Академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

ДЕМ'ЯНЧУК Анатолій Петрович

УДК 519.6:517.984.5

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ СИНТЕЗІ КОЛИВНИХ СИСТЕМ

05.13.16 — застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття ученого ступеня доктора фізико-математичних наук

Київ 1993

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України і Вінницькому політехнічному інституті.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор МОЛЧАНОВ І. М.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ЛІТВІНОВ В. Г.,

доктор фізико-математичних наук, професор ЛЯШЕНКО І. М.,

доктор фізико-математичних наук, МИХАЙЛЕЦЬ В. А.

Провідна організація: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача АН України.

Захист відбудеться «29» жовтня 1993 р. о 14[00] год. на засіданні спеціалізованої ради Д 016.45.01 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України за адресою:

252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «7» липня 1993 р.

Учений секретар спеціалізованої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія обернених задач, основи якої були закладені Ю.М.Березанським, В.К.Івановим, М.М.Лаврентьєвим, В.М.Марченком і А.М.Тихоновим,є порівняно новим науковим напрямком, що бурхливо розвивається. При розв'язанні більшості прикладних задач їх математичними моделями, природно, є обернені задачі. Так, у ряді важливих проблем науки і техніки стоять проблеми створення об'єктів, які відповідають заданим вимогам. Такі задачі звичайно розв'язуються шляхом дослідження багатьох варіантів математичних моделей об'єкта, який вивчається, хоча доцільно відразу цілеспрямовано розв'язувати задачу ідентифікації математичної моделі за апріорі заданими даними, які характеризують результати дії об'єкта. Зараз невелика частина задач синтезу розв'язується як обернені задачі. Це пояснюється не недостатньою увагою до проблеми, а теоретичними та частково технічними труднощами, які постають на шляху її розв'язання.

Багато задач, пов'язаних з математичним моделюванням процесів у квантовій механіці, теорії коливань, електромагнетизмі, математичній фізиці, зводяться до розв'язання обернених спектральних задач, у яких потрібно відновити лінійний оператор по тих чи інших спектральних характеристиках. Вивчення обернених задач для операторів Штурма - Ліувілля, Шредінгера, системи Дірака, деяких класів диференціальних операторів вищих порядків проведено З.С.Аграновичем, В.Барсілоном, Г.Боргом, І.М.Гельфандом, М.Л.Горбачуком, М.Г.Крейном, Б.М.Левітаном, Л.П.Нижником, Л.Д.Фаддєєвим, Г.Хохштадтом, К.Шабаном та ін. Слід відмітити, що обернені задачі на власні значення також виникають при розв'язанні суто математичних задач та часто є єдиним методом їх розв'язання. Так, відчутний поштовх до поширення досліджень дало відкриття методу оберненої задачі інтегрування нелінійних еволюційних рівнянь у роботах К.Гарднера, Дж.Гріна, М.Крускала, Р.Міури.

Особливу роль обернені задачі відіграють при автоматизації наукових досліджень і проектуванні об'єктів сучасної техніки. Задачі ідентифікації математичних моделей, що при цьому виникають, потребують результатів у чисельному вигляді та в реальному масштабі часу. Для розв'язання цих задач потрібні ефективні наближені методи. Розробленню чисельних методів розв'язання обернених задач на власні значення присвячені роботи: в квантовій механіці Є.П.Жидкова, М.Касчієва, Є.Христова; при конструюванні механічних систем В.М.Кублановської, В.Г.Літвінова, І.М.Молчанова; при синтезі неоднорідних електромагнітних середовищ В.В.Козловського, В.І.Сошникова.

Через новизну та складність конкретних технічних проблем у наукових дослідженнях не повністю розв'язано ряд важливих питань щодо утворення математичних моделей, дослідження коректності постановок, методів наближеного розв'язування, розробки алгоритмічного та програмного забезпечення. Необхідність створення нових наближених методів зумовлена ще й тим, що обернені задачі на власні значення розв'язуються аналітично у виключних випадках.

Таким чином, значний інтерес сьогодні викликає розробка ефективних наближених методів розв'язання обернених задач на власні значення та створення теоретично обгрунтованих обчислювальних алгоритмів та програм для розв'язання конкретних прикладних задач на сучасних ЕОМ.

Мета роботи - розробка математичних моделей прикладних задач, які описуються одновимірними оберненими задачами на власні значення, теоретичне їх дослідження та побудова наближених методів розв'язання.

Наукова новизна полягає в тому, що створено та досліджено математичні моделі важливих прикладних проблем у вигляді обернених задач на власні значення. Вивчено обернені задачі на власні значення для диференціального рівняння другого та четвертого порядку, коли задано декілька значень спектра, а про інші відома апріорна інформація. Побудовано наближені методи, створені на основі теорем існування, розв'язання обернених задач на власні значення. Установлено факторіальну швидкість збіжності ітераційних процесів. Запропоновано процедуру побудови алгоритмів для розв'язання обернених спектральних задач вищих порядків. Розглянуто схему та отримано чисельні результати розв'язання деяких класів обернених задач на власні значення з частинними похідними, коли задаються декілька власних частот.

Розроблена методика дозволяє розв'язувати ряд технічних задач в природній постановці як задачу ідентифікації математичної моделі.

Практичне значення. Розроблена в дисертаційній роботі теорія та побудовані наближені методи дозволяють відразу розв'язувати задачі синтезу, не звертаючись до перебору можливих варіантів розв'язання прямих задач. Це дозволило всебічно та глибоко вивчити реальні процеси, виявити важливі та приховані властивості, значно зменшити обсяги натурних експериментів. Розглянуті математичні моделі відіграють значну роль при автоматизації наукових досліджень і проектуванні об'єктів сучасної техніки. За допомогою розроблених чисельних методів та алгоритмів, які реалізовано у вигляді програм на ЕОМ, розв'язано прикладні задачі в авіа- та суднобудуванні, турбінобудуванні, верстатобудуванні, приладобудуванні. Створені моделі та розроблені чисельні методи застосовано для розв'язання конкретних прикладних задач: для побудови магнітострикційних коливних систем; синтезу електромагнітних неоднорідних середовищ; створення вібропристроїв, які сприяють чи посиленню, чи ослабленню коливних ефектів; при конструюванні лопатки газотурбінного двигуна.

Достовірність результатів. Усі результати дисертації сформульовано у вигляді теорем і лем та повністю доведено. Доцільність запропонованих методів розв'язання обернених задач на власні значення підтверджено розв'язком ряду модельних та прикладних задач.

Методи дослідження. В роботі застосовуються методи функціонального аналізу, теорії функцій комплексної змінної, загальної теорії наближених методів та обчислювальної математики.

Апробація роботи. Результати дисертації неодноразово доповідалися і обговорювалися на наукових семінарах: професора І.М.Молчанова "Чисельний аналіз" Наукової ради з проблеми "Кібернетика" АН України; професора Є.П.Жидкова в Лабораторії обчислювальної техніки та автоматизації ОІЯД; академіка М.М.Лаврентьєва в ОЦ СВ АН СРСР та в Інституті математики СВ АН Росії; професора М.Л.Горбачука в Інституті математики АН України; професора В.Г.Літвінова в Інституті механіки АН України; академіка А.М.Тихонова в Московському університеті; академіка

В.Л.Рвачова в Інституті проблем машинобудування АН України; чл.-кор. Я.Й.Бурака в Інституті прикладних проблем механіки і математики АН України; професора Д.І.Мартинюка в Київському університеті, а також на Всесоюзному семінарі "Некоректні задачі математичної фізики і аналізу" /Новосибірськ, 1982 р./ ; Школі - семінарі "Обернені задачі математичної фізики" /Таллінн, 1989 р./ ; науково - технічній конференції "Застосування обчислювальної техніки і математичних методів у наукових та економічних дослідженнях" /Севастополь, 1990 р.; Шацьк, 1991,1992 р./; Воронезькій зимовій математичній школі "Сучасні проблеми теорії функції і теорії диференціальних рівнянь" /Воронеж, 1991р./; Міжнародному семінарі "Прикладні проблеми моделювання і оптимізації" /Славське, 1991 - 1993 р./; Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті академіка М.П.Кравчука /Київ - Луцьк, 1992 р./; Міжнародній математичній конференції, присвяченій 100-річчю народження С.Банаха /Львів, 1992 р./; науково - технічній конференції "Пам'яті академіка М.П.Кравчука /Київ, 1992 р./; Першій Всеукраїнській конференції з обробки сигналів і зображень та розпізнавання образів /Київ, 1992 р./; Міжнародному семінарі "Стійкість і коливання нелінійних систем керування" /Москва, 1992 р./; науково - технічному семінарі "Удосконалення та розвиток оздоблено - зачисної та фінішної обробки деталей" /Вінниця, 1992 р./; Міжнародній математичній конференції "Ляпуновські читання" /Харків, 1992 р./; науково - технічній конференції країн СНД "Контроль та керування в технічних системах" /Вінниця, 1992 р./; Міжнародній нараді з програмування та математичних методів розв'язування фізичних задач /Дубна, 1993 р./; Школах - семінарах, які проводив відділ "Програмне забезпечення та розв'язання задач" Інституту кібернетики АН України /Жукін, 1975 - 1991 р. р./; наукових конференціях викладачів Вінницького політехнічного інституту /1985 - 1993 р р./.

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 27 роботах. За матеріалами дисертації видано навчальний посібник.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох глав, висновку і списку літератури, який містить 204 найменування. Загальний обсяг дисертації - 215 сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ у дисертації містить огляд літератури з теорії обернених задач і деяких наближених методах їх розв'язання. Викладено опис результатів, що виносяться на захист. Обгрунтовано актуальність, доцільність, практичну та теоретичну важливість проведених досліджень.

Глава 1. Математичне моделювання в наукових дослідженнях при синтезі коливних систем.

У даній главі наведені конкретні прикладні задачі, математичними моделями яких є обернені задачі на власні значення.

У першому параграфі розглядаються причинні та наслідкові характеристики, пов'язані з прийнятою математичною моделлю зображення реального процесу. До причинних характеристик відносять коефіцієнти диференціальних рівнянь, крайові та початкові умови, геометричні характеристики області задання рівнянь, а до наслідкових - стан об'єкта, який досліджують. Це можуть бути фізичні поля тієї або іншої природи. Обернена задача трактується як відновлення деяких причинних характеристик за повною інформацією про фізичні поля.

У другому параграфі описано математичні моделі обернених задач, які виникають у наукових дослідженнях при проектуванні коливних систем. Розглядається виникнення динамічного посилення збуджуючої періодичної сили, яка діє на конструкцію. Обговорюється питання, коли динамічне посилення робить позитивний та негативний вплив в техніці. Описано важливі прикладні задачі щодо створення коливних систем, а саме : створення магнітострикційного випромінювача або приймача звуку за заданим набором декількох резонансних частот; проектування неоднорідних електромагнітних резонаторів за декількома резонансними частотами; проектування лопатки газотурбінного двигуна за наперед заданими декількома частотами власних коливань; створення вібрhọзахисної системи, яка працює в антирезонансному режимі для заданих декількох частот. При розв'язанні сформульованих задач необхідно розв'язувати обернені задачі на власні значення. Тому в третьому та четвертому параграфах наведено деякі властивості оберненої задачі Штурма - Ліувілля та оберненої регулярної задачі на власні значення для лінійного диференціального оператора четвертого порядку з відділеними крайовими умовами.

Глава 2. Дослідження одновимірних обернених задач.

У цій главі проведено необхідні теоретичні дослідження одновимірних обернених задач у їх природній постановці. Отримані теореми існування формулюються та доводяться таким чином, що на їх основі побудовано наближені методи.

Розглянемо задачу на власні значення

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad /1/$$

з крайовими умовами

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0, \qquad /2/$$

$$u(1)\cos\beta + u'(1)\sin\beta = 0, \qquad /3/$$

де $q(x)$ - дійсна неперервна функція.

Ця задача самоспряжена і має дійсні власні значення, зростаючу послідовність яких будемо позначати $S(\alpha,\beta;q(x))$ Якщо умову /3/ замінити на нову крайову умову

$$u(1)\cos\gamma + u'(1)\sin\gamma = 0, \quad \sin(\beta-\gamma) \ne 0, \qquad /4/$$

то нова задача /1/./2/./4/ має спектр $S(\alpha,\gamma;q(x))$.
Відомо, що два спектри $S(\alpha,\beta;q(x))$ і $S(\alpha,\gamma,q(x))$ однозначно відновлюють функцію $q(x)$. Цю задачу всебічно

осліджено у відомих монографіях Б.М.Левітана та В.А.Марченка.

У першому параграфі використовуються спектри: нехай задано дійсні числа $\mu_1,\dots,\mu_n$ $(\mu_i < \mu_{i+1})$ і спектр $S(\alpha,\beta;\tilde{q}(x)) = \{\tilde{\lambda}_i\}_1^\infty$. Перші n елементів спектра $\{\tilde{\lambda}_i\}_1^\infty$ замінимо на $\mu_1,\dots,\mu_n$. Знову утворену послідовність позначимо $\tilde{S}(\mu_1,\dots,\mu_n;\alpha,\beta;\tilde{q}(x))$. За припущенням ця послідовність є спектром, тому вважаємо, що вона строго зростає. Для цього достатньо виконання умови $\mu_n < \lambda_{n+1}$.

Теорема 2.1. Нехай задано дві послідовності $\tilde{S}(\mu_1,\dots,\mu_n;\alpha,\beta;\tilde{q}(x))$ і $S(\alpha,\gamma;\tilde{q}(x))$, тоді вони визначають функцію $q(x)$ в оберненій задачі Штурма - Ліувілля і $q(x)$ є розв'язком функціонального рівняння

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i(x)\cdot w_i(x)), \qquad /5/$$

в якому $w_i(x)$ залежить від $q(x)$ і знаходиться як розв'язок задачі Коші

$$w_i'' + (\mu_i - q(x))w_i = 0, \qquad /6/$$

з умовами

$$w_i(0) = \sin\alpha,$$

$$w_i'(0) = -\cos\alpha.$$

$\tilde{y}_i$ обчислюється за формулами

$$\tilde{y}_i = 2\,\frac{\tilde{u}_i - K_i \tilde{z}_i}{\omega(\mu_i)},$$

$$K_i = \begin{cases} \dfrac{-\sin\beta}{\omega_i(1)}, & \text{якщо } \beta \neq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\omega_i'(1)}, & \text{якщо } \beta = 0, \end{cases}$$

де $\tilde{u}_i$ і $\tilde{z}_i$ є розв'язками задач

$$\tilde{u}_i'' + (\mu_i - \tilde{q})\tilde{u}_i = 0,$$

$$\tilde{u}_i(1) = -\sin\beta,$$

$$\tilde{u}_i'(1) = \cos\beta,$$

$$\tilde{z}_i'' + (\mu_i - \tilde{q})\tilde{z}_i = 0,$$

$$\tilde{z}_i'(0) = \sin\alpha,$$

$$\tilde{z}_i(0) = -\cos\alpha,$$

$$\omega(\lambda) = \cos\beta\,\omega(1) + \sin\beta\,\omega'(1)$$

Будемо розглядати функції, які задовольняють умови $\hat{q}(x) = \hat{q}(1-x)$. Тоді в класі цих функцій справедливі теореми.

Теорема 2.2. Нехай задано послідовність $\tilde{S}(\mu_1,\ldots,\mu_n; \alpha,-\alpha;\tilde{q}(x))$. тоді вона визначає функцію $\hat{q}(x)$ в оберненій задачі Штурма - Ліувілля і $\hat{q}(x)$ є розв'язком функціонального рівняння

$$\hat{q}(x)=\tilde{\hat{q}}(x)+\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i(x)\,\omega_i(x)), \qquad /7/$$

де $\omega_i(x)$ і $\tilde{y}_i(x)$ визначаються як у теоремі 2.1, тільки $K_i = \operatorname{sign}\omega'(\lambda_i)$.

При розв'язанні оберненої задачі за конкретно заданими спектральними даними цими теоремами можна ефективно користуватися. Так, досить часто на практиці задаються декілька перших елементів спектра і треба побудувати функцію $q(x)$ в задачі /1/,/2/,/3/ таким чином, щоб ця задача на початку свого спектра мала задані числа $\mu_1,\ldots,\mu_n$. Очевидно, що така функція однозначно не визначається, хоч вона і існує. Тому поряд з задачею /1/ - /3/ будемо розглядати задачу для рівняння

$$-u''+\tilde{q}(x)u=\lambda u, \quad 0\le x\le 1, \qquad /8/$$

з тими ж крайовими умовами /2/,/3/, з відомою функцією $\tilde{q}(x)$ і з відомим спектром $S(\alpha,\beta;\tilde{q}(x))=\{\tilde{\lambda}_i\}_1^\infty$.

Якщо побудувати рівняння /5/ або /7/, то його точний розв'язок $q^*(x)$ і буде шуканою функцією $q(x)$, для якої задача /1/ - /3/ буде мати спектром послідовність $\mu_1,\ldots,\mu_n$, $\lambda_{n+1},\lambda_{n+2},\ldots$. Таким чином, поставлену мету буде досягнено.

Вивченню коректності задачі відновлення функції $q(x)$ за спектральними характеристиками присвячено параграф 2. Тут доводяться теореми.

Теорема 2.3. Розв'язок оберненої задачі /1/ - /3/ $q(x)$ за спектрами $S(\mu_1,\ldots,\mu_n;\alpha,\beta;\tilde{q}(x))$ та $S(\alpha,\gamma;\tilde{q}(x))$ існує, єдиний та малій зміні $\mu_1,\ldots,\mu_n$ відповідає мала зміна розв'язку $q(x)$.

Теорема 2.4. Розв'язок оберненої задачі /1/ - /3/ $\hat{q}(x)$, який задовольняє умові $\hat{q}(x)=\hat{q}(1-x)$, за спектром $\Im(\mu_1,\ldots,\mu_n;\alpha,-\alpha;\hat{q}(x))$ існує, єдиний, та малій зміні $\mu_1,\ldots,\mu_n$ відповідає мала зміна $\hat{q}(x)$.

У параграфі 3 розглядається обернена задача на власні значення для диференціального рівняння четвертого порядку. Розглядаемо диференціальний оператор

$$Lu=u''''-(p(x)u')'+q(x)u, \qquad /9/$$

$$x\in[0,1],\ p(x)\in C'[0,1],\ q(x)\in C[0,1],$$

разом з крайовими умовами

$$\sum_{i=1}^{4} m_{ki}\,u^{(i-1)}(0)=0,\ \sum_{i=1}^{4} n_{ki}\,u^{(i-1)}(1)=0,\quad k=1,2. \qquad /10/$$

Введемо позначення

$$\bar{U}^T=[u,u',u'',u'''],\ \bar{m}_i^T=[m_{i1},m_{i2},m_{i3},m_{i4}].$$

У цих позначеннях умови /8/ матимуть вигляд

$$\bar{m}_i^T\cdot\bar{U}(0)=\bar{n}_i^T\cdot\bar{U}(1)=0,\quad i=1,2. \qquad /11/$$

Для самоспряженої задачі припустимо виконання умов

$$\bar{m}_1^T\cdot B^{-1}(0)\cdot\bar{m}_2=0,$$

$$\bar{n}_1^{T}\cdot B^{-1}(1)\cdot \bar{n}_2 = 0\,,$$

$$B(x)=\begin{bmatrix} 0 & -p(x) & 0 & 1 \\ p(x) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^{-1}(x)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -p(x) \\ 1 & 0 & p(x) & 0 \end{bmatrix},$$

Будемо вивчати самоспряжену задачу на власні значення

$$L u = \lambda u \qquad /12/$$

з крайовими умовами /11/. Ця задача має дійсний дискретний спектр. Доповнимо вектори $\bar{m}_1, \bar{m}_2$ та $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ векторами $\bar{m}_3, \bar{m}_4$ та $\bar{n}_3, \bar{n}_4$ відповідно, так, щоб виконувались умови

$$\det M \overset{def}{=} \det(\bar{m}_1 \bar{m}_2 \bar{m}_3 \bar{m}_4)^{T} = 1\,,$$

$$\det N \overset{def}{=} \det(\bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{n}_3 \bar{n}_4)^{T} = 1\,.$$

Позначимо через $\varphi(x,\lambda), \psi(x,\lambda), \eta(x,\lambda), \zeta(x,\lambda)$ розв'язок рівняння /10/ з початковими умовами

$$\bar{m}_i^T \cdot \bar{\varphi}(0,\lambda) = \delta_{i3}, \qquad \bar{m}_i^T \cdot \bar{\psi}(0,\lambda) = \delta_{i4},$$

$$\bar{n}_i^T \cdot \bar{\eta}(1,\lambda) = \delta_{i3}, \qquad \bar{n}_i^T \bar{\zeta}(1,\lambda) = \delta_{i4},$$

де δ_{ij} - символ Кронекера.

Лема 2.1. Власні значення задачі /12/,/11/ є коренями характеристичної функції $W(\lambda)$, яка має вигляд

$$W(\lambda) = \{\bar{m}_1^T \cdot \bar{\eta}(0,\lambda)\} \cdot \{\bar{m}_2^T \cdot \bar{\zeta}(0,\lambda)\} - \{\bar{m}_2^T \cdot \bar{\eta}(0,\lambda)\} \cdot \{\bar{m}_1^T \cdot \bar{\zeta}(0,\lambda)\} = 0,$$

$$W(\lambda) = \{\bar{n}_1^T \bar{\varphi}(1,\lambda)\} \cdot \{\bar{n}_2^T \bar{\psi}(1,\lambda)\} - \{\bar{n}_2^T \cdot \bar{\varphi}(1,\lambda)\} \cdot \{\bar{n}_1^T \cdot \bar{\psi}(1,\lambda)\} = 0.$$

У четвертому параграфі розглядаються три пари задач на власні значення:

$$\begin{aligned} &Lu = \lambda u, && \tilde{L}u = \lambda u, \\ &\bar{m}_1^T \cdot \bar{u}(0) = \bar{m}_2^T \bar{u}(0) = 0; && \bar{m}_1^T \cdot \bar{u}(0) = \bar{m}_2^T u(0) = 0; \end{aligned} \qquad /13/$$

$$\begin{aligned} &L v = \mu v, && \tilde{L} v = \mu v, \\ &\bar{m}_1^T \bar{v}(0) = \bar{m}_2^T \bar{v}(0) = 0; && \bar{m}_1^T \bar{v}(0) = \bar{m}_3^T \cdot \bar{v}(0) = 0; \end{aligned} \qquad /14/$$

$$\begin{aligned} &L w = \nu w, && \tilde{L} w = \nu w, \\ &\bar{m}_2^T \bar{w}(0) = \bar{m}_3^T \bar{w}(0) = 0; && \bar{m}_2^T \bar{w}(0) = \bar{m}_3^T \bar{w}(0) = 0. \end{aligned} \qquad /15/$$

У точці $x=1$ всі шість крайових задач мають однакові крайові умови

$$\overline{n}_1^T \circledast(1) = \overline{n}_2^T \circledast(1) = 0 ,$$

де замість $\circledast$ стоїть u, v, w .
Оператор $\tilde{L}u$ має вигляд

$$\tilde{L}u = u^{IV} - (\tilde{p}(x)u')' + \tilde{q}(x)u . \qquad /16/$$

Позначимо множину власних значень крайових задач /13/ - /15/ відповідно

$$S(\overline{m}_1, \overline{m}_2; p(x), q(x)) = \{\lambda_i\}_1^\infty, \quad S(\overline{m}_1, \overline{m}_2; \tilde{p}(x), \tilde{q}(x)) = \{\tilde{\lambda}_i\}_1^\infty,$$

$$S(\overline{m}_1, \overline{m}_3; p(x), q(x)) = \{\mu_i\}_1^\infty, \quad S(\overline{m}_1, \overline{m}_3; \tilde{p}(x), \tilde{q}(x)) = \{\tilde{\mu}_i\}_1^\infty,$$

$$S(\overline{m}_2, \overline{m}_3; p(x), q(x)) = \{\nu_i\}_1^\infty, \quad S(\overline{m}_2, \overline{m}_3; \tilde{p}(x), \tilde{q}(x)) = \{\tilde{\nu}_i\}_1^\infty .$$

Позначимо через $\{u_i\}_1^\infty$ множину власних функцій крайової задачі /13/, які відповідають власним значенням $\{\lambda_i\}_1^\infty$, а $\{\tilde{u}_i\}_1^\infty$ - множину власних функцій крайової задачі /13/, які відповідають власним значенням $\{\tilde{\lambda}_i\}_1^\infty$. Введемо дві підмножини гільбертового простору $L_2[0,1]$:

$$H=\{f\in L_2[0,1]:(f,u_i)=\int_0^1 f(x)u_i(x)dx=0\ ,\ i\in\Lambda_0\},$$

$$\widetilde{H}=\{f\in L_2[0,1]:(f,\widetilde{u}_i)=\int_0^1 f(x)\widetilde{u}_i(x)dx=0,\ i\in\Lambda_0\}.$$

Визначимо оператор $T:H\to\widetilde{H}$ таким чином:

$$Tu_i=\widetilde{u}_i\ ,\quad i\in\Lambda\quad (\Lambda_0\cup\Lambda=N).$$

Справедливі наступні леми.

Лема 2.2. Для всіх функцій з області визначення оператора L справедлива тотожність

$$\widetilde{L}Tf=TLf.$$

Лема 2.3. Оператор T має вигляд

$$Tf(x)=f(x)+\int_0^x K(x,\xi)f(\xi)d\xi\ ,$$

де

$$K(x,\xi)=\sum_{i\in\Lambda_0}\frac{1}{W'(\lambda_i)}\Big[-\widetilde{c}(x,\lambda_i)\varphi(\xi,\lambda_i)-\widetilde{d}(x,\lambda_i)\psi(\xi,\lambda_i)+$$

$$+\widetilde{\varphi}(x,\lambda_i)c(\xi,\lambda_i)+\widetilde{\psi}(x,\lambda_i)d(\xi,\lambda_i)\Big],$$

φ,ψ,c,d отримано з функції Гріна $G(x,\xi,\lambda)$ задачі /10/./9/

$$G(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} W^{-1}(\lambda)[a(\xi,\lambda)\eta(x,\lambda)+b(\xi,\lambda)\zeta(x,\lambda)], & x>\xi, \\ W^{-1}(\lambda)[-c(\xi,\lambda)\varphi(x,\lambda)-d(\xi,\lambda)\psi(x,\lambda)], & x<\xi, \end{cases}$$

а $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{c}, \tilde{d}$ отримано з функції Гріна задачі $\tilde{L}u=\lambda u$ з умовами /11/.

Припустимо, що всі елементи спектрів $\{\lambda_i\}_1^\infty, \{\mu_i\}_1^\infty, \{\nu_i\}_1^\infty, \{\tilde{\lambda}_i\}_1^\infty, \{\tilde{\mu}_i\}_1^\infty, \{\tilde{\nu}_i\}_1^\infty$ прості, тоді справедлива теорема.

Теорема 2.5. Нехай для власних значень виконується вимога

$$\mu_i=\tilde{\mu}_i\,;\quad \nu_i=\tilde{\nu}_i\,,\quad i\in N,$$

де N - множина натуральних чисел,

$$\lambda_i\neq\tilde{\lambda}_i\,,\ i\in\Lambda_0\,,\ \lambda_i=\tilde{\lambda}_i\,,\ i\in\Lambda,$$

де Λ_0 - скінченна підмножина натуральних чисел.
Тоді коефіцієнти диференціальних виразів L і $\tilde{L}$, які визначаються цими спектрами, пов'язані співвідношеннями

$$p(x)-\tilde{p}(x)=4\,\frac{dK(x,x)}{dx},$$

$$q(x)-\tilde{q}(x)=\frac{d^3K(x,x)}{dx^3}+\frac{d^2K(x,x)}{dx^2}+3\,\frac{\partial^3K(x,\xi)}{\partial x^3}\Big|_{\xi=x}+$$

$$+2\,\frac{\partial^3K(x,\xi)}{\partial x^2\partial\xi}\Big|_{\xi=x}+\tilde{p}(x)\,\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}\Big|_{\xi=x}+\tilde{p}(x)\,\frac{dK(x,x)}{dx}+$$

$$+\tilde{p}'(x)K(x,x)+\frac{\partial^3 K(x,\xi)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=x}+p(x)\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=x}. \qquad /17/$$

Ці важливі формули отримано у п'ятому параграфі.

Нехай задано дійсні числа $\mu_1,\ldots,\mu_n$ $(\mu_i<\mu_{i+1})$ та спектр $S(\bar{m}_1,\bar{m}_2;\tilde{p}(x),\tilde{q}(x))=\{\tilde{\lambda}_i\}_1^\infty$. Замінимо в ньому перші n елементів на $\mu_1,\ldots,\mu_n$, отримаємо нову послідовність. Вважаємо, що $\mu_n<\tilde{\lambda}_{n+1}$. Отриману послідовність будемо позначати $\tilde{S}(\mu_1,\ldots,\mu_n;\bar{m}_1,\bar{m}_2;\tilde{p}(x),\tilde{q}(x))$.

У параграфі 6 розглядається коректність відновлення функцій $p(x)$ та $q(x)$ за трьома спектрами. Таким чином, буде досягнена мета, що після відновлення $p(x)$ і $q(x)$ задачі /12/, /11/ початком свого спектра будуть мати задані дійсні числа $\mu_1,\ldots,\mu_n$.

Теорема 2.6. Розв'язок оберненої задачі /12/,/11/ за спектрами $\tilde{S}(\mu_1,\ldots,\mu_n;\bar{m}_1,\bar{m}_2;\tilde{p}(x),\tilde{q}(x))$, $S(\bar{m}_1,\bar{m}_3;\tilde{p}(x),\tilde{q}(x))$ і $S(\bar{m}_2,\bar{m}_3;\tilde{p}(x),\tilde{q}(x))$ існує та єдиний.

Теорема 2.7. Нехай для власних значень крайових задач /13/ - /15/ виконується

$$\mu_i=\tilde{\mu}_i,\quad \nu_i=\tilde{\nu}_i,\quad i\in N;\ \lambda_i=\tilde{\lambda}_i,\quad i\in\Lambda;$$

$$|\lambda_i-\tilde{\lambda}_i|<\varepsilon,\quad i\in\Lambda_0,$$

для довільного додатного ε, тоді існує додатне число K таке, що

$$|q(x)-\tilde{q}(x)|+|p(x)-\tilde{p}(x)|<K\varepsilon.$$

Глава 3. Ітераційні методи розв'язання обернених задач та дослідження їх збіжності.

Ця глава присвячена побудові наближених розв'язків обернених задач другого та четвертого порядків. Розглядаються питання побудови послідовностей, які збігаються, на основі теорем існування. Встановлюється факторіальна збіжність до точних розв'язків.

У параграфі 1 розглядається обернена задача для рівняння другого порядку. Припустимо, що $\tilde{q}(x)$ та спектральні значення $\{\tilde{\lambda}_i\}_1^\infty$ відомі. А також задано $\mu_1, \dots, \mu_n$, для яких і буде визначено невідому функцію $q(x)$. Скористуємося функціональним рівнянням /5/, в яке невідома функція $q(x)$ входить як в ліву, так і, неявно, в праву частину для визначення $\omega_i(x)$. Функції $\tilde{y}_i(x)$ повністю визначаються через $\tilde{q}(x)$ таким чином:

$$\tilde{y}_i(x) = \frac{2(\tilde{U}_i - K_i \tilde{Z}_i)}{\tilde{S}_i \tilde{\omega}(\lambda_i)},$$

де

$$\tilde{S}_i = \prod_{\substack{j \in \Lambda_0 \\ j \neq i}} (\mu_i - \mu_j) \Big/ \prod_{j \in \Lambda_0} (\mu_i - \tilde{\lambda}_j).$$

Будуємо ітераційний процес, який реалізується за формулами

$$\overset{s}{q}(x) = \tilde{q}(x) + \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i(x) \overset{s}{\omega}_i(x)),$$

$$\overset{s}{\omega}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} \int_0^x \sin\{\sqrt{\mu_i}(x-\tau)\} \overset{s-1}{q}(\tau) \overset{s-1}{\omega}_i(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\mu_i}} \sin(\sqrt{\mu_i}\, x) + \sin\alpha \cos(\sqrt{\mu_i}\, x), \qquad /18/$$

$s = 1, 2, \dots$ – номер ітерації,

де $\overset{\circ}{W}(x)$ початкове наближення вибирається як розв'язок задачі /7/, коли $q(x)=q_0(x)=\tilde{q}(x)$.

У другому параграфі проведено дослідження ітераційного процесу.

Теорема 3.1. Послідовність функцій $q(x)$ рівномірно збігається до точного розв'язку оберненої задачі $q^*(x)$, і має місце оцінка

$$|q^*(x)-\overset{s}{q}(x)|\leq C\frac{K^{s-1}}{(s-1)!}.$$

У параграфі 3 запропоновано ітераційний процес для визначення невідомих коефіцієнтів $p(x)$ і $q(x)$ в оберненій задачі для рівняння четвертого порядку, який реалізується за формулами

$$\overset{s}{K}(x,y)=\sum_{n\in\Lambda_0}\left(\tilde{g}(x,\lambda_n)\overset{s}{\varphi}(y,\lambda_n)+\tilde{h}(x,\lambda_n)\overset{s}{\psi}(y,\lambda_n)\right),$$

$$\overset{s}{p}(x)=\tilde{p}(x)+4\frac{d\overset{s}{K}(x,x)}{dx},\quad \overset{s}{q}(x)=\tilde{q}(x)+\overset{s}{F}(x),$$

$$\overset{s}{\varphi}(x,\lambda_n)=\int_0^x\left[\left(\overset{s-1}{p}(\tau)\overset{s-1}{\varphi}{}'(\tau,\lambda_n)\right)'-\overset{s-1}{q}(\tau)\overset{s-1}{\varphi}(\tau,\lambda_n)\right]\left(sh\sqrt[4]{\lambda_n}(x-\tau)-\right.$$

$$\left.-\sin\sqrt[4]{\lambda_n}(x-\tau)\right)d\tau+C_{n1}\,sh\sqrt[4]{\lambda_n}\,x+C_{n2}\,ch\sqrt[4]{\lambda_n}\,x+ \qquad /19/$$

$$+C_{n3}\sin\sqrt[4]{\lambda_n}\,x+C_{n4}\cos\sqrt[4]{\lambda_n}\,x,$$

$$\overset{s}{\psi}(x,\lambda_n)=\int_0^x\left[\left(\overset{s-1}{p}(\tau)\overset{s-1}{\psi}{}'(\tau,\lambda_n)\right)'-\overset{s-1}{q}(\tau)\overset{s-1}{\psi}(\tau,\lambda_n)\right]\left(sh\sqrt[4]{\lambda_n}(x-\tau)-\right.$$

$$\left.-\sin\sqrt[4]{\lambda_n}(x-\tau)\right)d\tau+d_{n1}\,sh\sqrt[4]{\lambda_n}\,x+d_{n2}\,ch\sqrt[4]{\lambda_n}\,x+$$

$$+d_{n3}\sin\sqrt[4]{\lambda_n}\,x + d_{n4}\cos\sqrt[4]{\lambda_n}\,x\,.$$

Теорема 3.2. Послідовності функцій $\overset{s}{p}(x)$, $\overset{s}{q}(x)$ збігаються у рівномірній метриці до точного розв'язку оберненої крайової задачі $p^*(x)$, $q^*(x)$, і мають місце оцінки

$$|\overset{s}{p}(x)-p^*(x)|<C_1\frac{K_1^s}{s!}\,, \quad |\overset{s}{q}(x)-q^*(x)|\le C_2\frac{K_2^s}{s!}\,.$$

Для розв'язку оберненої задачі Штурма - Ліувілля /11/ - /13/ за допомогою ітераційного методу /18/ необхідно обчислювати функції $\tilde{y}_i(x)$, які будуються за заданою функцією $\tilde{q}(x)$. У деяких випадках цю функцію можна виписати у явному вигляді, наприклад, коли $\tilde{q}(x)=const$.

Нехай $\tilde{q}(x)\equiv 0$, тоді при крайових умовах $U(0)=U(1)=0$ спектр $\tilde{\lambda}_i=i^2\pi^2\ (i=1,2,\dots)$ та

$$\tilde{S}_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}(\mu_i-\mu_j)\Big/\prod_{j=1}^{n}(\mu_i-(j-1)^2\pi^2)\,,$$

$$\tilde{\omega}(\mu_i)=-\frac{\sin\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\mu_i}}\,,$$

$$\tilde{z}_i=-\frac{\sin(\sqrt{\mu_i}\,x)}{\sqrt{\mu_i}}\,,$$

$$\tilde{u}_i=\frac{\sin(\sqrt{\mu_i}\,x-\sqrt{\mu_i})}{\sqrt{\mu_i}}\,.$$

При крайових умовах $U'(0) = U'(1) = 0$ спектр $\tilde{\lambda}_i = i^2\pi^2 (i = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$\tilde{S}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\mu_i - \mu_j) \Big/ \prod_{j=1}^{n} (\mu_i - (j-1)^2\pi^2),$$

$$\tilde{\omega}(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}\, \sin\sqrt{\mu_i},$$

$$\tilde{Z}_i = \cos\sqrt{\mu_i}\, x,$$

$$\tilde{U}_i = \cos(\sqrt{\mu_i}\, x - \sqrt{\mu_i}).$$

При умові $U(0) = U'(0) = 0$ спектр $\tilde{\lambda}_i = \left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2$, $i = 1, 2, \ldots$,

$$\tilde{S}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\mu_i - \mu_j) \Big/ \prod_{j=1}^{n} \left(\mu_i - \left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

$$\tilde{\omega}(\mu_i) = -\cos\sqrt{\mu_i},$$

$$\tilde{Z}_i = -\frac{\sin\sqrt{\mu_i}\, x}{\sqrt{\mu_i}},$$

$$\tilde{U}_i = -\cos(\sqrt{\mu_i}\, x - \sqrt{\mu_i}),$$

$$\tilde{K}_i = \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sin\sqrt{\mu_i}}.$$

У четвертому параграфі проведено чисельні експерименти по розв'язанню обернених задач запропонованими наближеними методами.

Глава 4. Чисельне розв'язання прикладних задач.

У цій главі розв'язано конкретні прикладні задачі синтезу електромагнітних резонаторів; синтезу випромінювачів та приймачів звуку; проектування магнітострикційних збуджувачів коливань; проектування віброзахисної системи; проектування лопатки газотурбінного двигуна.

У параграфі 1 розглядається задача відновлення площі поперечного перерізу стержня заданої довжини за його декількома частотами вільних повздовжніх коливань. Задача зводиться до визначення функції $F(x)$ за заданими декількома значеннями K_i в оберненій задачі на власні значення для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\frac{dy}{dx}\right]+K^2F(x)y(x)=0, \qquad /20/$$

з одною із крайових умов, які характеризують закріплення кінців стержня:

$$y(0)=y(\ell)=0, \qquad /21/$$

$$y'(0)=y'(\ell)=0, \qquad /22/$$

$$y(0)=y'(\ell)=0, \qquad /23/$$

де $y(x)$ - форма власних коливань.
Після заміни $u=\sqrt{F}\,y$, $\tau=\frac{x}{\ell}$ задача буде мати вигляд

$$-\frac{d^2u(\tau)}{d\tau^2}+q(\tau)u(\tau)=\lambda^2u(\tau), \quad 0\leq\tau\leq 1, \qquad /24/$$

а крайові умови /21/ - /23/ свого вигляду не міняють, тобто

$$u(0)=u(1)=0,$$

$$u'(0)=u'(1)=0,$$

$$u(0)=u'(1)=0,$$

де

$$\lambda^2=\ell^2\kappa^2 , \quad F(x)=\theta^2(\tau),$$

а $\theta(\tau)$ знаходиться як розв'язок рівняння

$$\theta''(\tau)-q(\tau)\theta(\tau)=0. \qquad /25/$$

Для виділення єдиності розв'язку рівняння /25/ користуються умовами

$$\theta(0)=\alpha, \qquad \theta'(0)=\beta,$$

$$\theta(0)=\alpha_1, \qquad \theta(1)=\beta_1,$$

де $\alpha=\alpha_1=\sqrt{F(0)}$, а $\beta_1=\sqrt{F(\ell)}$.
Виконання цих умов забезпечує бажані площі поперечного перерізу на кінцях.

У параграфі 2 ілюструються запропоновані методи на розв'язання задачі відновлення площі поперечного перерізу стержня заданої довжини за його власними частотами поперечних коливань. Поперечні коливання однорідного стержня змінного перерізу описуються таким рівнянням:

$$(EIy'')'' = \rho F \omega^2 y, \qquad /26/$$

де ρ - щільність матеріалу, E - модуль пружності, F - площа поперечного перерізу стержня, I - момент інерції поперечного перерізу відносно осі, яка проходить через центр ваги перерізу, ω - частота власних коливань.

Припустимо, що поперечний переріз є круг. В цьому поширеному випадку рівняння коливань має вигляд

$$(F^2 y'')'' = \lambda F y, \qquad /27/$$

де

$$\lambda = 4\pi \rho E^{-1} \omega^2.$$

Рівняння /27/ заміною змінної і функції

$$y = F^{-\frac{5}{8}} u(\tau), \quad \tau = \int_0^x (F(\xi))^{-\frac{1}{4}} d\xi$$

приводиться до вигляду

$$u'''' - (p(\tau)u')' + q(\tau)u = \lambda u, \qquad /28/$$

причому функція $F(x)$ відновлюється за коефіцієнтами $p(\tau)$ $q(\tau)$.

При проектуванні лопатки газотурбінного двигуна розглядають крайові умови

$$u(0)=u'(0)=u''(\ell)=u'''(\ell)=0.$$

У параграфі 3 розглядається проектування резонаторів, які мають задані робочі частоти $\omega_1,\ldots,\omega_n$. Задача зводиться до знаходження хвильового опору $W(\tau)$, який задовольняє умовам

$$E''+\omega_i^2 E=q_E E, \qquad /29/$$

$$q_E=(W'/2W)^2-(W'/2W)'. \qquad /30/$$

$$H''+\omega_i^2 H=q_H H, \qquad /31/$$

$$q_H=(W'/2W)^2+(W'/2W)'. \qquad /32/$$

У параграфі 4 розглянуто алгоритм відновлення диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними за частково заданим спектром. Ця задача пов'язана з проектуванням мембрани постійної товщини, яка знаходиться на пружній основі. Нехай у прямокутнику $\Pi=(0;a)\times(0;b)$ з границею L задано рівняння

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+V(x,y)u(x,y)=\lambda u(x,y) \qquad /33/$$

і крайові умови

$$u(x,y)\big|_L=0. \qquad /34/$$

Необхідно за заданими числами $K_1, K_2, \dots K_N$ визначити функцію $V(x,y)$, таку, щоб задача на власні значення у своєму спектрі мала ці числа. Функція $V(x,y)$ характеризує пружне середовище, тобто задача полягає у синтезі пружного середовища. Відокремлення змінних можна досягнути, зробив такі припущення:

$$V(x,y) = q_1(x) + q_2(y),$$

$$u(x,y) = u_1(x) u_2(y).$$

При цьому

$$-u_1''(x) + q_1(x) u_1(x) = \mu u_1(x), \qquad /35/$$

$$u_1(0) = u_1(a) = 0, \qquad /36/$$

$$-u_2''(y) + q_2(y) u_2(y) = \nu u_2(y), \qquad /37/$$

$$u_2(0) = u_2(b) = 0, \qquad /38/$$

причому

$$\lambda_{ij} = \mu_i + \nu_j, \quad i,j = 1,2,\dots, \qquad /39/$$

де $\{\mu_i\}_1^\infty$ - спектр задачі /35/./36/, а $\{\nu_i\}_1^\infty$ - спектр задачі /37/./38/.

Для розв'язання оберненої задачі /33/./34/ необхідно потрібним чином, що складає особливі труднощі, задати послідовності $\{\mu_i\}_1^\infty$ та $\{\nu_i\}_1^\infty$, за якими побудувати функції $q_1(x)$ і $q_2(x)$ в одновимірних задачах на власні значення.

При розв'язанні наведених конкретних прикладних задач розв'язувалися наближено обернені задачі на власні значення. У кожному параграфі наведено результати чисельного розв'язання задач. Результати чисельних експериментів підтвердили доцільність розроблених математичних моделей у наукових дослідженнях.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

Створено та досліджено математичні моделі прикладних задач, які описуються одновимірними оберненими задачами на власні значення. Розроблено наближений метод розв'язання обернених задач на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з відділеними крайовими умовами за двома спектрами. Метод базується на порівнянні заданого спектра та шуканого коефіцієнта рівняння з відомими спектрами та коефіцієнтом іншої, вже розв'язаної задачі на власні значення. Отримано функціональне рівняння, розв'язок якого збігається з розв'язком оберненої задачі Штурма - Ліувілля. Доведено існування одного диференціального оператора четвертого порядку при умові існування іншого, спектри яких відрізняються на скінченній сукупності індексів, одержано формули, які зв'язують коефіцієнти операторів. Досліджено стійкість розв'язків до малих змін скінченної кількості елементів спектра.

На основі теорем існування побудовано і досліджено ітераційні процеси розв'язання оберненої задачі Штурма - Ліувілля та оберненої задачі для диференціального рівняння четвертого порядку. Встановлено факторіальну збіжність. Проведено експериментальне дослідження розроблених чисельних методів при розв'язанні модельних задач, що дозволяє зробити висновок про високу працездатність запропонованих алгоритмів для розв'язання широкого класу обернених задач.

Розроблено математичні моделі і чисельні методи розв'язання конкретних прикладних задач:

- проектування вібратора в магнітострикційному збуджувачі коливань, який має декілька наперед заданих робочих частот;

- проектування робочої лопатки газотурбінного двигуна при повздовжніх та поперечних власних коливаннях за декількома заданими частотами ;

- синтез неоднорідних електромагнітних резонаторів за заданим розподілом декількох резонансних частот ;

- проектування віброзахисних систем за заданими власними частотами за допомогою вибору параметрів віброізоляції.

Основні результати дисертації опубліковані у таких роботах :

1. Демьянчук А.П. Численное решение одной обратной краевой задачи // Численный анализ. Киев: ИК АН УССР, 1978.- С. 86-90.

2. Демьянчук А.П. Приближенное решение обратной задачи на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка // Оптимизация вычислений и численный анализ.- Киев: ИК АН УССР, 1980.- С. 55-90.

3. Демьянчук А.П. Об устойчивости решения обратной задачи на собственные значения для дифференциального уравнения четвертого порядка// Исследование некоторых задач математической физики .- Киев: ИК АН УССР, 1982.- С. 3-6.

4. Демьянчук А.П. Обратные задачи на собственные значения для дифференциального уравнения четвертого порядка.- М., 1980.- 29 с. - Деп. в ВИНИТИ 15.10.80, № 3241-80.

5. Демьянчук А.П. Расчет формы стержня переменного сечения по заданным частотам свободных продольных колебаний // Программное обеспечение ЭВМ.- Киев: ИК АН УССР, 1982.-С.75-80.

6. Moltchanow I.N., Demjantschuk A.P. Die numerische Bestimung eines Operators 2. Ordnung aus dem Spektrum // Wissen. Zetschr. der Techn. Hochs. Magdeburg.- 1983.- Bd 27, N 8. - S. 7-14.

7. Молчанов И.Н., Демьянчук А.П. Приближенное определение оператора Штурма-Лиувилля по спектру // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1985.- № 4.- С. 15-17.

8. Демьянчук А.П. К вопросу о сходимости одного итерационного процесса // Оптимизация численных методов решения задач на ЭВМ.- Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1986.- С. 23-26.

9. Молчанов И.Н., Демьянчук А.П., Ткаченко В.И. Приближенное определение обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка по спектру // Докл. АН УССР. Сер. А.- 1989. - № I. - С. 27-29.

I0. Молчанов И.Н., Демьянчук А.П., Ткаченко В.И. Исследование и приближенное решение обратной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка.- Киев, 1988.- 26 с. - /Препр./ АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР ; № 88 - 3I.

II. Демьянчук А.П. Приближенное определение регулярного оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам // Численные методы и оптимизация.- Таллинн : ИК АНЭ, 1990.- С. 65-70.

I2. Демьянчук А.П. Приближенное решение обратной задачи Штурма-Лиувилля // Тез. докл. научн.-техн. конф. "Применение вычислительной техники и математических методов в научных исследованиях". - Севастополь, 1990. - С. 64.

I3. Демьянчук А.П. Приближенное решение обратной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка // Тез. докл. I Всесоюз. семинара "Прикладные проблемы моделирования и оптимизации".-Москва,1991.-С.30.

I4. Демьянчук А.П. Приближенное решения обратной задачи на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка в частных производных // Тез. докл. науч.-техн.конф. "Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях".- Киев, 1991.- С. I45.

I5. Демьянчук А.П. Алгоритм численного решения обратной задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений в частных производных// Технология и методы решения задач прикладной математики.- Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, 1992.- С. 96-100.

I6. Дем'янчук А.П. Наближене розв'язування задач про власні значення для звичайних диференціальних операторів // Тези Міжнар. конф., присвяченої пам'яті академіка М.П. Кравчука.-Київ-Луцьк, 1992.- С. 62.

I7. Демьянчук А.П. Расчет виброзащитных систем путем оптимального выбора параметров виброизоляции // Материалы Междунар. науч.-техн. конф. "Совершенствование и развитие отделочно-зачистной, финишной и поверхностной пластической обработки деталей" -

Винница, 1992. — С. 35.

18. Демьянчук А. П. Синтез элементов конструкций посредством управления собственными частотами // Тез. докл. Междунар. семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». — Москва, 1992. — С. 60.

19. Демьянчук А. П. Расчет формы стержня переменного сечения по заданным частотам свободных продольных или поперечных колебаний // Доповіді наук.-техн. конф. «Пам'яті академіка М. П. Кравчука». — Київ, 1992. — С. 5.

20. Демьянчук А. П. Влияние механических воздействий на системы управления // Тез. докл. науч.-техн. конф. стран СНГ «Контроль и управление в технических системах». — Винница, 1992. — С. 58.

21. Синтез элементов конструкций, обладающих заданными частотными характеристиками // Материалы Междунар. семинара «Прикладные проблемы моделирования и оптимизации» Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН Украины, Киев, 1992. — С. 93—96. — Деп. в ВИНИТИ 12.08.92, № 26—28.

22. Дем'янчук А. П. Розпізнавання образів при геометричному моделюванні елементів конструкцій // Праці Першої Всеукр. конф. «Обробка сигналів і зображень та розпізнавання образів». — Київ, 1992, — С. 94—95.

23. Дем'янчук А. П. Стійкість відновлення стержня за власними частотами // Тез. докл. Междунар. математической конференции «Ляпуновские чтения». — Харьков: 1992. — С. 39—40.

24. Demjantchuk A. P. Some inverse eigenvalue problems // Тези Міжнар. мат. конф., присв'яченої 100-річчю народження С. Банаха. — Львів, 1992. — С. 8—9.

25. Демьянчук А. П. Алгоритм решения обратной задачи на собственные значения для дифференциального уравнения четвертого порядка // Разработка математического и программного обеспечения ППП и решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН Украины, 1992. — С. 116—120.

26. Дем'янчук А. П. Одновимірні обернені задачі про власні значення для диференціальних операторів: Навч. посібник. — К.: НМК ВО, 1992. — 72 с.

Підп. до друку 24.06.93. Формат 60×84/16. Папір друк. № 2. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,63. Ум. фарбо-відб. 1,75. Обл. вид. арк. 2,0. Тираж 100 прим. Зам. 1025.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова АН України
252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40