9. Если тип характеристики Неванлинны $T_f(\tau)$ мероморфной в $\mathbb{C}^n$ функции f равен σ при порядке $\rho \le 1$, то справедливы неулучшаемые оценки

$$\sigma \le \left\{ \begin{array}{c} \text{тип представления} \\ f \text{ при порядке } \rho \end{array} \right\} \le \sigma P(\rho) \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \rho/2k).$$

Глава УI. Теоремы единственности для функций многих перемен -

ных. В последней главе аппарат функций Йенсена на плоскости, разработанный в главе III, переносится на односвязные области в $\mathbb{R}^k$. Это дает общий способ оценок сверху площади нулевых множеств голоморфных функций в областях из $\mathbb{C}^n$.

В § 6.1 исследуются функции и меры Йенсена относительно области в $\mathbb{R}^k$.

Определение. Пусть G - односвязная область в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 3$, $0 \in G$. Функцию V, определенную в $G \setminus \{0\}$ называем функцией Йенсена относительно G и 0, если выполнены следующие условия:

I) V субгармонична и неотрицательна в $G \setminus \{0\}$;

2) $V(y) \leq |y|^{2-k} + O(1)$, $y \to 0$, где $|y|$ - евклидова норма $y \in \mathbb{R}^k$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K_\varepsilon \subset\subset G$ такой, что $V(y) \leq \varepsilon$ при $y \in G \setminus K_\varepsilon$.

Оценки площади нулевых множеств голоморфных функций установлены в § 6.2.

Для голоморфной в $G \subset \mathbb{C}^n$ функции f полагаем $A_f = \{z \in G: f(z) = 0\}$, k_f - функция кратности дивизора нулей функции f, $d\sigma_{2n-2}$ - элемент ($2n-2$)-мерной площади на A_f в евклидовой метрике.

Теорема 6.2.I. Пусть G - односвязная область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, $0 \in G$, u - субгармоническая, а f - голоморфная в G функции, $f \not\equiv 0$, функция u ограничена в некотором шаре $B(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^n: |z| \leq \varepsilon\} \subset G$, $\varepsilon > 0$. Если $\log|f| \leq u$ на G, то найдется постоянная C такая, что

$$\int_{A_f \setminus B(\varepsilon)} V k_f \, d\sigma_{2n-2} \leq \frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!} \int_G V d\mu_u + C$$

для всех функций Йенсена V относительно G и 0, μ_u - распределение масс функции u.

В качестве иллюстрации применений теоремы 6.2.I получены новые теоремы единственности для целых функций конечного порядка в $\mathbb{C}^n$ с ограничениями на радиальный индикатор (теорема 6.3.I из § 6.3 - прямое обобщение на $\mathbb{C}^n$ теоремы 0.6) и для голоморфных функций конечного порядка в единичном шаре с ограничениями на тип. Приведем здесь лишь более просто формулируемый последний результат.

Обозначим через $H_B[\rho, \sigma]$ пространство голоморфных в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}^n$ функций f, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{|z|\to 1}}\ (1-|z|)^{\rho}\log|f(z)|\leq \sigma\ ;\ \rho>0,\ \sigma\geq 0.$$

Через $\Lambda(t)$ обозначаем меру Хаусдорфа порядка $2n-2$ множества $\Lambda\cap(tB)$, где $\Lambda\subset B$, $0\leq t\leq 1$.

Теорема 6.4.I (единственности). Пусть $\Lambda\subset B$, $n>1$. Если $f\in H_B[\rho,\sigma]$, $f(z)=0$ для всех $z\in\Lambda$ и для некоторого $\varepsilon>0$ выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

I) $\gamma>\rho+1$ и $\int_{\varepsilon}^{1}(1-t)^{\gamma}d\Lambda(t)=+\infty$;

2) $\gamma=\rho+1$ и

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ \frac{1}{-\log(1-r)}\int_{\varepsilon}^{r}(r-t)^{\gamma}d\Lambda(t)>\frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}\sigma\rho(\rho+1);$$

3) $1\leq\gamma<\rho+1$ и $\overline{\lim_{r\to 1}}\ (1-r)^{\rho-\gamma+1}\int_{\varepsilon}^{r}(r-t)^{\gamma}d\Lambda(t)>$

$$>\frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}\sigma\rho(\rho+1)\ B(\gamma+1;\rho-\gamma+1),$$

где $B(a,b)$ - бета-функция Эйлера;

то $f\equiv 0$.

Условие I) включено здесь для полноты формулировки. Его достаточность сразу следует из описания дивизоров нулей функций класса Неванлинны - Джрбашяна $N_{\alpha}(B)$, полученного в [21], так как $H_B[\rho,\sigma]\subset N_{\alpha}(B)$ для любого $\alpha>\rho$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.:Гостехиздат, I956.
2. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. Целые и мероморфные функции //Итоги ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. I99I. Т.85. С.5-I85.
3. Гришин А.Ф., Содин М.Л. Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности.//Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков. Вища школа, I988. Вып.50. С.47-6I.

4. Malliavin P., Rubel L.A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull.Soc.Math.France.1961.V.89, №2.P.175-201.

5. Красичков-Терновский И.Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II.Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем.сб. 1972.Т.88,№1.С.3-30.

6. Rubel L.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull.Soc.Math.France. 1968.V.96.P.53-96.

7. Miles J.B. Quotient representations of meromorphic functions // J. d'Analyse Math.1972.V.25.P.371-388.

8. Beurling A., Malliavin P. On the closure of characters and the zeros of entire functions // Acta Math. 1967.V.118,№1-4.P.79-93.

9. Koosis P. La plus petite majorante surharmonique et son rapport avec l'existence des fonctions entières de type exponentiel jouant le rôle de multiplicateurs // Ann.Inst.Fourier 1983.V.33,№1.P.67-107.

10. Ронкин Л.И. Целые функции // Итоги ВИНИТИ.Современные проблемы математики.Фундаментальные напрвления.1986.Т.9.С.5-36.

11. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы. М.:Мир,1973.

12. Гольдберг А.А О представлении мероморфной функции в виде частного целых функций. // Изв.вузов. Математика.1972,№10. С.13-17.

13. Kujala R.O. Functions of finite λ-type in several complex variables // Trans.Amer.Math.Soc.1971.V.161.P.327-358.

14. Skoda H. Solution a croissance du second problème de Cousin dans C^n // Ann.Inst.Fourier.1971.V.21,№1.P.11-23.

15. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.:Наука, 1980.

16. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.:Наука,1983.

17. Хейман У.,Кеннеди П. Субгармонические функции. М.:Мир,1980.
18. Лехтвейс К. Выпуклые множества. М.:Наука,1985.
19. Redheffer R.M. Completeness of sets of complex exponentials // Adv.in Math. 1977.V.24.P.1-62.
20. Груман Л., Лелон П. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир,1989.
21. Деутов Ш.А.,Хенкин Г.М. Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки решений $\bar{\partial}$-уравнений.// Матем.сб. 1978.Т.107, №2. С.163-174.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

22. Хабибуллин Б.Н. О свойствах устойчивости полноты систем экспонент // Исследования по комплексному анализу. Уфа. БФ АН СССР.1987.С.188-196.
23. Хабибуллин Б.Н. Критерий полноты системы экспонент в неограниченной выпуклой области // Всесоюзный симпозиум по теории приближения функций. Уфа.Баш ГУ БФАН.С.169.
24. Хабибуллин Б.Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Доклад АН СССР.1988.Т.302,№2.С.270-273.
25. Хабибуллин Б.Н. О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями // Матем.заметки.1988. Т.43,№5. С.644-650.
26. Хабибуллин Б.Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Матем.сб.1989.Т.180,№5.С.706-719.
27. Хабибуллин Б.Н. Выметание на систему лучей и целые функции вполне регулярного роста // Изв.АН СССР. Сер.матем. 1991.Т.55, №1.С.184-202.
28. Хабибуллин Б.Н. Теорема единственности для субгармонических

функций конечного порядка //Матем.сб. I99I.Т.I82,№6. С.8II-82?
29. Хабибуллин Б.Н. О росте вдоль прямой целых функций экспоненциального типа с заданными нулями // Analysis Mathematica. I99I. Т.I7, № 3. С.34-44.
30. Хабибуллин Б.Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной //Изв. АН СССР. Сер.матем. I99I,Т.55, № 5. С.II0I-II23.
3I. Хабибуллин Б.Н. Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. I.//Сиб.матем.журн. I992. Т.33, № I. С.I73-I78.
32. Хабибуллин Б.Н. Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. II. Алгебры функций конечного λ-типа //Сиб.матем.журн. I992.Т.33, № 3. С.I86-I9I.
33. Хабибуллин Б.Н. О типе целых и мероморфных функций //Матем. сб. I992. Т.I83, № II, С.35-44.
34. Хабибуллин Б.Н. Оценки объема нулевых множеств голоморфных функций //Изв.вузов. Математика. I992. № 3(358). С.58-63.
35. Хабибуллин Б.Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции //Изв. РАН. Сер.матем. I993. Т.57, № I. С.I29-I46.
36. Хабибуллин Б.Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. II. Целые и мероморфные функции конечного типа //Изв.РАН. Сер.матем. I993. Т.57, № 3. С. 70-9I.

Подписано к печати 7/VI-93 Объем 2 печ.л. Формат 60x84/I6
Заказ 243 Тираж I20
Ротапринт Баш.ун-та, 450074,г.Уфа,ул.Фрунзе,32