

АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ГРИЦЕНКО Василь Олександрович

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ПРОЦЕСІВ НАКОПИЧЕННЯ  
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.05 – теорія ймовірностей та  
математична статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1993

А.В. 28.000

Робота виконана в Інституті математики АН України

Офіційні опоненти: академік АН України, доктор фізико-математичних наук, доктор технічних наук, професор  
КОВАЛЕНКО І.М.,

доктор фізико-математичних наук,  
професор  
СОЛОВІЙОВ О.Д.,

доктор фізико-математичних наук,  
професор  
ТУРБІН А.Ф.

Провідна установа: Київський університет ім. Тараса Шевченка

Захист відбудеться "28" IX 1993 р. о  
11 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016 50 01  
при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ-4,  
ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано "25" VIII 1993 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої ради

ГУСАК Д.В.

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00802259 (Q)

ЛНБ ім. В. Стефаніка  
АН України

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Серцевиною розвитку класичних розділів теорії ймовірностей є її частини, присвячені асимптотичній поведінці сум необмежено зростаючого числа незалежних однаково розподілених випадкових величин. Тому цілком природно постає проблема побудови аналогічної теорії для процесів накопичення. Крім загальнонаукового значення таке дослідження розширяє можливості використання процесів накопичення при вивченні асимптотичної поведінки адитивних функціоналів, визначених на траєкторіях поведінки складних стохастичних систем, що є однією з центральних задач математичної теорії надійності.

Мета роботи. Поширення класичних результатів про асимптотичну поведінку сум незалежних випадкових величин на ситуацію, коли аналізується накопичення деякого показника стохастичної системи на необмежено зростаючому відрізку часу, визначеного на траєкторії її поведінки в схемі серій, якщо топологія граничного переходу задається деяким функціоналом системи.

Методика дослідження. Використані конструктивні методи теорії ймовірностей і апарат граничних теорем. Результатом дисертації є розроблений автором метод зображення характеристик поведінки стохастичних систем у вигляді значень деякого регенеруючого процесу.

Наукова новизна, теоретичне і практичне значення.

1. Вперше проведено аналіз граничної поведінки рідких потоків шляхом зведення проблеми апроксимації до вивчення області дії ослабленої форми закону великих чисел.
2. Знайдено ряд аналітичних критеріїв, які забезпечують виконання ослабленої форми закону великих чисел. Запропонована методика конструктивної побудови послідовностей, що забезпечують виконання ослабленої форми закону великих чисел.
3. Установлена загальна форма граничної теорем про збіжність процесу накопичення до процесу з незалежними приростами.
4. Розроблено новий метод побудови вкладених процесів відновлення. Запропоновано поняття узгодженої точки регенерації.
5. Установлено граничні теореми про збіжність функціоналів адитивного типу до процесів з незалежними при-

ростами.

4. Розроблено новий метод побудови вкладених процесів відновлення. Запропоновано поняття узагальненої точки регенерації.

5. Установлено граничні теореми про збіжність функціоналів адитивного типу до процесів з  $n$  залежними приростами.

6. Розроблено методика апроксимації потоків подій на траєкторіях еволюції систем обслуговування.

7. Запропоновано метод скінченних траєкторій в оцінці надійності складних систем.

Апробація роботи. Основні результати роботи і їх застосування доповідались на ІУ, У Міжнародних Вільнювських конференціях з теорії ймовірностей та математичної статистики, на ІУ, УІ Радянсько-Японських симпозиумах з теорії ймовірностей та математичної статистики, на І Всесвітньому Конгресі Товариства математичної статистики та теорії ймовірностей ім. Бернуллі, а також на різних республіканських конференціях і наукових семінарах України та Росії, в тому числі на секції теорії ймовірностей та математичної статистики при вченій раді Інституту математики АН України.

Публікації. Основні результати дисертації викладені в 20 роботах автора.

Структура дисертації. Дисертація складається із вступу, трьох глав і списку літератури.

### ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Природним узагальненням процесів наростаючих сум

$$\sum_{k=1}^n \xi_k$$

випадкових величин  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$  є процеси накопичення, які були введені в науковий обіг В.Смітом в 1955 р.

В дисертації під процесом накопичення  $z(t)$  ми розуміємо процес, побудований за сукупністю незалежних однакових розподілених при  $i \geq 1$  випадкових елементів

$$\xi_i = (\xi_i(t), \tau_i), \quad i \geq 1,$$

з компонентами  $\xi_i(t) \in \mathbb{R}^d$ ;  $t \in (0, \infty)$ ;  $\tau_i \geq 0$  формулов

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)-1} s_i(\tau_k) + s_i(t) (t - S_{\nu(t)-1}), \quad (1)$$

де

$$\nu(t) = \min \{ k : S_k \geq t \},$$

$$S_k = \tau_1 + \dots + \tau_k.$$

Процеси накопичення зустрічаються досить часто в застосуваннях. В теорії масового обслуговування, коли моменти регенерації з ймовірністю 1 наступають через скінченні проміжки часу, можна розглядати, наприклад

- сумарний час зайнятості;
- сумарний час, затрачений вимогами перебування в черзі;
- загальну кількість вимог, в моменти прибуття яких величина черги перевищувала  $L$ .

Досить просто цей список можна продовжити.

До прикладних результатів В.Сміта відносно процесів накопичення треба віднести знайдені ним умови збіжності до нормального закону при  $t \rightarrow \infty$  розподілів центрованих і нормованих значень  $z(t)$ .

Перша частина дисертації (глави 1) присвячена узагальненню цього результату в смислі аналізу умов збіжності процесу накопичень в схемі серій до процесу з незалежними приростами.

В такій загальній формі ця проблема раніше не ставилась, але окремі результати безумовно були. Даними рамками охоплюються граничні теореми про рідішчі потоки, що йдуть від А.Реньї, і граничні теореми щодо моменту першої реалізації малоймовірної події в регенеруючому процесі, знайдені О.Д.Соловйовим.

Головною перепоною, що не дозволила сформулювати граничну теорему про збіжність до процесу з незалежними приростами відразу ж після введення поняття процесу накопичення, є колізія, пов'язана з наявністю останнього члена в (1), і можливою залежністю між компонентами  $\xi_i$ .

Природно було починати дослідження для ситуації, коли граничним виступає пуассонівський процес. У цьому зв'яз-

ку істотний вклад у розв'язок даного питання внесли Ш.К.Веляев, Б.В.Гнеденко, А.М.Зубков, І.М.Коваленко, А.Ренуї, О.Д.Соловійов, А.Я.Хінчин. Як виявилось, визначальне значення в питанні збіжності процесу накопичення до процесу з незалежними припосадами має виповненість деякої ослабленої форми закону великих чисел (0.3.В.4.) для послідовності  $\tau_k$ ,  $k \geq 1$ .

Висновком став новий якісний тип граничної теореми, де стверджується можливість апроксимації розподілів зі зміною тільки масштабу часу без виключення в умови вигляду апроксимуючих законів і із можливістю стохастичних залежностей між елементами вихідної сукупності випадкових елементів. Важливо тільки виконання 0.3.В.4.

**О з н а ч е н н я.** Сукупність додатних випадкових величин  $\{\tau_{nk}\}$ , де  $k=1, 2, \dots$  - індекс сумування,  $n \rightarrow \infty$  - параметр серії, задовольняє 0.3.В.4., якщо існує послідовність постійних  $m_n$  така, що для довільного  $x > 0$

$$\frac{1}{nx} \sum_{k=1}^{nx} \tau_{nk} / m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2)$$

Оскільки тут структура  $\{\tau_{nk}\}$  така, що виводить нас за рамки процесу накопичення (1), то для уникнення плутанини елементи, що сумуються, ми позначаємо  $\gamma_{nk}$ ,  $k \geq 1$ . При цьому для них накладається умова:

$$\sup_{k \geq 1} P(\gamma_{nk} \neq 0) \leq \frac{q}{n}, \quad q > 0. \quad (3)$$

В § 1 гл.1 розглядається аналог процесу накопичення

$$\zeta_n(x) = \sum_{k=1}^{nx} \gamma_{nk},$$

де

$$\mu(x) = \max \left\{ k: \sum_{i=1}^k \tau_{ni} \leq x \right\}.$$

Апроксимуючий розподіл для  $\zeta_n(x)$  тут задає сума  $\sum_{i=1}^{nx} \gamma_{ni}$ . Так, згідно з теоремою 1 в умовах (2) і (3) для всіх  $\epsilon > 0$  і кожного  $x > 0$  має місце

$$P(\xi_n(x) \in E) - P(\sum_{i=1}^{n_x} \eta_{n_i} \in E) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4)$$

Для порівняння цього результату з відомими, ми повинні зробити припущення, що пари  $(\tau_i, \tilde{\tau}_i)$ ,  $i \geq 1$ , незалежні і однаково розподілені, тобто для ситуації, коли розподіл  $\xi_n(x)$  апроксимується пуассонівським законом. Питання зводиться до знаходження аналогічних критеріїв виконання 0.3.В.4., чому присвячено §2 гл.1. Наведемо їх:

К 1. Існує така послідовність  $g_n$ , що

$$\frac{M(\tau_{n_1})^2}{n(M\tau_{n_1})^2} + n P(\tau_{n_1} > g_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\tau_{n_1} = \tilde{\tau}_{n_1}, 1(\tau_{n_1} \leq g_n).$$

Тут і далі  $1(A)$  - індикатор події  $A$ .

К 2. Для  $d > 1$

$$\frac{1}{n^{d-1}} \frac{M|\tau_{n_1} - M\tilde{\tau}_{n_1}|^d}{(M\tau_{n_1})^d} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

К 3. Для  $d > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\tau_{n_1} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M\tilde{\tau}_{n_1}^{-1/d}$$

К 4. Існує така послідовність  $\beta_n$ , що задовольняє

$$\beta_n = n \int_0^{\beta_n} x P(\tau_{n_1} \in dx)$$

$$\frac{x P(\tau_{n_1} > x)}{\int_0^{\beta_n} x P(\tau_{n_1} \in dx)} + \frac{1}{n \int_0^{\beta_n} x P(\tau_{n_1} \in dx)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}]{} 0$$

К 5.

$$\begin{cases} x P(\tau_{n_1} > x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}]{} 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n P(\tau_{n_1} \in dx) > 0. \end{cases}$$

К 6.

$$\begin{cases} \int_N^\infty P(\tau_{n+1} > x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{N \rightarrow \infty} 0, \\ M\tau_{n+1} = 1. \end{cases}$$

К 7.

$$\frac{\tau_{n+1}}{n M\tau_{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} 0,$$

символом  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} 0$  позначена збіжність за Хінчи-ним, яка визначається співвідношеннями

$$\begin{cases} \int_x^\infty P(\xi_n > t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \\ x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Ми намагались навести всі ті модифікації умов різних авторів щодо поведінки розподілу  $\tau_{n+1}$ , які виникали при розробці критеріїв збіжності нормованого часу до першої реалізації малоймовірної події до показниково розподіленої. Так, співвідношення в К 2 було введено О.Д.Соловйовим. Окремим випадком К 2 виступає співвідношення

$$\frac{M\tau_{n+1}^2}{n(M\tau_{n+1})^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

яке, можливо, стало найбільш уживаним серед спеціалістів-надійсників при аналізі малоймовірних подій. Наприклад, при побудові "штучних" моментів регенерації І.М.Коваленка спеціалісти користувались означенням результатом О.Д.Соловйова в такій модифікації К 2: для деякого  $d > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\tau_{n+1} > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\tau_{n+1}^{1+d} < \infty,$$

Формулювання К 4 і К 6 теж були запропоновані раніше в аналізі малоймовірних подій (І.М.Коваленко). Умова К 7 вперше була запропонована О.Д.Соловйовим, а послідовно використовувалась А.А.Шахбазовим у тому ж зв'язку з малоймовірними подіями.

Добре відомо, наскільки численні варіанти перенесення граничної теореми про збіжність часу до першої реалізації малоймовірної події до показникової з регенеруючого процесу на більш загальні математичні моделі, скажімо на напівмарківські процеси. При цьому підході до цієї проблеми таке перенесення зводиться до перевірки 0.3.В.4. для відповідних послідовностей випадкових величин. Приведемо два результати в цьому напрямку.

Нехай

$\{z_n(k) \in \{1, \dots, z\}, k \geq 1\}$ , - випадкова послідовність зі скінченною множиною станів;

$\tau_n(i, j), i \geq 1, j \geq 1$  - мовина невід'ємних, незалежних в сукупності і незалежних від випадкових величин, розподіли яких не залежать від індексу  $i$  і задовольняють при кожному  $j$  0.3.В.4.; існують  $m_n$  такі, що

$$\frac{\sum_{j=1}^n \tau_n(i, j)}{n m_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1$$

Питання ставиться так: при яких додаткових умовах послідовність  $\tau_{nk} = \tau_n(z_n(k), k)$  задовольняє 0.3.В.4.? Виявляється, якщо позначити  $\nu_{nz}(i)$  - кількість злучень послідовності  $\{z_n(k)\}$  в стан  $z$  за  $i$  стрибків, то для позитивної відповіді на поставлене питання достатньо, щоб існували такі числа  $\tau_{nz}$ , що для кожного  $t > 0$

$$\sum_{i=1}^z \left| \frac{\nu_{nz}(it)}{nt} - \tau_{nz} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

$$c = \max_i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{ni}}{\sum_{k=1}^z m_{nk} \tau_{nk}} < \infty.$$

Інший варіант побудови послідовних проміжків часу

$\tau_{nk}$  виникає при аналізі систем обслуговування стандартного вигляду. Нехай  $\Delta_{nk}$ ,  $k \geq 1$  - послідовність, що задовольняє 0.3.В.4.:

$$\frac{1}{nt} \sum_{k=1}^{nt} \frac{\Delta_{nk}}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1, \quad t > 0;$$

$\nu_{nk}$ ,  $k \geq 1$  - послідовність натуральнозначних випадкових величин, що задовольняє 0.3.В.4.:

$$\frac{1}{nt} \sum_{k=1}^{nt} \frac{\nu_{nk}}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1, \quad t > 0;$$

Проміжки часу  $\tau_{nk}$  формуються за правилом:

$$\tau_{nk} = \sum_{i=1}^{\nu_{n1} + \dots + \nu_{nk} - 1} \Delta_{ni} - \sum_{i=1}^{\nu_{n1} + \dots + \nu_{nk-1} - 1} \Delta_{ni}$$

Виконуваність 0.3.В.4. для  $\tau_{nk}$ ,  $k \geq 1$  означає

$$\frac{1}{nt} \sum_{k=1}^{nt} \tau_{nk} / (a_n b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1, \quad t > 0.$$

Виявляється, це має місце, коли або  $\Delta_{nk}$ ,  $k \geq 1$ , незалежні і однаково розподілені, або існує постійна  $b$  така, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/b = 1$ .

Повертаючись до загальної проблеми апроксимації, вираженої співвідношенням (4), відзначимо, що цей результат в певних умовах може бути уточненим встановленням оцінок близькості. Так, якщо  $\tau_{nk}$ ,  $k \geq 1$ , незалежні в сукупності з додатним математичним сподіванням  $m_n$  і скінченною дисперсією  $\sigma_n^2$ , а відносно  $\tau_{nk}$  виконана нерівність

$$\sup_z P(U_{i=z}^{k, z} \{ \gamma_{ni} \neq 0 \}) \leq \epsilon_0 + k \epsilon$$

де  $\epsilon_0, \epsilon$  - невід'ємні числа, то для всіх множин  $E$

$$|P(\xi(T) \leq E) - P(\sum_{i=1}^n \xi_{ni} \in E)| \leq \epsilon_0 + \epsilon + \epsilon$$

$$+ 3 \left( \frac{\sigma_n^2}{m_n^2} \right)^{1/3} + \left( \frac{\epsilon^2 T}{m_n} \right)^{1/3} + \frac{1}{m_n} \left( \frac{\epsilon}{T} \sigma_n^4 \right)^{1/3} + \left( \left( \frac{\epsilon}{T} \right)^2 \sigma_n^2 \right)^{1/3}$$

Зупинимося ще на проблемі апроксимації  $\sum_{k=1}^n \xi_{nk}$  пуассонівським законом. Проблема полягає в розробці процедури апроксимації сум залежних випадкових величин. Практично на всьому протязі розвитку теорії ймовірно: ей різні автори намагались поглибитись у вирішенні цього питання. Використаний нами підхід дещо схожий з ідеєю С.Н.Бернштейна апроксимації сум залежних величин гауссівським законом.

Ми проводимо пуассонівську апроксимацію сум випадкових величин у припущенні, що доданки взаємозалежні. Але в умовах передбачається, що розподіли доданків можуть змінюватись в деяких околах. Тоді апроксимація суми потрібних нам залежних величин проводиться шляхом проміжної побудови допоміжного ймовірного простору з незалежними вг'здовкими величинами на ньому, які наближають потрібну суму і розподіли яких попадають у згадані околки. Перевага цього підходу полягає в порівняній простоті його метричної частини. Так, зміст теореми 1 § 3 зводиться до такого твердження. Якщо  $\xi_{01}, \xi_{02}, \dots, \xi_{0n}$  незалежні випадкові величини зі значеннями із  $\{0, 1, \dots\}$ , для розподілів яких має місце

$$p_i - \rho_i \leq P(\xi_{0i} = 0) \leq p_i,$$

$$P(\xi_{0i} \geq 2) \leq \delta_i, \quad \sum_{i=0}^n p_i = \lambda_n,$$

то для всіх множин  $E$

$$|P(\sum_{i=1}^n \xi_{0i} \in E) - e^{-\lambda_n} \sum_{k \in E} \lambda_n^k / k!| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (\max(\rho_i, p_i^2/2) + \max(\delta_i, p_i^2/2)).$$

Прикладом використання співвідношення (9) може слугувати традиційна в даному контексті задача про час перебування напівмарківського процесу в піднявнині стані, якщо ймовірність виходу з піднявнини асимптотично жала. Щоб виявити конкурентноз-

датність нашого підходу, ми розглянули окремий випадок цієї задачі (множина станів скінченна), але в рамках більш широких, ніж загальноприйнято:

1. Для часів перебування в станах вимагається виконання 0.3.В.4.

2. Відносно перехідних ймовірностей вимагається тільки умова стійкості частот влучень у стани.

3. Вимагається стійкість деякої інтегральної характеристики за стаціонарною мірою (параметра апроксимуючого розподілу).

Ми присвячуємо стільки місця теоретичним аспектам аналізу малоймовірних подій в зв'язку з їх прикладною значимістю для математичної теорії надійності, до чого ми повертаємось у главі III.

4 гл. I присвячений аналізу збіжності процесу накопичення в загальному вигляді. Певна річ, оскільки тут йде мова про збіжність до процесу з незалежними приростами, то і умови збіжності менш жорсткіші в порівнянні з чисто рідючими потоками.

В цілому умови граничної теореми цілком природні, досить загальні і зводяться до таких:

(А): процес сум

$$\sum_{k=0}^{nt} (\xi_{nk} - a_n),$$

де

$$\xi_{nk} = z_k(\tau_k),$$

$n$  - параметр серії,

$a_n$  - центруюча величина,

збігається до процесу з незалежними приростами;

(Б): проміжки часу

$$\tau_{nk} = \tilde{\tau}_k$$

задовольняють КІ - критерію виконання 0.3.В.4.;

(В): існує границя дисперсійної матриці гауссівської компоненти;

(Г): вимога про можливість асимптотичного знехтування першого і останнього доданків процесу накопичення.

Завершивши аналіз глави I дисертації, підкреслимо, що мотивацією для пошуку і доведення асимптотичних результатів в існуючому вигляді крім загальнонаукової зацікавленості була необхідність одержати інструментальні граничні теореми для сімей процесів, тобто схемі серій, коли топологія граничного переходу включає в себе маніпуляції, зв'язані з побудовою точок регенерації. Таким чином ми підійшли до проблематики глави II.

Головна проблема, яку поставив перед собою автор в главі II, це пошук математичної моделі, зручної для описання функціонування складних стохастичних систем з метою аналізу надійних характеристик та обґрунтування цього вибору.

Треба визнати, що на сьогоднішній день дефіциту в кількості різних моделей нема. Можна навіть визнати, що в значній мірі цей етап математичної теорії завершився в зв'язку з виданням підсумкових монографій і довідників. Мабуть зараз найбільш універсальними моделями для згаданих цілей слугують напівмарківські процеси, найбільш повне тлумачення використання яких дано у відомих монографіях В.С.Королюка і А.Ф.Турбіна.

За основу нашого дослідження була взята ідея використання регенерувачих процесів і можна її назвати побудовою узагальненої точки регенерації. На відміну від методу Кендалла побудови вкладених моментів регенерації наша конструкція передбачає таку структуру подій, за якими будуться моменти майбутнього регенерувачого процесу, що в моменти їх здійснення у спостерігача недостатньо інформації для прийняття рішення, чи наступив черговий момент регенерації - спостерігачу для цього потрібно ще "заглянути в майбутнє". Від цього характеристики періоду регенерації дещо "розмазуються". У цьому відношенні проблема подібна до тієї, яка виникає при побудові "штучної" точки регенерації І.А.Коваленка.

Витоки цієї тематики спеціалісти знаходять у Дебліна. Традиційно складалося так, що істотне просування в проблемах ергодичності і стійкості випадкових процесів досягалося з використанням нових методів чисто ймовірнісної природи, до яких, зокрема, відноситься метод склеювання; а те, що ми назвали узагальненою точкою регенерації, теж є певною модифікацією методу склеювання.

Вперше метод склеювання для задач теорії надійності розробив І.М.Коваленко. На сьогоднішній день ці питання одержали значний розвиток. Але, на наш погляд, всі відомі конструкції мають більш теоретичний інтерес. Нам знадобилась розробка нового методу побудови узагальненої точки регенерації, оскільки існуючі методи вимагають умов аналітичного вигляду щодо ядра марківського ланцюга (умова жінорунання), що по суті означає існування неперервної компоненти відповідного розподілу.

Центральним об'єктом розбору глави II є випадкова послідовність  $z(t) \in R^d$ ,  $t = 1, 2, \dots$ . Метою є знаходження умов, при яких  $z(t)$  можна подати у вигляді (1).

Для спрощення формулювань ми виходимо з того, що побудова

$z(t)$  ведеться на базі деякої вихідної послідовності випадкових елементів  $\xi_0, \xi_1, \dots$ , які незалежні і однаково розподілені в  $(X, \mathcal{B})$ . Передбачено, що  $z(t)$  вимірна відносно  $\mathcal{F}_t$  -  $\sigma$ -алгебри, породженої  $(\xi_0, \dots, \xi_{t-1})$ . На тому ж імовірнісному просторі задано ланцюг Маркова  $u_n, n \geq 1$  зі значеннями у вимірному просторі  $(U, \mathcal{U})$  і початковим станом  $u_0$ . Нехай  $\mathcal{N}_{n,m}$  -  $\sigma$ -алгебра, породжена  $(u_k, n \leq k < m)$ , причому  $\mathcal{N}_{n,m} \subseteq \mathcal{F}_m$ . Фіксується також такі три об'єкти:

A - деяка підмножина станів ланцюга  $u_n, n \geq 1$ ;

R - натуральне число;

$Q \in \mathcal{B}$ .

Сформулюємо умову, яка забезпечує існування події, при здійсненні якої буде спостерігатися незалежність між "минулим" і "майбутнім":

(V): для будь-яких

$$A_1 \in \mathcal{N}_{1,n},$$

$$A_2 \in \mathcal{N}_{n,n+R},$$

$$n_1 = n < n_2$$

має місце тотожність

$$P(A_1, A_2 / u_n \in A, (\xi_k \in Q, n \leq k < n+R)) = \\ = P(A_1 / u_n \in A) P(A_2 / u_n = u_0, (\xi_k \in Q, n \leq k < n+R)).$$

Вкладений процес відновлення будувється так. Нехай

$$\theta_k = 1(u_k \in A, (\xi_{k+i} \in Q, 0 \leq i < R), \sum_{i=1}^R \theta_{k+i} = 0), k \geq 1;$$

$$\theta_k = 0, k \leq 0.$$

$$\Theta(k) = \sum_{i=1}^k \theta_i,$$

$$J(n) = \min \{k : \Theta(k) = n\},$$

$$\tau_k = J(k) - J(k-1), k > 1$$

$$\tau_1 = \min \{k > 1 : u_k \in A, (\xi_i \in Q, k \leq i < k+R)\}.$$

Теорема 1 § 2 глави II стверджує, що так побудовані випадкові величини  $\tau_k$ ,  $k \geq 1$ , незалежні і однаково при  $k > 1$  розподілені.

Для того, щоб перейти від процесу відновлення до регенеруючого процесу, вводиться умова

(U):

$$\Theta_t [z(t+) - z(t)] = \Theta_t z_t(x) \quad P\text{-м.н.},$$

де  $z_t(x)$  виірно щодо  $\sigma(\xi_t, \dots, \xi_{t+x-1})$  з розподілом, що не залежить від  $t$ .

На основі цієї умови вводиться сімейство незалежних елементів  $(z_k(x), \tau_k)$ ,  $k \geq 1$ , формулами:

$$(z_k(x), \tau_k) \doteq (z(x), \Theta_k),$$

$$P(z_k(x) \in E, \tau_k = l) =$$

$$= P(z(t+1) - z(t) \in E, \Theta_2 - 1 = l / \{\xi_i \in Q, 1 \leq i \leq R\}), k = 2, 3, \dots$$

Теорема 2: 2 глави II стверджує можливість на цій основі зображення (1).

§ 3 гл. II присвячено використанню зображення (1) для аналізу асимптотичної поведінки функціоналів адитивного типу від траєкторії еволюції системи обслуговування виду  $G|I|G|m|N$ . Ці характеристики, зрозуміло, повинні вкладатись в умови (V) і (U), а тому ми їх називаємо  $\Theta$ -характеристиками. В їх число входять практично всі більш-менш поширені адитивні функціонали.

Далі всі теоретичні складності зводяться до знаходження співвідношень між параметрами системи обслуговування, і забезпечували б виконання умов теореми про граничну поведінку процесу накопичення (теорема 2 § 4 гл. 1). Найбільш наглядну форму таких умов одержано для багатолінійної системи без черги, для якої достатнім виявляється існування математичного сподівання числа надходящих вимог під час одного обслуговування, і також строгої відокремленості від нуля ймовірності обслуговування однієї вимоги

за час, коли в систему надходить число вимог, що дорівнює кількості обслуговуваних пристроїв. Для системи з місцями для чекання аналіз складніший, якщо добиватись максимального узагальнення. Якщо характеристики не залежать від параметра серії, то умови тут елементарні: загрузка системи повинна бути меншою від одиниці. В схемі серій є можливість використання нерівності О.Д.Соловйова, одержаної ним для ймовірності "опорожнення" однолінійної системи з метою аналізу загальної системи у випадку  $Y$  високої надійності. Ця нерівність цілком придатна для перевірки умови (Б) нашої загальної теореми. Завершується глава II теоремою про збіжність процесу накопичення  $\Theta$  - характеристики, які спостерігається в моменти надходження вимог.

Глава III дисертації присвячена аналізу збіжності потоку втрачених вимог в умовах малоймовірних втрат. Граничними тут виступають процеси типу пуассонівського з тими тільки узагальненнями, які виникають в разі невиконання О.З.В.Ч. для проміжків між поступаннями вимог.

Питання аналізу потоку втрачених вимог добре ілюструє теорія збіжності адитивного функціоналу. Треба зазначити, що після перших оригінальних публікацій на цю тему О.Д.Соловйова, коло спеціалістів, які продовжували дану тематику, весь час розширювалось і, по суті, ці прикладні по відношенню до теорії випадкових процесів роботи, стали потужним стимулом для відповідних досліджень в рамках напівмарківських процесів. Особливо це стосується вивчення процесів з укрупненням фазового простору і наявністю асимптотично несуттєвих станів (В.В.Анісімов, І.М.Коваленко, В.С.Корольк, А.Ф.Турбін).

§1 глави III присвячено граничним теоремам для систем обслуговування виду  $G1 | C | m | 0$ , які є прямим продовженням теорем О.Д.Соловйова про асимптотичну поведінку часу до першої втрати вимоги системою обслуговування зі швидким обслуговуванням.

Наше узагальнення двояке. По-перше: умову швидкого обслуговування ми заміняємо на більш слабку вимогу рідких втрат. По-друге: якщо у О.Д.Соловйова було знайдено вигляд характеристичної функції часу до втрати

$$\frac{1}{1 + a(z)}$$

то ми цей результат одержуємо як наслідок того, що потік втра-

чених вимог на границі описується суперпозицією незалежних між собою монотонного процесу з незалежними приростами і пуассонівським процесом. Теоретичні конструкції подібного типу досліджувались раніше в роботах В.В.Анісімова і Д.С.Сільвестрова. Принциповим для нашої моделі стало доведення незалежності процесів - компонент суперпозиції.

Топологія граничного переходу, яку ми назвали умовою рідких втрат, має такий вигляд:

$$\varepsilon = m P(\gamma_1 \geq \Delta_1 + \dots + \Delta_m) + \sum_{k=m}^{\infty} P(\gamma_1 \geq \Delta_1 + \dots + \Delta_k) \rightarrow 0$$

де  $\gamma_k$  - час обслуговування  $k$ -ї вимоги

$\Delta_k$  - час між поступаннями  $k$ -ї і  $k+1$ -ї вимоги.

Вводиться малий параметр  $\rho \rightarrow 0$ , який грає роль нормуючого множника. Число  $\rho$  дорівнює ймовірності того, що за час обслуговування  $1$ -ї, ...,  $m$ -ї вимог втрат не буде, а за час обслуговування  $m$ -ї вимоги втрата наступить при умові, що перша вимога надійшла в порожню систему.

Серед умов принципово є вимога про притягання часу між поступаннями до деякого безмежно-подільного закону.

Вивчаються процеси  $\tau(t)$ ,  $\chi(t)$  накопичення відповідно часів  $\Delta_k$  і індикаторів втрат вимог  $\chi_k$ , просумованих від  $1$  до  $t/\rho$ . Тоді має місце зближення їх розподілів з розподілами незалежних процесів з незалежними приростами. Розподіл часу до  $k$ -ї втрати вимоги асимптотично зближується при  $\varepsilon \rightarrow 0$  з розподілом значення процесу  $\tau(t)$  в момент, коли незалежний від нього процес  $\chi(t)$  досягає рівня  $k$ .

Підкреслимо: ми вимагаємо дещо менше, ніж 0.3.B.4. для проміжків між поступаннями вимог, і тим самим вийшли за рамки пуассонівського закону. Якщо керуватися практичними міркуваннями, то умова в формі 0.3.B.4. цілком задовільна, бо дозволяє супротивити асимптотичні висновки оцінками близькості відповідних розподілів. Цьому ми присвячуємо §2 гл. III.

Перша теорема цього параграфу дає оцінку ймовірності відсутності втрат вимог серед перших  $n$ , які поступили в порожню систему  $P(\sum_{i=1}^n = 0)$ .

Так, коли

$$\varepsilon_1 = \sum_{z=m}^{\infty} P(\gamma_1 \geq \Delta_1 + \dots + \Delta_z),$$

$$\varepsilon_2 = (m-1) P(\gamma_1 \geq \Delta_1 + \dots + \Delta_m),$$

то

$$\begin{aligned} n\rho \left( \frac{3}{2} \sqrt{\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2} + \frac{5}{2} \varepsilon_1 + 6\varepsilon_2 \right) &\leq \\ &\leq e^{-\rho n} - P(\zeta_n = 0) \leq \\ &\leq n\rho \sqrt{\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2} + \frac{3}{2} \varepsilon_1 + 5\varepsilon_2, \end{aligned}$$

при цьому, якщо позначити  $\zeta(x)$  - число втрачених вимог на проміжку часу  $x$ , то розподіл часу до першої втрати буде зближатись з

експонентом, причому, якщо  $\rho = \mathfrak{D}(\Delta_1) / (M\Delta_1)^2$ , то

$$\begin{aligned} |P(\zeta(t \frac{M\Delta_1}{\rho}) = 0) - P(\zeta_{t/\rho} = 0)| &\leq \\ &\leq 3\sqrt[3]{\rho t} + \sqrt[3]{\frac{\rho\rho}{t}} + \sqrt[3]{\frac{(\rho\rho)^4}{t^2}} + \rho + \varepsilon + 2\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Поток втрачених вимог апроксимується в цьому параграфі стрибкоподібним процесом з незалежними приростами. Величина стрибка задається тут конструктивним чином - як число втрачених вимог вихідної системи обслуговування на початковому відрізку функціонування.

Далі окремо розглядається клас систем обслуговування зі швидким обслуговуванням. Це системи, для яких математичне сподівання числа вимог, які надходять під час одного обслуговування, є достатньо мале, що визначає більш шорстку топологію граничного переходу  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Якщо позначити  $\rho_k$  - ймовірність того, що на проміжку  $[0, \gamma)$  буде втрачено рівно  $k$  вимог, то розподіл числа загублених вимог серед перших  $n$  поступивших  $\zeta_n$  апроксимується розподілом випадкової величини  $\hat{\zeta}_n$ , характеристична функція якої має вигляд

$$M \exp\{i z \hat{\zeta}_n\} = e^{-\rho} \left\{ n \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k (e^{izk} - 1) \right\},$$

і для всіх множин

$$|P(\xi_n \in E) - P(\hat{\xi}_n \in E)| \leq \frac{1}{2} n \rho(5\sqrt{\varepsilon} + 7\varepsilon) + 2\varepsilon.$$

Тут же дається аналогічна (5) оцінка близькості розподілів  $\xi_n$  і  $\hat{\xi}_n$  ( $n \in \mathbb{M}_\Delta, /p$ ).

На завершення параграфу показана можливість розповсюдження розробленого методу на системи обслуговування, вхідні потоки яких не є взагалі кумулятивними, рекурентними, а часи обслуговувань не обов'язково мають однакові функції розподілу. Щоправда, відносно часів обслуговування припускається, що в зображенні

$$P(\gamma_i > x) = \exp\left\{-\int_0^x \lambda_i(t) dt\right\}, \quad i \geq 1,$$

$\lambda_i(t)$  - неспадні функції.

Топологія граничного переходу задається так:

$$\varepsilon = \left(1 - \sup_{1 \leq i \leq j} P(\gamma_i \geq \tau_j)\right)^{-1} - 1 \rightarrow 0.$$

Основною особливістю такої системи є те, що тут пропадає ефект групових втрат. Так, коли

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n \rho_i,$$

$$\rho_i = M 1\left(\bigcup_{z=m-1}^{\infty} 1(\gamma_i \geq \Delta_i + \dots + \Delta_{i+z}) \times \sum_{\ell=i}^{i+z} 1(\gamma_\ell \geq \Delta_\ell + \dots + \Delta_{i+z}) \geq m\right),$$

то для всіх множин  $E$

$$\begin{aligned} & |P(\xi_n \in E) - e^{-\lambda_n} \sum_{k \in E} \lambda_n^k / k!| \\ & \leq 2\lambda_n \sqrt{\varepsilon} + (4\lambda_n + 2)\varepsilon, \end{aligned}$$

зокрема,

$$|P(\xi_n = 0) - e^{-\lambda_n}| \leq \frac{3}{2} \lambda_n \sqrt{\varepsilon} (1 + o(1)).$$

Зуважимо тільки, що остання оцінка справедлива і для децю більш слабкої топології граничного переходу.

Проблеми оцінок параметра через скінченні суми інтегралів розглядаються в останньому параграфі дисертації.

Якщо має місце

$$P(\Delta, < d) = P(\gamma, > D) = 0,$$

де  $d, D$  - константи, не залежні від параметра серії, то із явного вигляду негайно випливає зображення його скінченною сумою. В інших випадках доводиться обмежуватись оцінками  $P$  з точністю до множника  $(1 + o(\cdot))$ .

Аналогічна проблема виникає і для інших високонадійних систем при знаходженні середнього часу до відмови. Існує методика оцінки цієї величини, запропонована І.М.Коваленком, яка зводиться до обчислення ймовірності відмови по монотонній траєкторії. О.Д.Соловйовим при деяких обмеженнях встановлено аналогічну властивість для систем обслуговування зі швидким обслуговуванням. Однак, правило обчислення ймовірності відмови по монотонних траєкторіях ніяк не всеохоплює. На це звернув увагу автор в [5]. І.М.Коваленко показав суттєвий вплив немонотонних траєкторій для систем  $M|G|m|n$ .

В даній дисертації обґрунтовується деяке узагальнення згаданого правила, яке можна назвати принципом скінченних траєкторій.

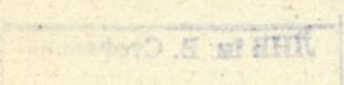
Обмежуємось ми тільки системами зі швидким обслуговуванням. Вводиться нове поняття - випадкової величини, старішої порядку відносно деякої послідовності. Це поняття є ключовим у даному узагальненні і принципово відрізняється від поняття старішої випадкової величини, бо носить конструктивний характер.

Нами припускається, що час обслуговування  $\tau_1$  є старішча порядку  $\delta \rightarrow 0$  відносно послідовності - проміжків між надходженнями вимог:

$$P(\gamma, > \Delta_1 + \dots + \Delta_{k+1}) \leq \delta P(\gamma, > \Delta_1 + \dots + \Delta_k), k \geq 1.$$

Тоді величина  $P$  оцінюється ймовірністю об'єднання скінченної кількості подій виду

$$H_k = \{1(\gamma, > \Delta_1 + \dots + \Delta_k) \sum_{l=1}^k 1(\gamma_l \geq \Delta_l + \dots + \Delta_k) \geq m\}$$



формулов

$$0 \leq p - P(U_{z=m}^{2^{m-1}} H_z) \leq \\ \leq \frac{\delta}{1-2\delta} C_{2^{m-2}}^{m-2} P(H_z).$$

На прикладі показано, що

$$P(U_{z=m}^{2^{m-1}} H_z) = (1 + o(1)) P(H_m)$$

в наших умовах, взагалі кажучи, не має місця.

Для неоднорідних систем обслуговування, розглянутих в попередньому параграфі, даються теж оцінки  $P_k$ . Щоправда, тут припускається, що часи обслуговування розподілені за одним і тим же старішчим законом

$$P(\eta_i > x) = \exp\left\{-\int_0^x \lambda(t) dt\right\}.$$

Тут уже має місце принцип старішчих траєкторій, але з певною відмінністю від класичного варіанту, що траєкторії відмов враховуються не від своїх початків, а вибираються із сімейств з фіксованими моментами їх закінчення. Топологія граничного переходу задається так:

$$m \varepsilon = m \sup_i P(\eta_i \geq \Delta_i) \longrightarrow 0$$

Результат тут такий: коли

$$\beta_3^0 = 1 \left( \sum_{k=3-m}^{3-1} 1(\eta_k \geq \Delta_k + \dots + \Delta_{3-1}) = m \right),$$

то при  $(m-1)\varepsilon < 1$  має місце

$$M \beta_3^0 < p < \frac{1}{1-(m-1)\varepsilon} M \beta_3^0.$$

Такии чином, при  $\varepsilon m \longrightarrow 0$  має місце

$$p_3 = (1 + o(1)) M \beta_3^0.$$

Причому на прикладі ми показуємо, що одного  $\varepsilon \longrightarrow 0$  для виконання принципу монотонних траєкторій тут не достатньо.

Основні положення дисертації опубліковані в таких роботах:

1. Гриценко В.А. Предельные распределения для момента первой потери требования в системе массового обслуживания с полумарковским входящим потоком// Кибернетика. - 1977. - № 2. - С. 113-119.
2. Гриценко В.А. Предельные теоремы для одного класса случайных процессов// Теория вероятностей и мат. статистика. - 1980. - Вып. 23. - С. 30-41
3. Гриценко В.А. Аппроксимация распределения сумм случайного числа случайных величин// Докл АН УССР. Сер. А, - 1982. - № 4. - С. 35-40.
4. Гриценко В.А. О случайном суммировании// Докл АН УССР. Сер. - 1982. - № 9. - С. 63-64.
5. Гриценко В.А. Об оценке надежности сложных восстанавливаемых систем// Надежность и долговечность машин и сооружений. - К.: Наук. думка, 1982. - Вып. 1. - С. 56-60.
6. Grischenko V.A. Sum Distribution Approximation for Random Number of Random Variables and its Application// IV USSR-Japan symp. on probab. theory and mathem. stat. Tbilisi. - 1982. - P. 244-245.
7. Гриценко В.А. Поток потерянных требований в многолинейных системах обслуживания с редкими потерями// Укр. мат. журн. - 1983. -39. - № 4. - С. 422-426.
8. Гриценко В.А. Пуассоновская аппроксимация потока требований, потерянных многолинейной системой обслуживания в условиях редких потерь// Кибернетика. - 1983. - С. 83-86.
9. Гриценко В.А. Асимптотический анализ потока редких событий на ступенчатом случайном процессе// Аналитические методы в теории надежности. - К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 32-40.
10. Гриценко В.А. Об экспоненциальном приближении надежности сложных систем// Надежность и долговечность машин и сооружений. - К.: Наук. думка, 1984. - Вып. 6. - С. 32-35.
11. Гриценко В.А. Асимптотический анализ потоков потерянных требований в многолинейных системах массового обслуживания// Марковские случайные процессы и их применения в теории массового обслуживания. - Саратов: СГУ, 1985. - С. 37-39.
12. Гриценко В.А. Асимптотическое поведение потока редких событий на ступенчатом случайном процессе// IV Междунар. Вильнюс.

конф. по теории вероятностей и мат. статистике, (Вильнюс, 1985 г.), 1985. - С. 191-192.

13. Гриценко В.А. Асимптотический анализ высоконадежных восстанавливаемых систем. - Киев: Знание, 1985. - 16 с.

14. Гриценко В.А. Пуассоновская аппроксимация потока требований, потерянных многолинейной системой обслуживания в условиях редких потерь// Кибернетика. - 1985. - С. 83-86.

15. Гриценко В.А. Асимптотический анализ потока редких событий на ступенчатом случайном процессе// Аналитические методы в теории надежности. - К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 32-40.

16. Гриценко В.А. Аппроксимация потоков редких событий в системах массового обслуживания// I Всемирный конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли. - М.: Наука, 1986. - С. 561.

17. Гриценко В.А. Построение полумарковских моделей при анализе неисправностей высоконадежных систем// Стохастические и детерминированные модели сложных систем. - Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1986. - С. 43-50.

18. Гриценко В.А. Предельные распределения для случайных величин на случайной последовательности// V Междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике, (Вильнюс, 1989 г.), - С. 164-165.

19. Гриценко В.А. Предельные распределения для сумм случайных величин на процессе восстановления// Стохастические системы и их приложения. - К.: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С. 23-30.

20. Гриценко В.А. Представление аддитивного функционала суммой случайных величин, связанных процессом восстановления// Аналитические вопросы стохастических систем. - К.: Ин-т математики АН УССР, 1992. - С. 10-18.

Ав. 28.000  
**Ав 28.000**

Підписано до друку 24.06.93. Формат 60x84/16. Папір друк.  
Офс. друк. Чм. друк. арн. 239 Чм. фарбо-відб. 239 Обл.-вид. арн.  
2/ Тираж 100 пр. Зам. 239 , безкоштовно.

-----  
Підготовлено і віддруковано в Інституті математики АН України  
252001 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.