КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ТРЕБЕНКО Дмитро Якович

УДК 519.41/47

ГРУПИ З ДЕЯКИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ ДЛЯ НЕІНВАРІАНТНИХ ПІДГРУП

01.01.06 - математична логіка, алгебра і теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Д. Требенко

Київ - 1993 р.

Робота виконана у відділі алгебри і топологічних методів аналізу Інституту математики АН України

Наукові керівники - член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор $\boxed{\text{ЧЕРНІКОВ С.М.}}$
доктор фізико-математичних наук, професор ТУРВІН А.Ф.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор ЧАРІН В.С.
кандидат фізико-математичних наук СЕМКО М.М.

Провідна організація - Львівський державний університет.

Захист відбудеться "27" вересня 1993 р. о ___ годин на засіданні спеціалізованої ради Д 01.01.01 при Київському Університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252124, Київ-124, проспект Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Університету

Автореферат розіслано "27" серпня 1993р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ОВСІЄНКО С.А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В даний час одним із важливих, перспективних і активно розроблюваних напрямків загальної теорії груп є дослідження груп за заданними властивостями системи їх підгруп.

Ідея вивчення груп, визначених властивостями системи їх підгруп, ввійшла в теорію груп з гамільтоновими групами, групами Міллєра-Морено, групами Шмідта. З'явившись спочатку в області скінченних груп, вона розповсюдилась потім і на нескінченні групи.

З гамільтонових груп почалось вивчення довільних (як нескінченних так і скінченних) груп, система підгруп яких задовольняє тим чи іншим вимогам, пов'язаним із властивістю інваріантності. У цьому напрямку одержано багато важливих результатів як радянськими (О.Ю.Шмідт, С.М.Черніков, В.С.Чарін та ін.) так і закордонними (Р.Дедекінд, Р.Бер, та ін.) алгебраїстами.

Особливий інтерес викликає дослідження довільних (неабелевих) груп, визначених тією чи іншою системою неінваріантних підгруп, оскільки виділені при цьому для вивчення класи груп є природним, як правило, досить значним узагальненням класу нескінченних гамільтонових груп.

Так, Г.М.Ромаліс і М.Ф.Сесекін ввели в розгляд і вивчали групи з обмеженням інваріантності для системи всіх неабелевих підгруп; довільні групи з цими умовами вони назвали метагамільтоновими. Конструктивний опис довільних локально ступінчастих метагамільтонових груп дано в роботах М. Ф. Кузенного та М. М. Семка.

Дана дисертаційна робота присвячена вивченню узагальнення метагамільтонових груп, яке визначається шляхом накладання умови інваріантності на всі власні підгрупи, що не володіють центральним у всій групі циклічним комутантом. Групи такого виду в роботах дисертанта названо узагальнено метагамільтоновими.

МЕТА РОБОТИ. Метою роботи є вивчення будови узагальнено метагамільтонових груп.

НАУКОВА НОВИЗНА РЕЗУЛЬТАТІВ. В дисертаційній роботі автором одержано нові теоретичні результати, зокрема:

-доведено, що фактор-група G/N локально ступінчастої групи G за її розв'язаним нормальним дільником N є також локально ступінчастою групою;

-встановленно, що локально ступінчаста узагальнено метагамільтонова група G розв'язана, і ступінь її розв'язаності не перевищує числа 3;

-одержано будову комутанта G' нільпотентної узагальнено метагамільтонової групи G;

-одержано будову комутанта G' локально ступінчастої ненільпотентної узагальнено метагамільтонової групи G;

-доведено, що другий комутант G'' нільпотентної узагальнено метагамільтонової групи G є скінченною примарною центральною в G підгрупою;

-з точністю до твірних елементів і визначаючих співвідношень описано скінченні і нескінченні нільпотентні групи класу 2 з двома твірними;

-одержана характеризація нільпотентних узагальнено метагамільтонових груп;

- конструктивно описано локально ступінчасті ненільпотентні узагальнено метагамільтонові групи.

Апробація одержаних результатів. Результати дисертації доповідались на XIX Всесоюзній алгебраїчній конференції (Львів,1987 р.), на XI Всесоюзному симпозіумі з теорії груп (Свердловськ, 1989), на Міжнародній алгебраїчній конференції (Новосибірськ, 1991), на семінарах з теорії груп Інституту математики АН України (1986-1992), на Київському міському алгебраїчному семінарі (1992), на звітно-науковій конференції викладачів Київського державного педагогічного інституту ім. М.П. Драгоманова (1989-1993). Основні результати опубліковано у роботах [1-6].

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, розділу "Позначення, означення та допоміжні результати" і семи параграфів, які розбиті на три глави, списку літератури із 73 назв, містить 96 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми, дається огляд результатів, які пов'язані із темою дисертації, а також перераховуються основні результати роботи.

У розділі "Позначення, означення та допоміжні результати" наведено основні означення та результати, які необхідні при доведенні лем і теорем дисертації.

Глава I "Загальні результати" складається із двох параграфів.

У §1 викладено деякі допоміжні твердження, встановлені автором, які використовуються далі при доведенні основних результатів I, II та III глав. Зокрема, встановлено, що клас узагальнено метагамільтонових груп замкнений по підгрупах, по фактор-групах і не замкнений по прямих добутках (лема 1.1.2). Доведена теорема, що комутант всякої підгрупи узагальнено метагамільтонової групи G' є інваріантною підгрупою групи G (теорема 1.1.1).

У §2 встановлена розв'язність локально ступінчастої узагальнено метагамільтонової групи G і обмеженість ступеня її розв'язності числом 3 (теорема 1.2.1). Зокрема, показано, що другий комутант G'' узагальнено метагамільтонової групи G є скінченною примарною центральною в G підгрупою (наслідок 1.2.2). Доведена в цьому параграфі лема 1.2.1, що фактор-група G/N локально ступінчастої групи G за її розв'язним нормальним дільником N також є локально ступінчастою групою, має і певне самостійне значення. Із неї випливає, наприклад, твердження: якщо G - локально ступінчаста група і N - її центральна підгрупа, то фактор-група G/N також є локально ступінчастою групою (наслідок 1.2.2).

Глава II "Нільпотентні узагальнено метагамільтонові групи" складається із трьох параграфів.

У §1 уточнюється будова комутанта нільпотентної узагальнено метагамільтонової групи. Це уточнення дає наступне твердження.

<u>Теорема</u> <u>2.1.1.</u> Другий комутант G'' нільпотентної узагальнено метагамільтонової групи G є скінченною примарною центральною в G підгрупою, а комутант G' цієї групи задовольняє одному із тверджень:

1) комутант G' групи G є центральною локально циклічною

підгрупою із G;

2) комутант $G'=P\times D$, де P - скінченна силівська p-підгрупа із G', що не є центральною циклічною підгрупою із G, p-просте число, комутант M' всякої підгрупи M із P є центральною циклічною підгрупою із G, D - центральна підгрупа із G порядку не вище 2;

3) комутант $G'=P\times D$, де P - скінченна силівська p-підгрупа із G', p-просте число, $\Phi(P)=Z(P)$, $|P/\Phi(P)|=p$, D - центральна підгрупа із G порядку не вище 2, G - періодична група виду $G=A\times B$, де B - силівська p-підгрупа із G, $B'=P$, A - дедекіндова група.

Зауваження. Для порівняння класу нільпотентних узагальнено метагамільтонових груп із класом нільпотентних метагамільтонових груп, слід відмітити, що комутант нільпотентних метагамільтонових груп є скінченною примарною абелевою групою.

§2 присвячений характеризації класу нільпотентних узагальнено метагамільтонових груп.

Спочатку зауважимо, що опису нільпотентних метагамільтонових груп присвячено біля десяти робіт (А. А. Махньов, М. Ф. Кузенний, М. М. Семко). У цьому описі виділено 39 типів груп такого виду. Всі ці групи мають скінченний примарний абелевий комутант. Так як нільпотентні узагальнено метагамільтонові групи можуть мати і нескінченний і непримарний комутант, то їх опис є непростою досить об'ємною задачею. У зв'язку з цим § 2 обмежується виділенням окремих достатньо конкретизованих класів груп такого виду.

Доведено слідуючі теореми.

Теорема 2.2.1. Узагальнено метагамільтонові групи з центральним локально циклічним комутантом є групами слідуючих класів:

1) G - група з центральним циклічним комутантом (опис груп такого виду з 2 та 3 твірними дано в [53]);

2) G - група з центральним квазіциклічним комутантом;

3) $G=A\times B$, де A - гамільтонова група, B - силівська p-підгрупа із G з центральним квазіциклічним комутантом, $p>2$, p - просте число;

4) G - неперіодична група з повним центральним періодичним нескінченним комутантом G', всяка підгрупа якої з нециклічним комутантом містить G';

5) G - неперіодична група з центральним комутантом G', ізоморфним адитивній групі раціональних чисел Q, всяка підгрупа із G з нециклічним комутантом містить G'

<u>Теорема 2.2.2.</u> Нільпотентні узагальнено метагамільтонові групи є групами слідуючих класів:

1) - 5) класи груп теорем 2.2.1.;

6) нільпотентні групи із скінченним примарним комутантом, який не є центральною циклічною підгрупою всієї групи, всяка підгрупа комутанта має циклічний центральний у всій групі комутант;

7) періодичні групи виду $G=A\times B$, де A - гамільтонова група, B - примарна силівська підгрупа із G із скінченним комутантом B', що не є центральною циклічною підгрупою із G, всяка підгрупа із B має центральний в G циклічний комутант;

8) періодичні групи виду $G=A\times B$, де A - дедекіндова група, B - примарна силівська підгрупа групи G із скінченним комутантом B', $\Phi(B)=Z(B)$, мінімальне число твірних B співпадає з числом 3.

Для класів 1) - 3) груп теореми 2.2.2 приклади даних груп побудовано. Питання про існування груп класів 4) - 8) залішається відкритим.

В § 3 дано приклад більш детального вивчення груп теореми 2.2.2. В ньому з точністю до твірних елементів і визначальних співвідношень дано опис нільпотентних груп класу 2 з двома твірними. Цей опис дають слідуючі твердження.

Теорема 2.3.1. Скінченні p-групи класу 2 з двома твірними вичерпуються групами слідуючих типів:

1) $G=(\langle c\rangle \times \langle a\rangle)\langle b\rangle$, де $[a,b]=a^{2r}c$, $[c,b]=a^{-4r^2}c^{-2r}$, r - ціле число, $\langle c\rangle \cap \langle b\rangle = 1$, $G' \cap \langle a\rangle = G' \cap \langle b\rangle = \langle a\rangle \cap \langle b\rangle = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \cap \langle b\rangle = \langle a^{2^{\gamma}}\rangle = \langle b^{2^{\gamma}}\rangle$, $Z(G)=G'=\langle [a,b]\rangle$, $|a|=|b|=2^{\gamma+1}$, $|[a,b]|=2^{\gamma}$, $|c|=2^{\gamma-1}$, $\gamma \geq 1$;

2) $G=(\langle c\rangle \times \langle b\rangle)\langle a\rangle$, де $[a,b]=b^{-pr}c^{-1}$, $[c,a]=b^{-p^2r^2}c^{-pr}$, r - ціле число, $\langle c\rangle \cap \langle a\rangle = \langle 1\rangle$, $G' \cap \langle b\rangle > G' \cap \langle a\rangle > 1$, $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=p^{\beta}$, $|c|=p^{\delta}$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq \delta \geq 1$;

3) $G=(\langle c\rangle \times \langle a\rangle)\leftthreetimes\langle b\rangle$, де $[a,b]=c$, $[b,c]=1$, $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=p^{\beta}$, $|c|=p^{\delta}$, p - просте число, $\alpha \geq \delta \geq 1$, $\beta > \delta$;

4) $G=\langle a\rangle\langle b\rangle$, де $[a,b]=a^{p^{\alpha-\gamma}}$, $Z(G)=\langle a^{p^{\gamma}}\rangle\langle b^{p^{\gamma}}\rangle$, $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=p^{\beta}$, $|[a,b]|=p^{\gamma}$, p - просте число, $\alpha \geq 2\gamma$, $\beta \geq \gamma \geq 1$;

5) $G=(\langle c\rangle \times \langle a\rangle)\leftthreetimes\langle b\rangle$, де $[a,b]=a^{p^{\alpha-\gamma}}c$, $[c,b]=a^{-p^{2(\alpha-\gamma)}}c^{-p^{\alpha-\gamma}}$, $Z(G)\cap\langle a\rangle=\langle a^{p^{\gamma}}\rangle$, $Z(G)\cap\langle b\rangle=\langle b^{p^{\gamma}}\rangle$, $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=p^{\beta}$, $|c|=p^{\delta}$, $|[a,b]|=p^{\gamma}$, p - просте число, $\alpha > \gamma > \delta \geq |2\gamma-\alpha|$, $\beta > \gamma$, $\delta \geq 1$.

Теорема 2.3.2. Скінченні нільпотентні групи класу не вище 2 з двома твірними вичерпуються прямими добутками скінченного числа груп G_1, G_2, ..., G_n, що задовольняють слідуючі умови:

1) порядки груп G_i, $i=1, 2, \ldots, n$, є степенями простих чисел і попарно взаємно-прості;

2) група G_i, $i=1, 2, \ldots, n$, породжується двома елемента-

ми і або абелева, або є групою одного із типів 1) - 5) теореми 2.3.1.

<u>Лема 2.3.6.</u> Нехай G - нільпотентна група класу 2 виду $G=P\leftthreetimes\langle b\rangle$, де $\langle b\rangle$ - нескінченна циклічна група, $P=\langle[a,b]\rangle\langle a\rangle$ є p - групою.

Тоді G ізоморфна групі одного із типів:

1) $G=(\langle c\rangle\times\langle a\rangle)\leftthreetimes\langle b\rangle$, де $[a,b]=c$, $[b,c]=1$, $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=\infty$, $|c|=p^{\gamma}$, $\alpha\geqslant\gamma\geqslant1$;

2) $G=\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b\rangle$, де $[a,b]=a^{p^{\alpha-\gamma}}$, $Z(G)=\langle a^{p^{\gamma}}\rangle\times\langle b^{p^{\gamma}}\rangle$, $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=\infty$, $|[a,b]|=p^{\gamma}$, $\alpha\geqslant2\gamma>2$;

3) $G=(\langle c\rangle\times\langle a\rangle)\leftthreetimes\langle b\rangle$, де $[a,b]=a^{p^{\alpha-\gamma}}c$, $[c,b]=a^{-p^{2(\alpha-\gamma)}}c^{-p^{\alpha-\gamma}}$ $|a|=p^{\alpha}$, $|b|=\infty$, $|[a,b]|=p^{\gamma}$, $|c|=p^{\sigma}$, $\alpha>\gamma>\sigma\geqslant1$;

<u>Теорема 2.3.3.</u> Нескінченні нільпотентні групи класу не вище 2 з двома твірними вичерпуються групами слідуючих типів:

1) $G=(\langle c\rangle\times\langle a\rangle)\leftthreetimes\langle b\rangle$, де $[a,b]=c$, $[b,c]=1$, $|a|\leqslant\infty$, $|b|\leqslant\infty$, $|c|\leqslant\infty$;

2) $G=(P_1\times\ldots\times P_i\times\ldots\times P_n)\leftthreetimes\langle b\rangle$, $n\geqslant1$, де P_i - скінченна p - група, $p_i\neq p_j$ при $i\neq j$, $P_i\leftthreetimes\langle b\rangle$ - група одного із типів 1) - 3) леми 2.3.6. або $P_i\leftthreetimes\langle b\rangle=P_i\times\langle b\rangle$, де $P_i=\langle a_i\rangle$, $|b|=\infty$, $i=1,2,\ldots,n$.

Глава III розбита на два параграфи. В ній вивчаються ненільпотентні локально ступінчасті узагальнено метагамільтонові групи.

Основними результатами §1 є слідуючі твердження.

Лема 3.1.1. Нехай G - ненільпотентна узагальнено метагамільтонова група, $S=P\leftthreetimes\langle d\rangle$ - її підгрупа Шмідта. Тоді $S\triangleleft G$, G/S - дедекіндова група, P - підгрупа одного із типів:

1) P - елементарна абелева p-група;

2) P - група кватерніонів;

3) P - неабелева p-група порядку p^3 і експоненти p;

4) P - неабелева p-група з комутантом порядку p і парним числом твірних, більшим за 2, експонента P дорівнює p або 4.

Теорема 3.1.1. Нехай G - локально ступінчаста узагальнено метагамільтонова група, T - її підгрупа, породжена комутантами всіх неінваріантних підгруп. Тоді група G розкладається в добуток $G=P\ C$, $P\cap C\leq T$, і задовольняє такі умови:

1) P - скінченна неодинична інваріантна в G p-група одного із типів 1) - 4) леми 3.1.1, $G'=P\langle f\rangle$, $T\leq\Phi(P)$ $\langle f\rangle\leq Z(G)$, p - просте число;

2) C - неінваріантна в G підгрупа з центральним в G циклічним комутантом $C'=\langle f\rangle\leq T$, що має вигляд $C=Z\langle b\rangle$, де $G'\cap C=G'\cap Z=T$, $[Z,G]\leq T$, $Z\cap\langle b\rangle=\langle b^m\rangle$, $1\neq m\in N$, $(m,p)=1$;

3) для довільного натурального числа k такого, що $m>k>0$, елемент b^k індукує на $P/\Phi(P)$ незвідний автоморфізм;

4) для довільного елемента c із C такого, що $P\langle c\rangle$ - ненільпотентна група, підгрупа $P\langle c\rangle$ інваріантна в G, і фактор-група $G/P\langle c\rangle$, що ізоморфна фактор-групі $C/C\cap\Phi(P)\langle c\rangle$, є дедекіндовою групою.

Конструктивному опису ненільпотентних локально ступінчастих узагальнено метагамільтонових груп присвячено § 2. Цей опис дає наступна теорема.

Теорема 3.2.1. Група G тоді і лише тоді є ненільпотентною локально ступінчастою узагальнено метагамільтоновою групою, коли вона розкладається в добуток $G=P\ C$ своїх: скінченної інваріантної в G елементарної абелевої або екстраспеціальної p-підгрупи P, p - просте число, $\Phi(P)\leq Z(G)$, $|\Phi(P)|\leq p$ і підгрупи C з центральним в G циклічним комутантом, що має вигляд $C=Z\langle b\rangle$, де $Z=C_C(P)$, $Z\triangleleft G$, $P\cap C=\Phi(P)\cap Z$, $Z\cap\langle b\rangle=\langle b^s\rangle$, $s>1$, $s\in N$,

$(p,s)=1$, для любого натурального числа k такого, що $s>k>1$, елемент b^k індукує на фактор-групі $P/\Phi(P)$ незвідний автоморфізм, $[P,b]\neq 1$. При цьому G - група лише одного із типів:

1) $G=P\leftthreetimes C$, де $C'=1$;

2) $G=P\cdot C$, де $P\cap C=P\cap\Phi(G)=\Phi(P)>C$, $|\Phi(P)|=p$, $(s,2)=1$;

3) $G=P\leftthreetimes C$, де C - гамільтонова група, силівська p-підгрупа B із C належить Z і є абелевою групою при неабелевості P;

4) $G=P\cdot C$, де $C=B\times H$, B - силівська p-підгрупа з C, яка належить Z, $P\cap C=P\cap\Phi(B)=\Phi(P)\geqslant B'$, H - гамільтонова холівська підгрупа з G виду $H=(Z\cap H)\langle b\rangle$, $|\Phi(P)|=p$, $p>2$, $(S,2)=1$;

5) $G=P\leftthreetimes C$, де $C=B\times H\times Q$, B - дедекіндова силівська p-підгрупа з C, H - дедекіндова холівська підгрупа з G, Q - силівська q-підгрупа з G виду $Q=\langle b\rangle Y$, $|b|=q^{\beta}$, $Q'=\langle b^{q^k}\rangle$, $\langle b\rangle\cap Y=\langle b^{q^m}\rangle$, $\beta>k>\beta-k>0$, $k>m>0$, $q>2$, експонента Y не перевищує число $q^{m-k+1}>2$, $P\leftthreetimes\langle b^{q^{m-1}}\rangle$ - група Шмідта, $Z=B\times H\times Y$, q - просте число, $q^m=S$, при неабелевості підгрупи P B - абелева група;

6) $G=P\cdot C$, де $C=B\times H\times Q$, B - силівська p-підгрупа з C, $P\cap C=P\cap\Phi(B)=\Phi(P)\geqslant B'$, $|\Phi(P)|=p$,

H - дедекіндова холівська підгрупа із G, Q - силівська q-підгрупа із G виду $Q=\langle b\rangle Y$, $|b|=q^{\beta}$, $Q'=\langle b^{q^k}\rangle$, $\langle b\rangle\cap Y=\langle b^{q^m}\rangle$, $\beta>k\geqslant\beta-k>0$, $k\geqslant m>0$, $q^k>2$, експонента Y не перевищує числа $q^{m-k+1}>2$, $P\leftthreetimes\langle b^{q^{m-1}}\rangle$ - група Шмідта, $Z=B\times H\times Y$, q - просте число, $q^m=S$.

Зауважимо, що тип 1) груп G теореми 3.2.1. повністю містить в собі клас ненільпотентних локально ступінчастих узагальнено метагамільтонових груп.

<u>Наслідок 1.</u> Комутант ненільпотентної локально ступінчастої узагальнено метагамільтонової групи G має вигляд $G=P\times\langle x\rangle$, де P - або елементарна абелева, або екстраспеціальна p-група, p - просте число, $x\in Z(G)$, $|x|=2^{\tau}q^{\xi}$, $\tau=0,1$, $\xi\geqslant 0$, $|\Phi(P)|\cdot 2^{\tau}<$

<2, q - просте число, (q,2p)=1.

Основні результати, одержані в дисертації, опубліковані в слідуючих працях:

1. Требенко Д.Я. Бесконечные нильпотентные группы класса не выше 2 с двумя образующими // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция, Львов, 9 - 11 сентября 1987 г.: Тез. сообщ., часть вторая, - Львов, 1987. - С. 278.

2. Требенко Д.Я. Нильпотентные группы с двумя образующими // Современный анализ и его приложения; Сб. научн. тр. - Киев: Наук. думка, 1989. - С. 201 - 208.

3. Требенко Д.Я. Примерные 3 - порожденные группы с циклическим центральным коммутантом // XI Всесоюз. симпоз. по теории групп, Кунгурка, 31 янв. - 2 февр. 1989 г.: Тез. сообщ. - Свердловск: Ин-т математики и механики Уро АН СССР, 1989. - С. 116.

4. Требенко Д.Я. О локально ступенчатых ненильпотентных обобщенно метагамильтоновых группах // Комплексный анализ, алгебра и топология. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1990. - С. 77 - 84.

5. Требенко Д.Я. Локально ступенчатые обобщенно метагамильтоновы группы // Междунар. конф. по алгебре, посвященная памяти А.И.Ширшова. Барнаул, 23 - 27 августа 1991 г. Тез. докладов по теории групп. - Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1991. - С. 110.

6. Требенко Д.Я. Обобщенно метагамильтоновы группы // Докл. АН Украины. - 1992. N 6. - С. 7 - 9.

Підписано до друку 07.07.1993 р. ОБЄМ 0,4. Формат 60х84 І/І6
Друк офсетний. Тир. ІОО пр. . Зам. 259. Безплатно.
ДОД КДПІ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Пирогова 9.