АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

На правах рукописи

РАБИНОВИЧ ВЛАДИМИР САМУИЛОВИЧ

Метод предельных операторов в вопросах разрешимости псевдодифференциальных уравнений и уравнений типа свертки

01.01.03 –математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Харьков
1993

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики Ростовского госуниверситета

Оффициальные оппоненты :
доктор физико-математических наук, профессор
Кондратьев В.А.
доктор физико-математических наук, профессор
Пламеневский Б.А.,
доктор физико-математических наук , профессор
Ройтберг Я.А..

Ведущая организация - Институт Проблем Механики АН России

Защита состоится " 1 " ноября 1993 в 15⁰⁰ час на заседании специализированного совета Д 016.27.02 по физико-математическим наукам в ФТИНТ АН Украины по адресу: 310164, г.Харьков,пр-т Ленина 47,ФТИНТ АН Украины.
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФТИНТ по тому же адресу.

Автореферат разослан 28.09.93 г.

Ученый секретарь
специализированного совета ,
профессор Ткаченко В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации развивается метод предельных операторов,позволяющий с единой точки зрения рассмотреть вопросы разрешимости широких классов псевдодифференциальных уравнений и уравнений типа свертки.

Псевдодифференциальные операторы (ПДО) и тесно связанные с ними интегральные операторы Фурье играют универсальную роль в современной теории уравнений с частными производными и линейной математической физике.Созданная в средине 60-ых, начале 70-ых в основопологающих работах Л.Хермандера, В.П.Маслова, Дж.Дж.Кона, Л.Ниренберга, М.Сато, Ю.И.Егорова эта теория продвинута в работах М.Атьи, И.М.Зингера (проблема индекса), М.И.Вишика и Г.И.Эскина, Л.Буте-де-Монвеля (общие краевые задачи), В.П.Маслова и его учеников (асимптотические методы), Б.А.Пламеневского и его учеников (ПДО на многообразиях с особенностями ,мероморфные ПДО),М.А.Шубина (спектральная теория,почти-периодические ПДО) и других авторов.

Одним из центральных моментов теории ПДО является построение исчисления ПДО на $\mathbb{R}^n$.Различным вариантам исчисления ПДО на $\mathbb{R}^n$ посвящены работы Л.Хермандера,Р.Билса,Ч.Фефермана, М.А.Шубина и других авторов.Как правило на символы ПДО накладываются условия, обеспечивающие улучшение поведения производных символа на бесконечности по сравнению с самим символом.Если условия такого сорта не выполнены,то стандартная техника ПДО не применима , и в вопросах разрешимости псевдодифференциальных уравнений следует использовать операторные символы.Такая ситуация характерна при изучении вырождающихся дифференциальных операторов,дифференциально-разностных операторов и в других ситуациях.

Метод предельных операторов, развиваемый в диссертации,является достаточно общим средством ,позволяющим описать операторный символ,в терминах которого и формулируются условия нетеровости и существования регуляризатора для ПДО.

Паралельно теории ПДО весьма интенсивно развивалась теория уравнений типа свертки,имеющая важные приложения в разнообразных задачах математической физики.

Большой вклад в теорию одномерных уравнений типа свертки внесен работами Ф.Д.Гахова,Ю.И.Черского,М.Г.Крейна, И.Ц.Гохберга, Н.Я.Крупника,И.А.Фельдмана,Н.К.Карапетянца и С.Г.Самко, Г.С.Литвинчука.И.М.Спитковского,Ю.И.Карловича и др.

Основопологающими в теории многомерных уравнений типа свертки явились работы И.Б.Симоненко,применившего к изучению их нетеровости локальный принцип.Эти работы были продолжены его учениками:В.С.Пилиди,В.Н.Семенютой,В.М.Деундяком ,А.В.Козаком,Б. Штейнбергом и др.

Ряд интересных результатов в теории многомерных уравнений типа свертки получен В.А.Малышевым,Р.Дугласом и Р.Хоу,Е.Мейстером,О.Шпеком.Одномерные и многомерные уравнения типа свертки с разрывными символами были изучены Р.Дудучавой.

Метод предельных операторов позволяет указать критерий нетеровости многомерных операторов типа свертки при минимальных ограничениях на коэффициенты свертки.

Предельные операторы были введены Фаваром для исследования разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами.К уравнениям с частными производными метод предельных операторов применялся Э.М.Мухамадиевым и М.А.Шубиным.

Анализ работ этих авторов послужил отправным моментом для разработки метода предельных операторов применительно к указанным задачам.

Цель работы.Исследовать вопросы разрешимости:
1) псевдодифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и на некоторых классах гладких некомпактных многообразий без края ,
2)общих краевых задач для ПДО на некоторых некомпактных многообразиях с некомпактным краем,
3)уравнений типа сврткм на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$ и других абелевых локально компактных компактно порожденных группах,
4)рассмотреть приложения метода предельных операторов к конкретным задачам математической физики ,в частности ,к задачам

распространения малых колебаний в жидких и упругих неоднородных средах.

Научная новизна. Теоретическая и практическая ценность. Впервые метод предельных операторов применяется при исследовании разрешимости ПДО ,уравнений типа свертки, задач распространения волн в жидких и упругих средах. Этот метод позволяет исследовать нетеровость указанных задач при минимальных ограничениях на их символы с точки зрения поведения на бесконечности .

Локальный вариант метода предельных операторов дает возможность использовать его в сочетании с локальным принципом И.Б.Симоненко, что позволяет исследовать разрешимость широких классов псевдодифференциальных уравнений на гладких некомпактных многообразиях, общих краевых задач типа задач Буте-де-Монвеля на некомпактных многообразиях с некомпактным краем.

Рассмотрены также ПДО Меллина с операторными символами, играющие важную роль при исследовании различных задач математической физики в областях ,имеющих конические точки ,ребра и другие особенности.

Изучены некоторые вопросы распространения акустических волн в неоднородных открытых волноводах, которые в определенном смысле являются возмущениями стратифицированных волноводов. Установлены спектральные свойства этих задач и обоснован принцип предельного поглощения. Аналогичные вопросы расмотрены для разностных аппроксимаций указанных задач.

Аппробация работы. Результаты работы докладывались на конференции памяти И.Г.Петровского в 1975 году, в Зимней Воронежской математической школе (многократно), в Сухумской математической школе (1977,1987), на конференциях "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения", г.Черноголовка (1985,1987,1989), в 14 и 15 школах по теории операторов в функциональных пространствах (1990,1991), в школе-конференции "Нелинейные задачи математической физики", в Крымской математической школе (1991, 1992), на всесоюзной конференции "Волны и дифракция", г.Винница (1990), на конференции "День дифракции", ЛГУ (неоднократно), на международной конференции "Анализ на многообразиях с особенностями", Брайтенбрунн, Германия (1990) и других конференциях и школах.

С сообщениями о результатах диссертации автор неоднократно выступал на семинарах в Ростовском университете: академика Воровича И.И., профессора Симоненко И.Б., в МГУ на семинаре профессоров Кондратьева В.А. и Ландиса Е.М., в ИПМех. на семинаре академика Маслова В.П., в Одессе на семинаре профессора Литвинчука Г.С., в Тбилисском математическом институте на семинаре профессора Гегелиа Т.Г., в Харькове на семинаре академика Марченко В.А..

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-27]. Работы [6,13-16] выполнены совместно с учениками и их результаты принадлежат авторам в равной мере.

Объем работы. Диссертация состоит из введения и пяти глав, разбитых на 36 параграфов со сквозной нумерацией. Общий объем работы без списка литературы 352 стр. В списке литературы 160 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении изложено содержание диссертации, дан литературный обзор и введены некоторые обозначения и определения.

В частности, через $\mathbb{B}(X,Y)$ обозначено пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, $\mathbb{B}(X,X)=\mathbb{B}(X)$.

Оператор $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ называется нетеровым, в другой терминологии фредгольмовым или Ф-оператором, если образ оператора A в Y замкнут, а пространства $\ker A$ и $\ker A^*$ -конечномерны.

Глава 1. Эта глава состоит из восьми параграфов и посвящена, в основном, исследованию операторов дискретной свертки на $\mathbb{Z}^n$, т.е. операторов из банаховой алгебры $W_X(\mathbb{Z}^n)$, состоящей из операторов вида

$$(Au)(x)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha(x)(\tau^\alpha u)(x), \quad x\in\mathbb{Z}^n, \tag{1}$$

где $a_\alpha(x)\in l_\infty(\mathbb{Z}^n,\mathbb{B}(X))$, $(\tau^\alpha u)(x)=u(x-\alpha),\alpha\in\mathbb{Z}^n$-оператор сдвига. Норма в $W_X(\mathbb{Z})$ вводится по формуле

$$\|A\|_{W_X(\mathbb{Z}^n)}=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\|a_\alpha(x)\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^n,\mathbb{B}(X))} .$$

Пусть пространство X конечномерно ,$\mathbb{Z}^n\ni p_m\to\infty$,тогда, используя теорему Больцано-Вейерштрасса и диагональный процесс,из последовательности p_m можно выбрать такую подпоследовательность $p_{m_k}\to\infty$,что для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^n$ и для любой точки $x\in\mathbb{Z}^n$

$$a_\alpha(x+p_{m_k})\to\tilde{a}_\alpha(x)$$

для некоторых функций $\tilde{a}_\alpha(x)\in l_\infty(\mathbb{Z}^n,\mathbb{B}(X))$.

Оператор

$$\tilde{A}u(x)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\tilde{a}(x)(\tau^\alpha u)(x),x\in\mathbb{Z}^n$$

называется предельным оператором A,отвечающим последовательности $\mathbb{Z}^n\ni p_{m_k}\to\infty$.

Основной результат этой главы составляет следующая

Теорема 3.3 .Пусть $A\in W_X(\mathbb{Z}^n)$,X-конечномерно ,тогда следующие утверждения равносильны:

1) существует $p_0\in[1,\infty]$,такое что A-нетеров оператор в $l_{p_0}(\mathbb{Z}^n)$,

ii)любой предельный оператор $\tilde{A}$ обратим в $l_{p_0}(\mathbb{Z}^n)$ и существует $C_{p_0}>0$,такое что для любого предельного оператора $\tilde{A}$

$$\|\tilde{A}^{-1}\|_{\mathbb{B}(l_{p_0}(\mathbb{Z}^n))}\le C_{p_0},$$

iii)все предельные операторы $\tilde{A}$ обратимы в $l_p(\mathbb{Z}^n,X)$ для любого $p\in[1,\infty]$,

iv)для любого $p\in[1,\infty]$ существует $C_p>0$,такое что для любого предельного оператора $\tilde{A}$

$$\|\tilde{A}^{-1}\|_{\mathbb{B}(l_p(\mathbb{Z}^n,X))}\le C_p,$$

v) оператор A-нетеров во всех пространствах $l_p(\mathbb{Z}^n,X)$,$p\in[1,\infty]$.

Заметим,что предельные операторы устроены,как правило, проще,чем исходные операторы ,что позволяет получить из теоремы 3.3 эффективные условия нетеровости широких классов уравнений свертки .

Теорема 3.3 распространена на некоторые классы уравнений типа свертки и в том случае, когда пространство X-бесконечномерно.

Пусть теперь G-локально компактная компактно порожденная абелева группа, тогда с точностью до изоморфизма $G=\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\times\Delta$, где Δ-компактная абелева группа. Положим $M=(0,1]^{n_1}\times\Delta$. На множестве измеримых относительно меры Хаара на G функций зададим отображение γ, сопоставляющее функции $f(x)$ вектор-функцию

$$(\gamma f)(y,\alpha)=f(y+\alpha),\ y\in M,\ \alpha\in\mathbb{Z}^n,\ x=y+\alpha\ .$$

Через $L_{p,q}(G)$ обозначим банахово пространство, элементами которого являются классы измеримых, совпадающих локально почти всюду функций с нормой

$$\|f\|_{L_{p,q}(G)} = \|\gamma f\|_{l_q(\mathbb{Z}^n,L_p(M))}\ ,$$

а через $W(G)$ -алгебру операторов вида

$$(Au)(x)=\Sigma^{\infty}_{j=1}a_j(x)T_{g_j}u(x)+\Sigma^{\infty}_{j=1}\Pi^{\infty}_{j=1}a_{jk}(x)R_{jk}b_{jk}(x)u(x),\ x\in G,\quad (2)$$

где $a_j(x)$-равномерно непрерывные ограниченные на G функции, R_{jk}-операторы свертки с ядрами $r_{jk}\in L_1(G)$, T_{g_j}-операторы сдвига на вектора $g_j\in\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^{n_1}\times\mathbb{Z}^{n_2}$, a_{jk}, $b_{jk}\in L_\infty(G)$.

Норма в алгебре $W(G)$ вводится по формуле

$$\|A\|_{W(G)}=\Sigma^{\infty}_{j=1}\|a_j(x)\|_{L_\infty}+\Sigma^{\infty}_{i=1}\Pi^{\infty}_{k=1}\|a_{jk}\|_{L_\infty}\|b_{jk}\|_{L_\infty}\|r_{jk}\|_{L_1}\ .$$

Пусть $\mathbb{Z}^n\ni h_m\to\infty$, из последовательности h_m можно выделить подпоследовательность $h_{m_k}\to\infty$, такую что

$$a_j(x+h_{m_k})\to\tilde{a}_j(x)\qquad(3)$$

$$a_{jk}(x+h_{m_k})\to\tilde{a}_{jk}(x),\qquad b_{jk}(x+h_{m_k})\to\tilde{b}_{jk}(x)\quad(4)$$

для некоторых функций $\tilde{a}_j(x),\tilde{a}_{jk}(x),\tilde{b}_{jk}(x)\in L_\infty(G)$.

Сходимость в формуле (3) понимается как равномерная на компактах, а в формуле (4) в том смысле, что последовательность операторов умножения на функции сильно в $L_{p,q}(G)$ сходится к оператору умножения на функцию.

Оператор вида (2) где a_j, a_{jk}, b_{jk} заменены их предельными значениями, называется предельным оператором A, определяемым последовательностью h_{m_k}.

Т е о р е м а 6.1. Пусть $A \in W(G)$, разностный оператор

$$S=\sum^{\infty}_{j=1} a_j(x) T_{g_j}$$

обратим в $L_{p,q}(G)$, $p\in(1,\infty)$, $q\in[1,\infty]$, тогда оператор A вида (2) нетеров в $L_{p,q}(G)$ тогда и только тогда, когда, существует $q_0\in[1,\infty]$, такое что все предельные операторы оператора A обратимы в $L_{p,q_0}(G)$.

Если группа G не дискретна и $(p,q)\in(1,\infty)$, то условие обратимости S в $L_{p,q}(G)$ и необходимо для нетеровости A .

Теорема 6.1 вытекает из бесконечномерного варианта теоремы 3.3, так как, если $A \in W(G)$, то $\gamma A\gamma^{-1}\in W_X(\mathbb{Z}^n)$, где $X=L_p(M)$, $p\in[1,\infty]$.

Рассмотрены многочисленные приложения теоремы 6.1 к операторам свертки на $\mathbb{R}^n$. Отметим, что и в задачах, которые можно исследовать и другими методами, например, с помощью локального принципа, техника предельных опертаоров обладает определенными преимуществами.

Рассмотрены приложения теоремы 6.1 к исследованию разрешимости разностных операторов, возникающих при дискретизации уравнений распространения акустических волн в неоднородных средах.

В этой же главе рассматриваются уравнения типа свертки на $\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n$ в экспоненциальных весовых классах. Методом предельных операторов доказаны теоремы о нетеровости, а также теоремы типа Фрагмена-Линделефа об априорном поведении решений уравнений типа свертки на бесконечности.

Глава 2 (параграфы 9-19, дополнение) занимает центральное место в диссертации и посвящена применению метода предельных операторов к вопросам локальной обратимости и нетероовости ПДО с операторным символом на $\mathbb{R}^n$ и на некоторых некомпактных многообразиях. Следует отметить, что ПДО с операторным символом возникают во многих задачах теории дифференциальных уравнений.

Естественно такие операторы возникают и в конкретных задачах математической физики,например,в задачах теории колебаний полуограниченных сред.

Определим сначала предельный оператор для ПДО класса $OPS^0_{0,0}$,т.е. для ПДО со скалярными символами $a(x,\xi)$, удовлетворяющими оценкам :для любых мультииндексов α,β существуют константы $C_{\alpha\beta}>0$, такие что

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta} .$$

Пусть $h_m=(p_m,q_m)\in \mathbb{Z}^{2n}$ и $h_m\to\infty$. Последовательность $a(x+p_m,\xi+q_m)$ равномерно ограничена в топологии $C^\infty(\mathbb{R}_x^n\times \mathbb{R}_\xi^n)$,следовательно,существует такая подпоследовательность h_{m_k},что $a(x+p_{m_k},\xi+q_{m_k})\to\tilde a(x,\xi)$ в $C^\infty(\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_\xi^n)$,где $\tilde a(x,\xi)$- некоторая функция, принадлежащая $S^0_{0,0}(\mathbb{R}^{2n})$.Оператор $\tilde a(x,D)$ называется предельным оператором $a(x,D)$, отвечающим последовательности h_{m_k} .

Аналогично определение предельного оператора для ПДО с операторным символом класса $OPS^0_{0,0}(\mathbb{H})$,принимающим значения в $\mathbb{B}(\mathbb{H})$,где $\mathbb{H}$ -гильбертово пространство, и удовлетворяющим оценкам:

$$\| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})}\le C_{\alpha\beta} .$$

Будем говорить,что оператор $A\in OPS^0_{0,0}(\mathbb{H})$ имеет оболочку, если любая последовательность $h_m\in \mathbb{Z}^{2n}$,стремящаяся к бесконечности, содержит подпоследовательность,определяющую предельный оператор .

Основной результат параграфов 9-10 составляет следующая

Т е о р е м а 10.1.Пусть $A\in OPS^0_{0,0}(\mathbb{H})$ и A обладает оболочкой,тогда следующие условия равносильны:

(1) существует оператор $R\in OPS^0_{0,0}(\mathbb{H})$,такой что ПДО $RA-I$, $AR-I$ имеют символы из пространства оператор-функций Л.Шварца$S(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{B}(\mathbb{H}))$.

(11)Все предельные операторы $\tilde A$ обратимы в $L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$ и существует число $C>0$,такое что

$$\|\tilde{A}^{-1}\|_{\mathbb{B}(L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{H}))} \le C$$

для любого предельного оператора $\tilde{A}$.

Доказательство теоремы 10.1 основано на технике бесконечных разбиений единицы в фазовом пространстве $\mathbb{R}_x^{\,n}\times\mathbb{R}_\xi^{\,n}$.
Имеет место и локальный вариант теоремы 10.1. Для того чтобы его сформулировать введем компактификацию $\tilde{\mathbb{R}}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ "сферой" $\mathfrak{N}$ бесконечно удаленных точек.

Будем говорить, что оператор $A\in OPS^{0}{}_{0,0}(\mathbb{H})$ имеет локальную оболочку в точке $\eta\in\mathfrak{N}$, если из любой последовательности $h_m=(p_m,q_m)\in\mathbb{Z}^{2n}$, удовлетворяющей условию: $p_m\to\eta$, можно выбрать подпоследовательность, определяющую предельный оператор $\tilde{A}$. Обозначим через $\mathfrak{S}_\eta(A)$ множество всех предельных операторов, отвечающих таким последовательностям. Это множество назовем локальной оболочкой оператора в точке $\eta\in\mathfrak{N}$.

Т е о р е м а 10.3. Пусть $A\in OPS^{0}{}_{0,0}(\mathbb{H})$ и обладает локальной оболочкой в точке $\eta\in\mathfrak{N}$, тогда следующие условия эквивалентны:
(i) $A:L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})\to L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$ локально обратим в бесконечно удаленной точке $\eta\in\mathfrak{N}$,
(ii) все предельные операторы $\tilde{A}\in\mathfrak{S}(A)$ обратимы в $L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})$ и существует такое число $C>0$, что $\|\tilde{A}^{-1}\|\le C$ для любого оператора $\tilde{A}\in\mathfrak{S}_\eta(A)$,
(iii) существуют левый и правый локально обратные к A в точке $\eta\in\mathfrak{N}$, принадлежащие классу $OPS^{0}{}_{0,0}(\mathbb{H})$.

Отметим, что когда $\mathbb{H}$ конечномерно, то любой оператор $A\in OPS^{0}{}_{0,0}(\mathbb{H})$ обладает оболочкой и локальной оболочкой в любой точке $\eta\in\mathfrak{N}$. Более того, в условии (ii) теорем 10.1 и 10.3 можно опустить требование равномерной ограниченности обратных к предельным операторам. Оказывается это условие вытекает из обратимости всех предельных операторов. Доказательство этого факта потребовало введения новой шкалы пространств $L_{2,p}(\mathbb{H})$, $p\in[1,\infty]$. Норма в $L_{2,p}(\mathbb{H})$ задается формулами:

$$\|u\|_{L_{2,p}(\mathbb{H})}=\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}\|\Phi_\alpha u\|^p_{L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})}\Big)^{1/p}\quad, p\in[1,\infty],$$

$$\|u\|_{L_{2,\infty}(\mathbb{H})}=\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^{2n}}\|\Phi_\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R}^{2n})}\ ,$$

где $\Phi_\alpha=\Phi_\alpha(x,D)$-семейство ПДО с символами, имеющими носители в кубе $I_\alpha=\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}: |x_i-\alpha_i'|\le 1, |\xi_i-\alpha_i''|\le 1\ , \alpha=(\alpha',\alpha'')\in \mathbb{Z}^{2n}\}$ и образующими разбиение единичного оператора псевдодифференциальными операторами, т.е.

$$\Sigma_{\alpha\in\mathbb{Z}^{2n}} \Phi_\alpha{}^*\Phi_\alpha=\Sigma_{\alpha\in\mathbb{Z}^{2n}} \Phi_\alpha\Phi_\alpha{}^*= I$$

Отметим, что $L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{H})=L_{2,2}(\mathbb{H})$ и операторы класса $OPS^0{}_{0,0}(\mathbb{H})$ ограничены в $L_{2,p}(\mathbb{H}), p\in[1,\infty]$.

Т е о р е м а 14.1. Пусть $A\in OPS^0{}_{0,0}(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$-конечномерно, тогда следующие условия равносильны :

(i) существует $p_0\in[1,\infty]$, такое что A-нетеров в $L_{2,p_0}(\mathbb{H})$,

(ii) для любого $p\in[1,\infty]$ все предельные операторы обратимы в $L_{2,p}(\mathbb{H})$,

(iii) для любого $p\in[1,\infty]$ существует число $C_p>0$, такое что для любого предельного оператора $\tilde{A}\in\mathfrak{S}(A)$

$$\|\tilde{A}^{-1}\|_{\mathbb{B}(L_{2,p}(\mathbb{H}))}\le C_p,$$

(iv) существует регуляризатор $R\in OPS^0(\mathbb{H})$, такой что $RA-I, AR-I$ являются ПДО с символами из класса Л.Шварца $S(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{B}(H))$,

(v) A-нетеров оператор во всех пространствах $L_{2,p}(\mathbb{H})$.

Справедлив и локальный вариант теоремы 14.1, касающийся локальной обратимости ПДО класса $OPS^0{}_{0,0}(\mathbb{H})$ в бесконечно удаленной точке $\eta\in\mathfrak{R}$.

В диссертации рассматриваются и ПДО не нулевого порядка с символами, удовлетворяющими оценкам: для любых мультииндексов α,β существуют такие константы $C_{\alpha,\beta}>0$, что

$$\|\partial_x{}^\beta\partial_\xi{}^\alpha a(x,\xi)\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})}\le C_{\alpha,\beta}m(x,\xi), \qquad (5)$$

где $m(x,\xi)$-весовая функция, т.е. положительная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяющая следующим оценкам : $m(x,\xi)m(y,\eta)^{-1}\le C(1+|x-y|+|\xi-\eta|)^\delta, C>0, \delta>0$.

Важными примерами таких функций являются функции: $\langle\xi\rangle^s=(1+|\xi|)^s$, $\langle x\rangle^{s_1}\langle\xi\rangle^{s_2}$, $(1+|x|+|\xi|)^s$.

Класс символов, удовлетворяющих оценкам (5), обозначим $\Phi^m{}_{0,0}(\mathbb{H})$, а соответствующий класс ПДО через $OP\Phi^m_{0,0}$.

С весовой функцией $M(x,\xi)$ связывается шкала функциональных пространств $\mathcal{H}_p{}^M(\mathbb{H})$ и операторы класса $OP\Phi^m{}_{0,0}(\mathbb{H})$ являются ограниченными операторами из $\mathcal{H}_p{}^M(\mathbb{H})$ в $\mathcal{H}_p^{Mm^{-1}}(\mathbb{H})$. С помощью операторов редукции порядка теоремы 10.1, 10.3, 14.1 переносятся на операторы класса $OP\Phi^m_{0,0}(\mathbb{H})$.

Рассмотрены многочисленные применения техники предельных операторов к вопросу разрешимсости различных классов дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений .В частности, метод предельных операторов применен к задаче распространения гармонических акустических волн в неоднородной жидкой среде. Применения техники предельных операторов основаны на том,что, как правило,предельные операторы являются более простыми операторами,чем исходные,что позволяет во многих важных частных случаях указать эффективные условия их обратимости.

Рассмотрим некоторые примеры применения метода предельных операторов.

1. Пусть

$$(Au)(x)=\Sigma_{|\alpha|\le m}\Sigma_{j=1}^{N}a_{\alpha j}(x)D_x^{\alpha}u(x-h_{\alpha j}),x\in\mathbb{R}^n,h_{\alpha j}\in\mathbb{R}^n$$

дифференциально-разностный оператор,действующий из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$,коэффициенты $a_{\alpha j}(x)\in C_b^{\infty}$ $(\mathbb{R}^n)$-пространству бесконечно дифференцируемых функций,ограниченных вместе со всеми производными.Более того эти функции медленно меняются на бесконечности,т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\partial_{x_k}a_{\alpha j}(x)=0,\quad k=1,\dots,n.$$

Методом предельных операторов получается следующее утверждение.

Т е о р е м а.Оператор A нетеров из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда,когда :

(i) семейство разностных операторов

$$(Au)(x)=\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{j=1}^{N}a_{\alpha j}(x)\ \xi^{\alpha}u(x-h_{\alpha j}),\ x\in\mathbb{R}^n$$

обратимо в $L_2(\mathbb{R}^n)$ для любой точки $\xi\in\mathbb{S}^{n-1}$,

(ii) $\lim\limits_{R\to\infty}\ \inf\limits_{|x|\ge R,\xi\in\mathbb{R}^n}|\Sigma_{|\alpha|\le m}\ \Sigma_{j=1}^{N}a_{\alpha j}(x)\xi^{\alpha}expi(\xi,h_{\alpha j})|\langle\xi\rangle^{-m}>0.$

2.Дифференциальные операторы с осциллирующими коэффициентами.

Пусть $Au(x)=\Sigma_{|\alpha|\le m}\ a_\alpha(x)D^\alpha u(x)$,где $a_\alpha(x)$-полу почти-периодические функции,т.е. $a_\alpha(x)$ принадлежит замыканию в топологии $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ множества функций вида

$$\Sigma_{j=1}^\infty b_j(x)c_j(x),$$

где $b_j\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ и медленно меняются на бесконечности ,$c_j(x)$ $\in CAP^\infty(\mathbb{R}^n)$ -пространству равномерных бесконечно дифференцируе-мых почти-периодических функций.

Из последовательности $a_\alpha(x+p_m)$,$p_m\to\infty$ можно выделить подпоследовательность ,сходящуюся в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$к некоторой функции $\tilde a_\alpha(x)\in CAP^\infty(\mathbb{R}^n)$. Таким образом предельными операторами являются операторы вида

$$Au = \Sigma_{|\alpha|\le m}\ \tilde a_\alpha(x)\ D^\alpha u$$

с почти-периодическими коэффициентами.Вопросы обратимости таких операторов рассматривались в работах Кобарна,Мойера, Зингера, Мухамадиева,Шубина и других авторов.

3. Рассмотрим оператор

$$Au(x)=-c^2(x)\rho(x)div(\rho^{-1}(x)\nabla u(x))-(\omega^2+i\varepsilon(x))u(x),x\in\mathbb{R}^n,$$

описывающий распространение акустических волн в неоднородной жидкости.Скороость звука $c(x)$,плотность среды $\rho(x)$ отделенные снизу от нуля вещественные функции класса $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$,$\varepsilon(x)$ -неотрицательная функция класса $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$,описывающая поглощение в жидкости.

Будем предполагать,что функции $c(x)$,$\rho(x)$,$\varepsilon(x)$-медленно меняются по $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})\to\infty$ и медленно меняются по $x_n\to\infty$,т.е. их частные производные по x_j ,$j=1,\dots,n-1$,стремятся к нулю при $x'\to\infty$,частная производная по x_nстремится к нулю при $x_n\to\infty$.

Методом предельных операторов получено следующее утверждение

Т е о р е м а . Пусть

$$\lim_{r\to\infty}\ \inf_{|x_n|>r}\ \varepsilon(x)\ >0,$$

тогда акустический оператор A обратим из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$,$s\in\mathbb{R}$.

Рассмотрена также C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ операторов,действующих в $L_2(\mathbb{R}^n)$, порожденная ПДО класса $OPS^0{}_{0,0}(\mathbb{C})=OPS^0{}_{0,0}$.Семейства $\mathfrak{S}(A)$ предельных операторов $A\in\mathfrak{A}$ образуют C^*-алгебру $\mathfrak{A}$^ с естественно введенными операциями сложения и умножения семейств, когда складываются и перемножаются предельные операторы, определяемые одними и теми же последовательностями. Норма в $\mathfrak{A}^\wedge$ вводится по формуле

$$\|\mathfrak{S}(A)\|_{\mathfrak{A}^\wedge}=\sup_{\tilde{A}\in\mathfrak{S}(A)}\|\tilde{A}\| \quad .$$

Отображение $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}^\wedge$, сопоставляющее оператору A семейство $\mathfrak{S}(A)$, есть эпиморфизм C^*-алгебр, ядром которого является идеал всех компактных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

В параграфе 19 рассматриваются ПДО, действующие в сечениях векторных расслоений над некомпактным многообразием класса $\mathfrak{R}(n)$. К этому классу отнесены некомпактные C^∞-многообразия без края, допускающие конечный атлас карт $\{U_i,\phi_i\}^N_{i=1}$, где часть карт стандартна, другая часть карт такова, что $\phi_i(U_i)$ есть окрестность бесконечно удаленной точки в $\tilde{\mathbb{R}}^n$, т.е. пересечение открытого конуса Г с центром в начале координат со внешностью замкнутого шара, причем функции перехода $\phi_j\circ\phi^{-1}_i$ являются диффеоморфизмами класса C^∞_b, т.е.

$$d(\phi_j\circ\phi_i{}^{-1}) \in C^\infty_b$$

и

$$\partial_{x_k}(d(\phi_i\circ\phi_j^{-1}(x))=O(|x|^{-\delta}),\ \delta\in(0,1],k=1,\dots,n \quad .$$

Примером такого многообразия является поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, имеющая вне некоторой окрестности начала координат вид:

$$\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:x_{n+1}=|x'|^p\sin|x'|^q\ ,|x'|\geq r>0,x'=(x_1,\dots,x_n\ )\in\mathbb{R}^{n+1}\},$$

$p\in[0,1]$, $q\in[0,1)$, $p+q\in[0,1]$.

На многообразиях класса $\mathfrak{R}(n)$ рассматриваются ПДО, принадлежащие в локальных координатах классу Л.Хермандера $OPS^{m,r}_{1,0}\otimes\mathbb{B}(\mathbb{C},{}^N\mathbb{C}^L)$, где класс символов $S^{m,r}_{1,0}$ определяется оценками:

$$|\partial^\beta_x\partial_\xi a(x,\xi)|\leq C_{\alpha\beta}(1+|x|)^r(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} .$$

В локальных координатах определяется семейство $\mathfrak{S}_\infty(A)$ предельных операторов A. Основной результат этого параграфа составляёт следующая

Т е о р е м а 19.2. Пусть $M\in\mathfrak{R}(n)$, $A\in OPS^{m,r}_{1,0}(M,E)$, E-векторное расслоение над M размерности N, функции перехода которого удовлетворяют условиям:

$$d(\tau_i\circ\tau_j^{-1})(x)\in C^\infty_b(\mathbb{R}^n),\quad \partial_{x_k}(d(\tau_i\circ\tau_j{}^{-1}(x))=O(|x|^{-\delta}),$$

$\delta\in(0,1]$, $k=1,\dots,n$, тогда следующие утверждения равносильны:

(i) A-нетеров оператор из $H^{s,t}(M,E)$ в $H^{s-m,t-r}(M,E)$.

(ii) A-равномерно эллиптичен на M и все предельные операторы $\tilde{A}\in\mathfrak{S}_\infty(A)$ обратимы из $H^{m,r}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)$ в $L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)$.

Добавление посвящено ПДО в экспоненциальных весовых классах. Рассматриваются символы класса $S^m_{0,0,\Omega}$, допускающие аналитическое прдолжение по ξ в трубчатую область $\mathbb{R}^n+i\Omega, \Omega\in\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие там оценкам :

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n+i\Omega)}|\partial_x^\beta\partial_\zeta^\alpha a(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{-m}\le C_{\alpha\beta},$$

ПДО класса $OPS_b{}^m$ действуют из $H^s_b(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-m}_b(\mathbb{R}^n)$,где

$$\|u\|_{H^s_b}=\|bu\|_{H^s}$$

Весовая функция $b(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ положительна и такова,что $\nabla(\ln b(x))\in\Omega$ для любой точки $x\in\mathbb{R}^n$.

Доказаны теоремы типа Фрагмена-Линделефа об априорном поведениии решений псевдодифференциальных уравнений на бесконечности.Проиллюстрируем эти результаты на примере дифференциального оператора.

Т е о р е м а.Пусть

$$Au(x)=\Sigma_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha u(x)$$

дифференциальный оператор с медленно меняющимися на бесконечности коэффициентами.Оператор $A:H^s_{a_t}(\mathbb{R}^n)\to H^{s-m}_{a_t}(\mathbb{R}^n)$, $(a_t(x)=\exp t\langle x\rangle)$, нетеров тогда и только тогда,когда:

(i) A-равномерно эллиптичен на $\mathbb{R}^n$,

(ii) $$\lim_{R\to\infty}\inf_{|x|\ge R,\xi\in\mathbb{R}^n}|\Sigma_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)(\xi+it\omega)^\alpha|\langle\xi\rangle^{-m}>0$$

для любой точки $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$.

(iii) если выполнено условие (ii) $\forall t\in[-1,1]$,то

$$u\in H^s{}_{a_{-1}}(\mathbb{R}^n), Au\in H^{s-m}{}_{a_1}(\mathbb{R}^n)\to u\in H^s{}_{a_1}(\mathbb{R}^n), t>0 .$$

В частности, из последней теоремы получаются оценки на бесконечности собственных функций оператора Шредингера $-\nabla+q(x)$,где $q(x)\in C^\infty{}_b(\mathbb{R}^n)$ и $\inf q(x)\ge r>0$.

3. Третья глава (параграфы 20-22) посвящена методу предельных операторов для исследования ПДО Меллина с операторным

символом на $(\mathbb{R}_+)^n=\mathbb{R}_+\times\ldots\times\mathbb{R}_+$. Преобразование Меллина является традиционным аппаратом исследования дифференциальных и псевдодифференциальных операторов с разрывными символами на многообразиях с особенностями:коническими точками и ребрами .Эта теория изложена в основопологающих работах В.А.Кондратьева, В.Мазьи,Пламеневского Б.А. и их учеников.Отметим также примыкающие к этой тематике работы Шульце Б. Имеется значительное число прикладных работ, посвященных исследованию задач на многообразиях с особенностями.

Существенную роль играет преобразование Меллина и в теории вырождающихся дифференциальных уравнений .

Псевдодифференциальным операторм Меллина (ПДОМ) будем назыбать оператор,действующий по формуле:

$$a(t,D_t)u = \int_{(\mathbb{R}_+)^n\times\mathbb{R}^n_\mu} a(t,\zeta)(t\tau^{-1})^{i\zeta}\, u(\tau)\tau^{-1}d\tau d\zeta \quad ,$$

где $u\in C_0^\infty((\mathbb{R}+)^n,\mathbb{H})$, $\tau^{-1}d\tau=\tau_1{}^{-1}d\tau_1\ldots\tau_n{}^{-1}d\tau_n$-мера Хаара, $t\tau$-произведение на мультипликативной группе $(\mathbb{R}_+)^n$,

$t^z=t_1^{z_1}\ldots t_n^{z_n}$, $z\in\mathbb{C}^n$. $\quad \mathbb{R}^n_\mu=\{\zeta\in\mathbb{C}^n : Im\zeta=\mu\in\mathbb{R}^n\}$.

Символ $a(t,\zeta)\in\mathcal{B}^{m,1}_{\mathbb{H}}((\mathbb{R}_+)^n\times\mathbb{R}^n{}_\mu)$-классу,состоящему из оператор-функций, удовлетворяющих оценкам:

$\| D_t{}^\alpha\partial_\zeta{}^\beta a(t,\zeta)\|_{\mathbb{B}(\mathbb{H})} \le C \;\langle ln\ t\rangle^1\langle\zeta\rangle^m$, $\quad Im\ \zeta=\mu$, $t\in(\mathbb{R}_+)^n$,
$D_t^\alpha=(it_1\partial_{t_1})^{\alpha_1}\ldots(it_n\partial_{t_n})^{\alpha_n}$.

Через $L_{2,\delta}((\mathbb{R}_+)^n,\mathbb{H})$ обозначено пространство вектор-функций со значениями в $\mathbb{H}$ и нормой

$$\|u\|_{L_{2,\delta}((\mathbb{R}_+)^n,\mathbb{H})}=\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^n} t^{2\delta}\|u(t)\|^2_{\mathbb{H}}\,dt\right)^{1/2} \quad ,$$

а через $\mathcal{H}_\delta^{s,r}((\mathbb{R}_+)^n, \mathbb{H})$- пространство таких распределений со значениями в $\mathbb{H}$, что

$$\|u\|_{\mathcal{H}_\delta^{s,r}((\mathbb{R}_+)^n,\mathbb{H})}=\|\langle\ln t\rangle^r(1+|\mathcal{D}_t|^2)^{s/2}u\|_{L_{2,\delta}((\mathbb{R}_+)^n)}<\infty ,$$

где $\operatorname{Im}\zeta=1/2+\delta,\ \delta+1/2=(\delta_1+1/2,\ldots,\delta_n+1/2)$.

Определение предельного оператора для ПДО Меллина на $(\mathbb{R}_+)^n$ аналогично определению предельного ореатора для ПДО на $\mathbb{R}^n$ с той лишь разницей ,что аддитивные сдвиги по пространственным переменным заменяются для ПДО Меллина мультипликативными сдбигами.

Доказаны теоремы аналогичные теоремам второй главы, дающие критерий нетеровости или локальной обратимости ПДО Меллина в терминах предельных операторов.

Рассмотрим несколько примеров.

1.Оператором Эйлера в частных производных называется оператор

$$Au(t)=\Sigma_{|\alpha|\le m}a_\alpha(t)\mathcal{D}_t^\alpha u(t),\ t\in(\mathbb{R})^n_+ \quad , \quad (5)$$

где $a_\alpha(t)\in C^\infty((\mathbb{R}_+)^n)$ и

$$|\mathcal{D}_t^\beta a_\alpha(t)|\le C_{\alpha\beta},\ t\in (\mathbb{R})^n_+ \qquad (6)$$

Пусть последовательность $h_m=exp\ p_m$,где $p_m\to\infty$.Из этой последовательности можно выделить такую подпоследовательность h_{m_k},что $a_\alpha(h_{m_k}t)\to\tilde{a}_\alpha(t)$ в топологии $C^\infty((\mathbb{R}_+)^n)$ для некоторых функций $\tilde{a}_\alpha(t)$,удовлетворяющих оценкам (6).

Оператор Эйлера (5),в котором a_α заменены $\tilde{a}_\alpha$,назовем предельным оператором A,отвечающим последовательности h_{m_k}.Из теорем, доказанных в этой главе следует,что

$$A:\mathcal{H}^{s,r}_\delta(\mathbb{R}_+)^n)\to\mathcal{H}^{s-m,r}_\delta((\mathbb{R}_+)^n)$$

нетеров тогда и только тогда когда :

(i) A-равномерно эллиптичен,т.е.

$$\inf_{(\mathbb{R}_+)^n\times S^{n-1}}|\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(t)\xi^\alpha|>0$$

(ii) все предельные операторы $\tilde{A}$ оператора A обратимы из

$\mathcal{H}_{\delta}^{m,o}((\mathbb{R}_+)^n)$ в $L_{2,\delta}((\mathbb{R}_+)^n)$.
В случае ,когда коэффициенты $a_\alpha(t)$ медленно меняются в окрестности границы $(\mathbb{R}_+)^n$,т.е.

$$\lim_{x\to\infty} \partial_{x_j} a(\exp x)=0, j=1,\dots,n,$$

то условие (ii) равносильно условию :

$$\lim_{R\to\infty} \inf_{|x|\geq R,\xi\in\mathbb{R}^n} |\Sigma_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(\exp x)(\xi+i(\delta+1/2))^\alpha| \langle\xi\rangle^{-m}>0.$$

В параграфе 21 рассматриваются C^*-алгебры ,порожденные ПДО Меллина .Обсуждаются вопрорсы нетеровости и локальной обратимости.

В параграфе 22 в качестве еще одного приложения техники ПДО Меллина изучается C^*-алгебра,порожденная сингулярными интегральными операторами (СИО) на сложном контуре с осциллирующей касательной и коэффициентами,которые могут иметь ограниченные осциллирующие разрывы 2-ого рода.Построена C^*-алгебра главных операторных символов,в терминах которых сформулирован критерий нетеровости операторов из исходной алгебры.

Отметим,что банаховы алгебры ,порожденные СИО на сложных кусочно-ляпуновских контурах с кусочно непрерывными коэффициентами рассматривалась в работах И.Ц.Гохберга и Н.Я.Крупника,А.С.Дынина,Б.А.Пламеневского и В.Н.Сеничкина, И.Б.Симоненко ,Б.Зильбермана и других авторов.

Некоторые классы СИО с коэффициентами,имеющими разрывы второго рода исследовались И.Кацем, Р.К.Сейфуллаевым, В.В.Салаевым и другими.Однако, алгебры таких операторов ранеее не рассматривались.

4.В главе 4 (параграфы 23-30) рассматриваются общие краевые задачи для псевдодифференциальных операторов класса $OPS^m_{1,0}$ на многообразиях класса $\mathfrak{R}(n)$ с некомпактным краем класса $\mathfrak{R}(n-1)$ с символами,удовлетворяющими условию трансмиссии относительно края.

Краевые задачи для псевдодифференциальных уравнений в ограниченных областях пространситва $\mathbb{R}^n$ были рассмотрены в цикле работ М.И.Вишика и Г.И.Эскина .Алгебра общих краевых задач на компактных многообразиях ,содержащая вместе с нетеровым оператором его регуляризатор была построена Буте-де-Монвелем.Эта теория изложекна в известной монографии Ремпеля Ш.и Шульце Б-В., Теория индекса эллиптических краевых задач.М.Мир,1986.

Общие краевые задачи для дифференциальных уравнений в неограниченных областях изучались Л.А.Багировым и В.И.Фей-гиным. Краевые задачи для псевдодифференциальных операторов на некоторых классах гладких некомпактных многообразий с краем рассматривались в работах Х.О.Кордеса и его учеников, А.К.Эркипа, Е.Шрое, Б-В.Шульце, Р.Я.Докторского, Л.С.Уражданой и др.

Метод предельных операторов позволяет рассматривать более общие классы краевых задач,чем в указанных работах.К краевым задачам метод предельных операторов ранее не применялся.

Пусть $r_+:S(\mathbb{R}^n)\to S(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$-оператор сужения,$e_+$- оператор продолжения нулем функции из $S(\mathbb{R}^n_+)$ на $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n:x_n>0\}$).

Рассматриваются операторы,задаваемые матрицами

$$P=\begin{bmatrix} r_+Ae_+ +G & K \\ T & Q(x',D') \end{bmatrix}:\begin{matrix} S(\bar{\mathbb{R}}^n_+,\mathbb{C}^N) \\ \oplus \\ S(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{C}^J) \end{matrix}\to\begin{matrix} S(\bar{\mathbb{R}}^n_+,\mathbb{C}^N) \\ \oplus \\ S(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{C}^{J'}) \end{matrix} \qquad (7)$$

где $A\in OPS^m_{1,0}\otimes B(\mathbb{C}^N)$ и обладает свойством трансмиссии относительно плоскости $x_n=0$,K-потенциальный оператор порядка m ,T-следовой оператор порядка m-1,типа d,G-сингулярный оператор Грина порядка m-1,типа d, $Q(x',D')\in OPS^m_{1,0}\otimes B(\mathbb{C}^J,\mathbb{C}^{J'})$- ПДО на границе $\partial\mathbb{R}^n_+=\mathbb{R}^{n-1}$.

На символы ПДО,входящих в оператор P,накладываются обычные условия по импульсным переменным ξ и условия ограниченности вместе со всеми производными по пространственным переменным.

Определим теперь семейство предельных операторов для оператора краевой задачи P.Пусть $\tilde{\mathbb{R}}^n_+$ компактификация $\mathbb{R}^n_+$ "полусферой" $\mathfrak{R}_+$ бесконечно удаленных точек.Если $\eta\in\mathfrak{R}_+\setminus\partial\mathfrak{R}_+$, то предельными оперторами оператора P краевой задачи назовем предельные операторы внутреннего оператора A,отвечающие последовательностям вида $(p_m,0)$, где $p_m\to\eta$.Если же $\eta\in\partial\mathfrak{M}_+$ и $Z^{n-1}\ni p'_m\to\eta$, то предельными операторами P назовем операторы краевых задач,которые строятся следующим образом.Из последовательности p'_m можно выбрать такую подпоследовательность p'_{m_k}, что

$$a(x'+p'_{m_k},x_n,\xi)\to\tilde{a}(x,\xi) \text{ в } C^\infty(\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{C}^N) \quad .$$

$$k(x'+p'_{m_k},\xi)\to\tilde{k}(x',\xi) \quad \text{в } C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}x\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{C}^J,\mathbb{C}^N) \quad .$$

$$t(x'+p'_{m_k},\xi)\to\tilde{t}(x',\xi) \quad \text{в } C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}x\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^J) \quad .$$

$$g(x'+p'_{m_k},\xi,\eta)\to\tilde{g}(x',\xi,\eta) \text{ в } C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}x\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N) \quad .$$

$$Q(x'+p'_{m_k},\xi')\to\tilde{Q}(x',\xi') \quad \text{в } C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}x\mathbb{R}^{n-1})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{C}^J,\mathbb{C}^{J'}).$$

В написанных выше формулах $a(x,\xi),k(x',\xi),t(x',\xi),g(x',\xi,\eta)$, $Q(x',\xi')$- символы операторов краевой задачи (7).

Оператор

$$P=\begin{bmatrix} r_+\tilde{A}e_+ +\tilde{G} & \tilde{K} \\ \tilde{T} & \tilde{Q}(x',D') \end{bmatrix},$$

где $\tilde{A}$,$\tilde{G},\tilde{K},\tilde{T},\tilde{Q}(x',D')$ - операторы с символами $\tilde{a}(x,\xi)$, $\tilde{g}(x',\xi,\eta)$, $\tilde{k}(x',\xi)$, $\tilde{t}(x',\xi)$, $\tilde{Q}(x,\xi')$, соответственно, называется предельным оператoрм краевой задачи ,отвечающим последовательности $p'_{m_k}\to\eta\in\partial\mathfrak{M}_+$.

Основной результат параграфа 25 составляет следующая

Т е о р е м а 25.1.Оператор краевой задачи P нетеров из $H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)\oplus H^{s+1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{C}^J)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)\oplus H^{s-m+1/2}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^{J'})$, $s>d-1/2$, тогда и только тогда,когда:

1) оператор P краевой задачи равномерно эллиптичен в $\mathbb{R}^n_+$,

2) для любой точки $\eta\in\mathfrak{M}_+\setminus\partial\mathfrak{M}_+$ все предельные операторы внутреннего оператора A,отвечающие последовательностям $(p_m,0)$,$p\to\eta$ обратимы из $H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)$ в $L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)$.

3) для любой точки $\eta\in\partial\mathfrak{M}_+$ все предельные операторы $\tilde{A}$, отвечающие последовательностям $(p_m,0)$, $p'_m\to\eta$ обратимы из $H^s(\mathbb{R}^n_+,\mathbb{C}^N)\oplus H^{s+1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{C}^J)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)\oplus H^{s-m+1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{C}^{J'})$,$s>d-1/2$ и нормы обратных равномерно ограничены.

Отметим, что условиям теоремы 25.1 можно придать эффективную форму, если символы операторов, входящих в оператор краевой задачи, медленно меняются на бесконечности по всем или по части переменных. Анализу возникающих при таких условиях ситуаций посвящен параграф 26. В параграфе 27 рассмотрены дифференциальные граничные задачи в полупространстве. Проиллюстрируем результаты этого параграфа на краевой задаче для одного дифференциального уравнения:

$$a(x,D)u(x)=\Sigma_{|\alpha|\le 2m}a_\alpha(x)D^\alpha u(x)=f(x),x\in\mathbb{R}^n_+, \quad (8)$$

$$\gamma b_j(x',D)u(x')=\gamma(\Sigma_{|\alpha|\le m} b_{\alpha j}(x')D^\alpha u)(x')=f_j(x'),x'\in\mathbb{R}^{n-1},$$
$j=1,2.....m$.

Граничной задаче (8) сопоставим оператор U, действующий из

$$H^s(\mathbb{R}^n_+) \text{ в } H^{s-2m}(\mathbb{R}^n_+)\oplus H^{s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}),\ s>max\{m_j\}+1/2 .$$

Как и выше, определяются предельные операторы $a(x,D)$, отвечающие последовательностям $p_m\to\eta\in\mathfrak{R}_+$ и отвечающие последовательностям $p_m\to\eta'\in\partial\mathfrak{R}_+$.

Т е о р е м а 27.1. Оператор U краевой задачи (8) нетеров тогда и только тогда, когда:

(i) оператор $a(x,D)$ равномерно эллиптичен на $\mathbb{R}^n_+$,

(ii) равномерно по $(x',\xi')\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}$ выполнено условие Шапиро-Лопатинского,

(iii) для любой точки $\eta\in\mathfrak{R}_+\setminus\partial\mathfrak{R}_+$ все предельные операторы $a(x,D)$ обратимы из $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

(iv) для любой точки $\eta\in\partial\mathfrak{R}_+$ все предельные операторы $U=(r_+a(x,D)e_+,\gamma b_1(x,D),\dots,\gamma b_m(x,D))$ обратимы из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в $H^{s-2m}(\mathbb{R}^n_+)\ \oplus_{j=1}^{m} H^{s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ для некоторого $s>max\{m_j\}+1/2$ и нормы обратных равномерно ограничены.

В параграфе 28 рассмотрена задача об упругих колебаниях неоднородного полупространства, возбуждаемых внутренними и внешними гармоническими нагрузками. Комплексная амплитуда вектора смещений $u(x)=(u_1(x),u_2(x),u_3(x))$ находится как решение системы уравнений в полупрстранстве $\mathbb{R}^3_+=(x\in\mathbb{R}^3:x_3>0)$

$$\partial_{x_r}(a_{rtkh}\, e_{kh}(u))+ (\omega+i\varepsilon(x_3))\,\rho\cdot u=f(x),x\in\mathbb{R}^3_+ ,j=1,2,3 \quad (9)$$

при граничных условиях

$$\sigma_{t3}(u)(x_1,x_2)=\phi_t(x_1,x_2),x'=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^3_+,t=1,2,3. \quad (10)$$

В формуле (9) предполагается суммирование по повторяющимся индексам, $a_{rtkh}(x)\in(C_b^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^3))$-упругие характеристики среды со стандартными свойствами симметрии относительно индексов r,t,k,h и свойством положительной определенности:

$$a_{rtkh}(x)\xi_r\xi_t\mu_k\mu_h\ge C|\xi|^2|\mu|^2.$$

В (9) $e_{kh}(u)$ -компоненты тензора деформаций, $\sigma_{rt}(u)$- компоненты тензора напряжений, $\rho(x)\in((C_b^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^3))$-плотность среды, $\inf\rho(x)>0$, $\varepsilon(x_3)$-функция, характеризующая поглощающие свойства среды, ω-круговая частота гармонических колебаний. Более того, относительно функций $a_{rtkh}(x),\rho(x)$ будем предполагать, что они медленно меняются по x' при $x'\to\infty$ и медленно меняются по x_3 при $x_3\to\infty$. Эти требования означают, что частные производные этих функций по x_1,x_2 стремятся к нулю при $x'\to\infty$, а частная производная по x_3 стремится к нулю при $x_3\to\infty$. Будем также предполагать, что $\varepsilon(x_3)$ медленно меняется при $x_3\to\infty$.

Методом предельных операторов доказана следующая

Т е о р е м а 28.1. Пусть

$$\varliminf_{x_3\to\infty}\varepsilon(x_3)>0\ , \qquad (11)$$

тогда оператор U краевой задачи (9),(10) нетеров из $H^s(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ в $H^{s-2}(\mathbb{R}_+^3,\mathbb{C}^3)\oplus H^{s-3/2}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}^3)$, $s>3/2$.

Аналогичная теорема справедлива и для акустического уравнения в полупространстве $\mathbb{R}_+^n$

$$\begin{aligned}&-c^2(x)\rho(x)div(\rho^{-1}(x)\nabla u(x))+(\omega^2+i\varepsilon(x))u(x)=f(x), x\in\mathbb{R}_+^n\\&u(x',0)=\phi(x'), x'\in\mathbb{R}^{n-1},\end{aligned} \qquad (12)$$

в предположении, что $c(x),\rho(x)\in C_b^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ и медленно меняются по x' при $x'\to\infty$ и медленно меняются по x_n при $x_n\to\infty$.

Условие (11) обеспечивает не только нетеровость задачи (12) из $H^s(\mathbb{R}_+^n)$ в $H^{s-2}(\mathbb{R}_+^n)\oplus H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $s>1/2$, но и ее обратимость.

В параграфе 29 рассмотрены операторы общих краевых задач на некомпактных многообразиях класса $\mathfrak{R}(n)$ с некомпактным краем класса $\mathfrak{R}(n-1)$. В локальных координатах определяется семейство предельных операторов общей краевой задачи так же, как это было сделано в случае полупространства. Нетеровость общей краевой задачи равносильна одновременному выполнению условий: 1) равномерной эллиптичности, 2) равномерной обратимости всех предельных операторов.

В главе 5 (параграфы 30-36) рассматривается акустическая задача (12) и ее дискретная аппроксимация в том случае, когда $\varepsilon(x_n)=0$. Предельные операторы в отсутствие поглощения не обратимы в пространствах типа H^s, поэтому в этой главе используются соображения, отличные от использованных в предыдущей главе и характерные для теории рассеяния.

В этой главе предполагаются выполнеными следующие условия:

$\rho(x), c(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n_+)$ и вещественны, $\inf \rho(x)>0$, $\inf c(x)>0$, существуют такие функции $\rho_0(x_n), c_0(x_n) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, и равные постоянным при $x_n>H>0$, что

$$|\rho(x)-\rho_0(x_n)|\le C(1+|x|)^{-2\delta_0},\ |c(x)-c_0(x_n)|\le C(1+|x|)^{-2\delta_0}, \delta_0>1.$$

Изучаются вопросы, связанные с разрешимостью задачи (12), со спектральными свойствами акустического оператора, применимостью принципа предельного поглощения. Аналогичные вопросы обсуждаются и для дискретного аналога акустического оператора. Следует отметить, что предельным оператором в данной ситуации является акустический оператор для стратифицированной среды, определяемой скоростью звука $c_0(x_n)$) и плотностью $\rho_0(x_n)$.

Акустический оператор $\mathcal{A}$, определяемый дифференциальным выражением

$$u \to -c^2(x)\rho(x) div(\rho^{-1}(x)\nabla u(x))$$

и граничным условием $u(x',0)=0$ реализуется как неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}= L_2(\mathbb{R}^n_+, c^{-2}(x)\rho^{-1}(x)dx)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}}=\{u \in D'(\mathbb{R}^n_+): \|u\|_{L_2}+\|\nabla u\|_{L_2}+\|div(\rho^{-1}\nabla u)\|_{L_2}<\infty \}$$

Положим $L_{2,\delta}=L(\mathbb{R}^n_+, \langle x\rangle^\delta dx)$. Основным результатом этой главы является следующая

Т е о р е м а 33.1. *i*) Спектр оператора $\mathcal{A}$ есть $\mathbb{R}_+$,

ii) точечный спектр $\sigma_p(\mathcal{A})$ состоит из не более, чем счетного множества собственных значений конечной кратности с возможными точками сгущения: $0, \infty$,

iii) если $\lambda \in \mathbb{R}_+/\sigma_p(\mathcal{A})$, $\delta\in(1,\delta_0)$, то в $\mathbb{B}(L_{2,\delta}, L_{2,-\delta})$ существует предел

$$\mathcal{R}^{\pm}(\lambda)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{R}(\lambda\pm i\varepsilon),$$

где $\mathcal{R}(z)$-резольвента оператора $\mathcal{A}$,

$iii)$ оператор-функция $\mathcal{R}^{\pm}(\lambda):\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{B}(L_{2,\delta},L_{2,-\delta})$ локально гельдерова с показателем гельдеровости $\gamma\in(0,min\{1,\delta/2-1/2\}$.

При некоторых дополнительных условиях доказано отсутствие точечного спектра у оператора $\mathcal{A}$.

Рассмотрен аналог теоремы 33.1 для дискретного аналога акустического оператора на $\mathbb{Z}^{n}_{+}=\{x\in\mathbb{Z}^{n}:x_{n}\geq 0\}$,возникающего при численной реализации задач о распространении звука в неоднородных волноводах

$$Au(x)=h^{-2}c^{2}(x)\rho(x)\nabla^{*}(\rho^{-1}(x)\nabla u(x)),x\in\mathbb{Z}^{n}_{+},$$
$$u(x',x_{n})=0 \quad\text{при}\quad x_{n}<0,$$

где h- характеризует шаг разностной сетки,∇,∇^{*} -дискретные аналоги,соответственно, градиента и дивиргенции. Доказана теорема,аналогичная теореме 33.1,с тем отличием,что в дискретном случае точками накопления точечного спектра ,кроме точки ноль могут быть конечное число других точек,что связано с наличием у дискретного лапласиана иных критических значений кроме нуля.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1.Рабинович В.С.Псевдодифференциальные уравнения в неограниченных областях// ДАН СССР,1971,т.197,N^{0}2,-с.284-287.

2.Рабинович В.С.Квазиэллиптические дифференциальные уравнения и задача Коши для параболических уравнений// ДАН СССР,1971, т.201,N^{0}5,-с.1056-1058.

3.Рабинович В.С.Псевдодифференциальные операторы на одном классе некомпактных многообразий // Матем.сб., 1972,т.89, N^{0}1,-с.47-60.

4.Рабинович В.С.Априорные оценки и фредгольмовость одного класса псевдодифференциальных операторов// Матем.сб., 1973,т.92,N^{0}2, -с.195-208.

5.Рабинович В.С.Об эллиптических граничных задачах для неограниченных областей в пространствах функций экспоненциального поведения на бесконечности // Изв.СКНЦ ВШ,ест.науки,1974,N^{0}4, -с.121-123.

6.Луцкий Я.А.,Рабинович В.С.Псевдодифференциальные операторы в пространствах функций экспоненциального поведения на бесконечности // Функц.анализ и его прилож.,1977,N^{0}4,-с.79-80.

7.Рабинович В.С.Многомерные уравнения типа свертки в пространствах интегрируемых с весом функций // Матем.заметки,1974, т.16,N^{0}2, -с.267-276.

8.Рабинович В.С. О нетеровости псевдодифференциальных операторов класса $S^{m}_{\rho,\delta}$,$0\le\delta\le\rho\le1,\delta<1$.// Матем.зам.1980,т.27,в. 63,-с. 457-467.

9.Рабинович.В.С.О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве // ДАН СССР, 1982, т. 243, N^{0}5, -с.1134-1137.

10.Рабинович В.С.Об алгебре, порожденной псевдодифференциальными операторами на $\mathbb{R}^n$,операторами умножения на почти-периодические функции и операторами сдвига // ДАН СССР,1982, т263,N^{0}5 ,-с.1066-1069.

11.Рабинович В.С.Об алгебрах псевдодифференциальных операторов, связанных с дифференциально-разностными операторами // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, -Харьков, 1983,в.40. -с.119-124.

12.Рабинович В.С.О фредгольмовости многомерных интегрально-разностных операторов с разрывными коэффициентами// Теория функций, функциональный анализ и их приложения, -г.Харьков,в.44.

13.Rabnovich V.S.,Lange B.Fredholmness of pseudodifferential operators with symbol from the class $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$// Sem.Anal. 1984/1985, Akad.der Wiss DDR, Berlin, 1985, -p.147-163.

14.Ланге Б.В.,Рабинович В.С.О нетеровости операторов типа свертки с ограниченными измеримыми коэффициентами// Изв.ВУЗов,МАТЕМАТИКА, 1985, N°6, -с.22-30.

15.Ланге Б.В.Рабинович В.С. О нетеровости многомерных дискретных операторов свертки // Матем.заметки,1985, т.37, N°3, -с.407-421.

16.Ланге Б.В.,Рабинович В.С.Псевдодифференциальные операторы на $\mathbb{R}^n$ и предельные операторы // Матем. сб.,1986,т.129, N°2,-с.175-185.

17.Рабинович В.С.О фредгольмовости псевдодифференциальных операторов на $\mathbb{R}^n$ в шкале пространств $L_{2,p}$ // Сиб.матем.журнал, 1988,т29, N°4,- с.149-161.

18.Рабинович В.С.Псевдодифференциальные операторы Меллина и сингулярные интегральные операторы на сложном контуре с осциллирующей касательной// ДАН СССР,1991,т.321,N°5,стр.692-696.

19.Рабинович В.С.Операторные дискретные свертки и некоторые их приложения// Матем.заметки,1992,т.51,N°5,-с.89-100.

20.Рабинович В.С.Метод предельных операторов в теории общих граничных задач // Дифференциальные и интегральные уравнения, математическая физика и специальные функции. Международная научная конференция 24-31 мая 1992г.Тезисы докладов , -Самара,1992,-с.205-206.

21.Рабинович В.С.Фредгольмовость общих краевых задач на некомпактных многообразиях и предельные операторы.// ДАН АН России,1992,т.325,N°2,

22 Рабинович В.С. О существовании и единственности решения задачи о распространении звуковых волн в двухслойной неоднородной жидкости // Матем. методы прикл. акустики. -Ростов-на-Дону, 1986.-с.106-112.

23.Рабинович В.С. О спектральных свойствах разностной модели акустического оператора в неоднородном полупространстве // Матем. методы прикл. акустики,-Ростов-на-Дону, 1990,-с.163-169.

24.Рабинович В.С. О разрешимости задач акустики открытых волноводов // Диф.уравн. 1990,т.26,-с.1278-1280.

25.Рабинович В.С.Спектральные свойства одного класса разностных операторов // ДАН СССР,1991,т.320,$N^{O}1$,-с.45-48.

26.Рабинович В.С. Теория рассеяния для акустического оператора в неоднородном полупрпостранстве// Изв. СКНЦВШ,1991, $N^{O}1$, -с.50-66.

27.Rabinovich V.S. Spectral and scattering theory for acoustic operators in non-homogeneous fluids.Continuous and discrete models.// Symposium "Analysis on Manifolds with Singularities",Breitenbrunn 1990, TEUBNER-TEXTE zur Mathematik,Band 131,1992,p.158-167.

Ответственный за выпуск М.В.Новицкий

Подписано к печати I2.05.93 г. Физ. п.л. 2

Уч.-изд. л. 2 Заказ № 64. Тираж I00 экз.

Ротапринт ФТИНТ АН Украины, Харьков I64, просп. Ленина, 47