Академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

МАРЧЕНКО Ольга Олексіївна

УДК 519.68:517.96:539.3

АВТОМАТИЗАЦІЯ РОЗРАХУНКІВ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТІЛ З ТОНКИМИ СЛАБОТРИВКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

05.13.16 — застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття ученого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1993

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України.

Наукові керівники: доктор фізико-математичних наук, професор СКОПЕЦЬКИЙ В. В.,

доктор фізико-математичних наук ДЕЙНЕКА В. С.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ПОПОВ Б. О.,

кандидат фізико-математичних наук, доцент ПРОХУР Ю. З.

Провідна установа: Інститут проблем математичних машин і систем АН України.

Захист відбудеться «——» ———— 199 р. о——— годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.45.01 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України за адресою:

252207, Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий «——» ———— 199 р.

Учений секретар
спеціалізованої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

I. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність. Одними з перших з необхідністю широкого застосування сучасних обчислювальних засобів для перевірки та створення інженерних методів розрахунку конструкцій та проведення обчислювального експерименту з метою економії часу та коштів, що витрачаються на ту чи іншу розробку, зіткнулися спеціалісти-механіки.

Оскільки реальні споруди є багатокомпонентними системами, а їх окремі складові можуть характеризуватися достатньо низькими показниками фізичних характеристик і цим суттєво впливати на загальний стан об'єкта, актуальною є проблема розробки та дослідження математичних моделей, які адекватні динамічним процесам пружної деформації в складних, неоднорідних об'єктах, що містять послаблюючі їх ділянки та знаходяться в певних умовах взаємодії з оточуючим їх середовищем. Враховуючи, що найчастіше інженери-проектувальники не мають достатніх знань з обчислювальної математики та програмування, не менш злободенними є й питання розвитку обчислювальних методів для розрахунку цих процесів, а також розробки автоматизованих систем проектування та впровадження їх в практику дослідження об'єктів складної структури.

Метою роботи є розробка нових математичних моделей та проведення досліджень стосовно побудови високоточних обчислювальних алгоритмів на базі методу скінченних елементів (МСЕ) в формулюванні Гальоркіна для визначення напружено-деформованого стану об'єктів довільної форми, послаблених тонкими слаботривкими включеннями та таких, що зазнають певного динамічного навантаження, для визначення їх власних частот і форм, а також створення відповідного програмного забезпечення, орієнтованого на широке коло користувачів.

Методи досліджень, використані в цій роботі, базуються на методах скінченних елементів, розроблених для краєвих та початково-краєвих задач з неперервними по просторовим змінним розв'язками.

Наукова новизна та практична цінність. В дисертації розроблені нові математичні моделі динамічної рівноваги та власних коливань тіл, послаблених тонкими слаботривкими прошарками; доведено єдиність розв'язку початково-крайової задачі для системи динамічної рівноваги тіла з розривними розв'язками; побудовані обчислювальні алгоритми дискретизації МСЕ на класі розривних кусково-поліноміальних функцій задачі плоскої динамічної теорії пружності про напружено-деформований стан для області із змішаними неоднорідними крайовими умовами та з умовами спряження на включеннях типу "неідеального контакту"; побудовані аналогічні обчислювальні алгоритми для задачі про вільні коливання тіла із змішаними крайовими умовами та з умовами спряження "неідеального контакту" на прошарках; отримано апріорні оцінки швидкості збіжності запропонованих обчислювальних схем; розроблені алгоритми реалізовані програмно, на їх базі створено два комплекси програм: автоматизованого розрахунку динамічного напружено-деформованого стану об'єктів (ПАРНАДС) та автоматизованого розрахунку власних частот і форм коливання об'єктів (ПАРЧІФ), які дозволяють проводити експерименти по визначенню динамічних характеристик складних, неоднорідних конструкцій, уявлення про фізичні характеристики яких можна отримати, розглядаючи їх профільні розрізи; розв'язано модельні приклади; на реальному об'єкті досліджено вплив розташування та фізичних властивостей тонких прошарків на його власні коливання.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися на Загальносоюзній науково-технічній нараді "Расчетные предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций энергетических сооружений (ПРЕДСО-90)" (м.Усть-Нарва, 1990 р.), Загальносоюзній науково-практичній конференції "Вопросы экономики и организации информационных технологий" (м.Гомель, 1991 р.), 2-й Республіканській науково-технічній конференції "Машинные методы решения задач теории фильтрации" (м.Казань, 1992 р.), Республіканському семінарі "Алгоритмічне і програмне забезпечення керованих процесів в різноманітних середовищах" Наукової ради АН України з проблеми "Кібернетика" (м. Київ, 1989-1993 р р.), науковому семінарі кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського університету ім. Тараса Шевченка (м.Київ, 1990-1992 р.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 10 робіт.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновка, списка літератури, що містить 112 назв, та додатка. Загальний об'єм дисертації становить 165 сторінок.

II. ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі міститься огляд деяких відомих пакетів прикладних програм обчислювального типу, літератури, яка присвячена проблемам розробки ППП, математичного моделювання процесів, аналітичного та чисельного розв'язання задач теорії пружності; представлені основі результати роботи та короткий зміст дисертації по розділах.

Розділ I, що містить 7 параграфів, присвячений розробці та дослідженню скінченно-елементних алгоритмів розв'язання початково-крайових задач, що допускають розрив у розв'язку для системи рівнянь гіперболічного типу з неоднорідними змішаними крайовими умовами.

Розглядається область Ω (рис. I), яка складається з підобластей Ω_1, Ω_2 $(\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2,\ \Omega_1 \cap \Omega_2=\emptyset)$, а γ - ділянка їх дотику $(\gamma=\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2)$. В кожній з областей $\Omega_{Ti}=\Omega_i \times (0,T]$ $(i=1,2)$ визначена система рівнянь теорії пружності

$$\rho_i \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \mu_i \Delta u_1 - (\lambda_i+\mu_i)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = f_1(x,y,t),$$
$$\rho_i \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \mu_i \Delta u_2 - (\lambda_i+\mu_i)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = f_2(x,y,t), \qquad (I)$$

$$(x,y,t)\in\Omega_{Ti},\ i=1,2,$$

де λ_i, μ_i - пружні сталі Ламе області Ω_i; $u=(u_1(x,y,t); u_2(x,y,t))^T$ - вектор зміщень; ρ_i - щільність речовини області Ω_i; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $f=(f_1,f_2)^T$ - вектор масових сил, $f_i \in C(\Omega_{Ti})$;

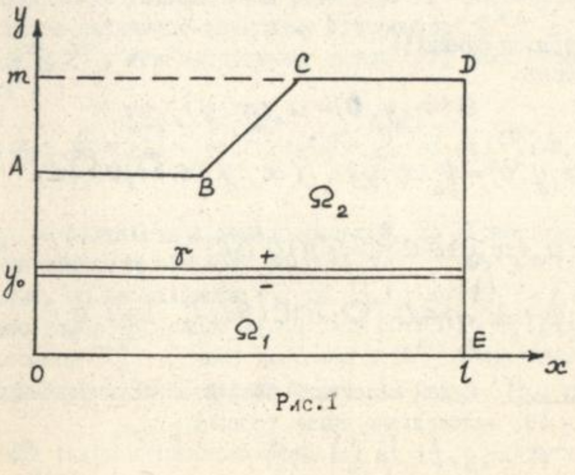

Рис. I

крайові умови

$$u_1=\varphi_1(x,y,t), \quad u_2=\varphi_2(x,y,t), \quad (x,y,t)\in\Gamma_1\times(0,T], \tag{2}$$

$$u_1=0, \quad (x,y,t)\in(\Gamma_2\cup\Gamma_4)\times(0,T], \tag{3}$$

$$\tau_{xy}=0, \quad (x,y,t)\in(\Gamma_2\cup\Gamma_4)\times(0,T], \tag{4}$$

$$\sigma_n=0, \quad \tau_s=0, \quad (x,y,t)\in\Gamma_3\times(0,T], \tag{5}$$

де $\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_i=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2/\gamma$, $\Gamma_1=OE$, $\Gamma_2=OA$,

$\Gamma_3=AB\cup BC\cup CD$, $\Gamma_4=DE$, $\varphi_j(x,y,t)\in C^2(\Gamma_1\times(0,T])$,

$j=1,2$; σ_n, τ_s - відповідно нормальна та дотична складові вектора напруги (τ_{xy} - дотична напруга на ділянках OA, DE);
умови спряження типу "неідеального контакту"

$$[u_n]=0, \quad (x,y,t)\in\gamma\times(0,T], \tag{6}$$

$$[\sigma_n]=0, \quad (x,y,t)\in\gamma\times(0,T], \tag{7}$$

$$[\tau_s]=0, \quad \{\tau_s\}^{\pm}=r[u_s], \quad (x,y,t)\in\gamma\times(0,T], \tag{8}$$

де $[\cdot]$ - стрибок функції;
початкові умови

$$\begin{gathered} u(x,y,0)=u_0(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=\psi_0(x,y), \quad (x,y)\in\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2, \end{gathered} \tag{9}$$

де
$$u_0(x,y)\in C^2(\Omega_i)\cap C^1(\bar\Omega_i),$$

$$\psi_0(x,y)\in C^1(\Omega_i)\cap C(\bar\Omega_i), \quad i=1,2.$$

Теорема I.I. Нехай класичний розв'язок початково-крайової задачі (I) - (9) задовольняє таким умовам:
I) розв'язок $u(x,y,t)$ та всі його частинні похідні другого по-

рядку неперервні на кожній із областей $\bar{\Omega}_{Ti}$ $(i=1,2)$;
2) коефіцієнти $\rho_i(x,y)$ неперервні на областях $\bar{\Omega}_i (i=1,2)$.

Тоді розв'язок $u(x,y,t)$ - єдиний.

Система (1) записується в операторному вигляді:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad (x,y,t)\in\Omega_T, \tag{10}$$

де $\Omega_T = \Omega_{T1} \cup \Omega_{T2}$, $\rho \equiv \rho_i$, $(x,y)\in\Omega_i$, $i=1,2$.

Визначаються дві множини вектор-функцій: $\tilde{Z}$ та $\tilde{Z}_0$.

Множина $\tilde{Z}$ містить вектор-функції $u=(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))^T$, компоненти яких належать простору $W_2^1(\Omega)$ для $\forall t \in (0,T]$, а їх похідні за часом $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x,y,t)$ для $\forall t\in(0,T]$, $\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,y,0)$ разом з $u_i(x,y,0)$ $(i=1,2)$ належать простору $L_2(\Omega)$.

До множини $\tilde{Z}_0$ входять вектор-функції $v(x,y)=(v_1(x,y), v_2(x,y))^T$, які задовольняють однорідним головним крайовим умовам (2), (3) та головній умові спряження (7), а кожна їх компонента належить простору Соболєва $W_2^1(\Omega_i)$, $i=1,2$.

Дискретизація області $\bar{\Omega}$ проводиться скінченним числом трикутників так, що окремо виявляються розбитими області $\bar{\Omega}_1$ та $\bar{\Omega}_2$, а вузлові точки на ділянці γ є спільними для $\bar{\Omega}_1$ та $\bar{\Omega}_2$ і мають подвійну нумерацію.

Наближений узагальнений розв'язок $u^N=(u_1^N(x,y,t), u_2^N(x,y,t))^T$ шукається в скінченно-вимірному підпросторі $Z^N \subset \tilde{Z}$. Довільна функція $w^N \in Z^N$, яка задовольняє умові (3), може бути зображена у вигляді

$$w^N(x,y,t) = \sum_{i=1}^{2N_1} \alpha_i(t)\Phi_i(x,y) + \sum_{i=2N_1+1}^{N_0} \alpha_i(t)\Phi_i(x,y), \tag{11}$$

де N_0 - кількість базисних функцій, що відповідають всім N вузловим точкам в розбитті області $\bar{\Omega}$; N_1 - кількість вузлових точок, що не належать Γ_2 та Γ_4; $\alpha_i(t)$, $i=\overline{1,N_0}$ - двічі неперервно диференційовані функції на $[0,T]$; $\{\Phi_i(x,y)\}_{i=1}^{N_0}$ - базис простору Z_t^N, який дістаємо з Z^N фіксуванням $\forall t\in[0,T]$. Його компоненти мають вигляд

$$\Phi_{2i-1} = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{pmatrix}, \quad i=\overline{1,N_1}, \tag{12}$$

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_j \end{pmatrix}, \quad i=\overline{2N_1+1, N_0}, \quad j=\overline{N_1+1, N},$$

де $\{\varphi_i(x,y)\}_{i=1}^N$ - сукупність лінійно-незалежних функцій, побудованих на повних многочленах степеня k $(k=1,2,3)$, які допускають розрив першого роду на γ та мають в $\overline{\Omega}$ обмежений носій. Перші N_2 з них відповідають вузлам, що не належать $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4$ та задовольняють нульовим крайовим умовам на Γ_1 .

Базис підпростору $Z_0^N \subset \tilde{Z}_0$ є підмножиною базису простору Z_t^N і складається з $2N_2$ функцій Φ_i , що відповідають функціям φ_j, $j=\overline{1, N_2}$, а також з функцій Φ_i , що відповідають $(N - N_1)$ вузловим точкам на $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$.

Довільна функція $v^N \in Z_0^N$ записується у вигляді

$$v^N(x,y)=\sum_{i=1}^{2N_2} \beta_i \Phi_i(x,y)+\sum_{i=2N_1+1}^{N_0} \beta_i \Phi_i(x,y), \tag{13}$$

де β_i - константи.

Напівдискретний розв'язок Гальоркіна $u^N(x,y,t)$ початково-крайової задачі (10), (2) - (9) є розв'язком задачі Коші

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, v^N\right)+a(u^N,v^N)=(f,v^N), \\ \forall v(x,y)\in Z_0^N, \ \forall t\in (0,T],\end{gathered} \tag{14}$$

$$(u^N(x,y,0),v^N)=(u_0,v^N), \ \forall v^N\in Z_0^N, \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}(x,y,0),v^N\right)=(\psi_0,v^N), \ \forall v^N\in Z_0^N, \tag{16}$$

де $\forall v^N(x,y)\in Z_0^N$ має вигляд (13),

$$(w,z)=\iint_\Omega (w_1 z_1 + w_2 z_2)\,d\Omega,$$

$$a(w,z)=\iint_{\Omega}\Big[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)+$$

$$+\lambda\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial z_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)+\mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\Big]d\Omega+r\int_{\gamma}[w_s][z_s]d\gamma,$$

і визначається у вигляді (II), де $\alpha_1(t),\alpha_2(t),\ldots,\alpha_{N_0}(t)$ - шукані функції.

<u>ТеоремаI.2</u> Якщо класичний розв'язок $u(x,y,t)$ при $\forall t\in[0,T]$ на кожній з областей $\bar\Omega_1,\bar\Omega_2$ має неперервні обмежені частинні похідні $\frac{\partial^{k+1}u_l}{\partial x^{\nu}\partial y^{\varkappa}}$ $(\nu+\varkappa=k+1,\ l=1,2)$, то для наближеного узагальненого розв'язку $u^N(x,y,t)$ справедлива оцінка

$$\|u(x,y,t)-u^N(x,y,t)\|_{L_2\times L_\infty}\le ch^k,$$

де $c=const\ge 0$; h - довжина найбільшої із сторін всіх трикутників МСЕ; k - степінь поліномів, на яких побудовані базисні функції,

$$\|w\|^2_{L_2\times L_\infty}=\max_{t\in[0,T]}\|w(\cdot,\cdot,t)\|^2_{L_2}=\max_{t\in[0,T]}\iint_{\Omega}(w_1^2+w_2^2)d\Omega.$$

Для чисельного розв'язання задачі Коші (I4) - (I6) використовується схема Кранка-Ніколсона

$$(U^0,v)=(u_0,v),\quad \forall v(x,y)\in Z_0^N, \tag{I7}$$

$$(\theta^0,v)=(\psi_0,v),\quad \forall v(x,y)\in Z_0^N, \tag{I8}$$

$$(\partial_\tau \theta^j, v) + a(U^{j+1/2}, v) = (f^{j+1/2}, v), \tag{19}$$

$$\forall v(x,y) \in Z_0^N,$$

$$U^{j+1} = U^j + \tau\theta^{j+1/2}, \quad j = \overline{0, J-1}, \tag{20}$$

де

$$U^{j+1}(x,y) = u^N(x,y,j\tau) = \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_i^{j+1} \Phi_i(x,y),$$

$$\theta^{j+1}(x,y) = \sum_{i=1}^{N_0} \beta_i^{j+1} \Phi_i(x,y), \quad j = \overline{0, J-1},$$

$$V^{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(V^{j+1} + V^j\right),$$

$$\partial_\tau V^j = \frac{1}{\tau}\left(V^{j+1} - V^j\right),$$

τ - крок за часом, $T = J\tau$, $J \geq 1$.

Теорема І.3. Нехай $u(x,y,t)$ - класичний розв'язок задачі (І) - (9), який на кожній з областей Ω_{T1}, Ω_{T2} має неперервні обмежені частинні похідні

$$\frac{\partial^{k+2} u}{\partial t\, \partial x^{\nu} \partial y^{\varkappa}}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^{\nu_1} \partial y^{\varkappa_1}}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right| < \infty$$

та $\{U^j(x,y)\}_{j=0}^{J}$ - розв'язок задачі (І7) - (20).

Тоді має місце оцінка

$$\max_{0 \leq j \leq J} \|u^j - U^j\|_{L_2} \leq c(h^k + \tau^2),$$

де $u^j = u(\cdot, \cdot, j\tau)$, $c = const \geq 0$.

Наведено розв'язок модельного прикладу.

Розділ 2 складається з 5 параграфів і присвячений вивченню математичної моделі та розробці скінченно-елементного алгоритму розв'язку задачі про вільні коливання тіла, що містить тонкі прошарки (рис.I). В площині ця задача описується системою рівнянь

$$\rho_i \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \mu_i \Delta u_1 + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right),$$

$$\rho_i \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu_i \Delta u_2 + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right),$$

$$(x,y,t) \in \Omega_{Ti}, \quad i = 1,2;$$

умовами спряження "неідеального контакту" на ділянці послаблення γ:

$$[u_n] = 0, \quad (x,y,t) \in \gamma \times (0,T],$$

$$[\sigma_n] = 0, \quad (x,y,t) \in \gamma \times (0,T],$$

$$[\tau_s] = 0, \ \{\tau_s\}^{\pm} = r[u_s], \ (x,y,t) \in \gamma \times (0,T];$$

крайовими умовами на межі $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$:

$$u = 0, \ (x,y,t) \in \Gamma_1 \times (0,T],$$

$$u_1 = 0, \ (x,y,t) \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \times (0,T],$$

$$\tau_{xy} = 0, \ (x,y,t) \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \times (0,T],$$

$$\sigma_n = 0, \ \tau_s = 0, \ (x,y,t) \in \Gamma_3 \times (0,T].$$

Після припущення, що коливання описуються таким чином:

$$u(x,y,t) = e^{i\omega t} Q(x,y),$$

де шуканими є стала ω та вектор-функція $Q(x,y) = (q_1(x,y), q_2(x,y))^T$, одержано наступну задачу на власні значення: система рівнянь

$$-\mu \Delta q_1 - (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y}\right) = \rho_i \Lambda q_1, \tag{21}$$

$$-\mu \Delta q_2 - (\lambda_i + \mu_i)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y}\right) = \rho_i \Lambda q_2 ,$$

$$(x,y) \in \Omega_i , \quad i = 1,2,$$

де $\Lambda = \omega^2$;

умови спряження:

$$[Q_n] = 0, \quad (x,y) \in \gamma, \tag{22}$$

$$[\sigma_n(Q)] = 0, \quad (x,y) \in \gamma, \tag{23}$$

$$[\tau_s(Q)] = 0, \quad \{\tau_s(Q)\}^{\pm} = r[Q_s], \quad (x,y) \in \gamma ; \tag{24}$$

крайові умови:

$$Q = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_1, \tag{25}$$

$$q_1 = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 , \tag{26}$$

$$\tau_{xy}(Q) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 , \tag{27}$$

$$\sigma_n(Q) = 0, \ \tau_s(Q) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_3 . \tag{28}$$

Введено множину Z вектор-функцій $w(x,y) = (w_1(x,y), w_2(x,y))^T$, компоненти яких разом зі своїми частинними похідними першого порядку неперервні на кожній із замкнутих областей $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$, мають неперервні обмежені в Ω_1, Ω_2 частинні похідні другого порядку і задовольняють умови (22), (25), (26).

Задачу (21) - (28) записано в операторному вигляді:

$$Lu = \Lambda \rho u , \quad u(x,y) \in Z. \tag{29}$$

На множині Z визначено енергетичний скалярний добуток $(\cdot\,,\,\cdot)_L$ та енергетичну норму $\|\cdot\|_L$ таким чином:

$$(u,v)_L = a(u,v), \quad \|u\|_L = (u,u)_L^{1/2} , \quad \forall u,v \in Z.$$

Поповнюючи Z за енергетичною нормою, одержимо енергетичний простір H, що належить $L_2(\Omega)$.

Задачу (29) записано на просторі H в слабкій формі, тобто в формі Гальоркіна: знайти Λ та відповідну не тотожньо рівну нулю функцію $u(x,y)\in H$:

$$a(u,v)=\Lambda\rho(u,v)\ ,\quad \forall v\in H. \tag{30}$$

В силу симетричності та додатньої визначеності оператора L на Z, компактній в $L_2(\Omega)$, задача (30) має дискретний спектр

$$0<\Lambda_1\le\Lambda_2\le\ldots\le\Lambda_n\le\ldots,\quad \Lambda_n\to\infty,$$

і відповідну йому послідовність власних функцій $\{u^n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$, які є ортогональними в H відносно енергетичного скалярного добутку.

Визначено $\tilde Z\subset H$ - множину вектор-функцій $v(x,y)=(v_1(x,y),\ v_2(x,y))^T$, кожна з компонент яких на кожній з областей Ω_1, Ω_2 належить простору Соболєва $W_2^1(\Omega_i)$ $(i=1,2)$ та задовольняє умови (22),(25),(26).

Введено $\tilde Z^N$ - скінченно-вимірний підпростір простору $\tilde Z$, базис якого $\{\Phi_i(x,y)\}_{i=1}^{N_0}$ визначається у вигляді (I2), де N - кількість вузлових точок, що не належать Γ_1 ; N_1 - кількість вузлових точок, що не належать $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_4$; N_0 - кількість базисних функцій, що відповідають N вузловим точкам; $\{\varphi_i(x,y)\}_{i=1}^{N}$ - сукупність лінійно-незалежних кусково-поліноміальних функцій степеня k $(k=1,2,3)$, які мають розрив першого роду на γ і їх носій обмежений в $\bar\Omega$.

Дискретний розв'язок Гальоркіна задачі (30) є розв'язком задачі

$$a(u^N,v^N)=\Lambda\rho(u^N,v^N),\ \forall v^N\in\tilde Z^N,$$

і шукається у вигляді

$$u^N(x,y)=\sum_{i=1}^{N_0}\alpha_i\Phi_i(x,y),\quad \text{де}\quad \alpha_i=const,\ i=\overline{1,N_0}.$$

<u>Теорема 2.I.</u> Нехай розривні власні функції $u^l(x,y)$, $l=\overline{1,N_0}$, є неперервними, неперервно диференційованими на кожній з областей $\bar\Omega_1$, $\bar\Omega_2$ і мають обмежені неперервні частинні похідні $(k+1)$-го порядку в Ω_1 , Ω_2 . Тоді для власних значень має місце оцінка

$$0 \leq \Lambda_l^N - \Lambda_l \leq ch^{2k},$$

де h - найбільша із сторін трикутників, k - степінь поліномів МСЕ; $c = const > 0$; $l = \overline{1, N_0}$.

Теорема 2.2. Нехай виконуються умови попередньої теореми. Тоді для наближених власних функцій $u^{l,N} (u^{l,N} \in \widetilde{Z}^N,\ l = \overline{1, N_0})$ має місце оцінка

$$\| u^l - u^{l,N} \|_{W_2^1} \leq ch^k, \quad c = const > 0.$$

Наведено розв'язки модельних прикладів.

В розділі 3, який складається з 5 параграфів, міститься опис двох комплексів програм: автоматизованого розрахунку динамічного напружено-деформованого стану неоднорідних об'єктів (ПАРНАДС) та автоматизованого розрахунку власних частот і форм (ПАРЧІФ), створених на базі розроблених в попередніх розділах алгоритмів розв'язання задач динамічної теорії пружності, що допускають розрив в компонентах зміщень, для областей довільної форми.

Обидва комплекси реалізовані у двох варіантах: алгоритмічними мовами ПЛ-І, ФОРТРАН для ЄС ЕОМ та мовою Сі для ЕОМ типу IBM PC AT. Ці комплекси органічно входять до складу системи САРПОК (створена в Інституті кібернетики ім. В.М.Глушкова АН України), розширюючи клас та складність розв'язуваних за її допомогою задач.

Обчислювальний експеримент в комплексах ПАРНАДС та ПАРЧІФ, як і в системі САРПОК, складається з таких етапів:

- опис геометрії нової області або вибір вже існуючої;
- створення файлів параметрів розбиття поточної області на скінченні елементи;
- виконання програми розбиття вибраної області з поточними параметрами розбиття,
- завдання інформації про фізичні характеристики області;
- визначення типу розв'язуваної задачі (стаціонарна чи динамічна) в комплексі ПАРНАДС;
- завдання параметра обчислень для динамічної задачі;
- рахунок поставленої задачі;
- інтерактивний графічний аналіз результатів розрахунків.

Реалізація обох комплексів на ПЕОМ орієнтована на забезпечення зручності роботи з ними споживачів, мало знайомих з програмуванням та обчислювальними методами. При постановці фізичних задач та аналізі результатів використовується інтерактивний метод роботи користувача з комплексами. Діалог здійснюється на базі шаблонних екранних форм (спеціальних полів по підготовці даних- вікон та пояснювальних текстів до них) з можливістю зручного переміщення по масиву вже введеної інформації та її коректування.

Модульний принцип побудови проблемних програм обох комплексів дозволяє використовувати їх для розв'язування різних варіантів задач (стаціонарна або динамічна, з включеннями або без них). Оскільки при написанні проблемних програм мав місце єдиний підхід до формування матриць, врахування крайових умов та умов спряження на включеннях, то, за бажанням користувача, ці дві програми можуть бути об'єднані в одну, за допомогою якої стане можливим вирішення всіх вище згадуваних класів задач теорії пружності.

За допомогою комплексу ПАРЧІФ на прикладі греблі Канівської ГАЕС (рис.2) проведені розрахунки по дослідженню впливу тонких прошарків на власні значення коливань споруд.

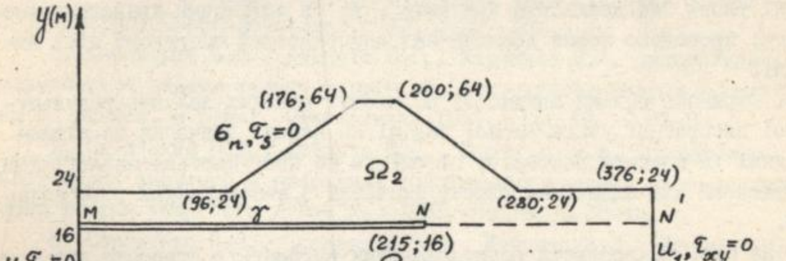

Рис.2

Модуль пружності, коефіцієнт Пуасона та щільність прийняті такими: $E = 5000\,т/м^2$; $\nu = 0{,}25$; $\rho = 1{,}68\,т/м^3$. Кількість вузлів в розбитті області без включення 1017, кількість невідомих 2034. Задача розв'язана для різних значень параметра γ та різних розтащуваннях включення MN .

Основні результати роботи

1. Розроблені нові математичні моделі динамічної рівноваги та власних коливань тіл, послаблених слаботривкими включеннями.
2. Розроблено обчислювальні алгоритми дискретизації плоскої початково-крайової задачі динамічної теорії пружності із змішаними неоднорідними крайовими умовами та такої, що допускає розрив першого роду на ділянках послаблень.
3. Доведено єдиність розв'язку початково-крайової задачі для системи динамічної рівноваги тіла з розривним розв'язком.
4. Отримано оцінку швидкості збіжності напівдискретних розв'язків Гальоркіна початково-крайової задачі для системи гіперболічних рівнянь з умовами спряження на розрізах типу "неідеального контакту".

Отримано оцінку швидкості збіжності повністю дискретних розв'язків по схемі Кранка-Ніколсона відповідної задачі Коші. При доведенні відповідних теорем встановлено, що розроблена схема дискретизації за точністю не поступається аналогічним схемам, побудованим для систем рівнянь гіперболічного типу, що мають неперервні розв'язки.
5. Розроблено обчислювальні алгоритми МСЕ для задачі про вільні коливання для області довільної форми з прошарками, на яких задані умови "неідеального контакту", та із змішаними крайовими умовами; проведено повне дослідження властивостей оператора цієї задачі.
6. Отримано оцінки швидкості збіжності власних значень результуючої дискретної узагальненої задачі на власні значення та відповідних їм власних векторів; ці оцінки не поступаються аналогічним, отриманим для задачі на власні значення з неперервними розв'язками.
7. На базі розроблених обчислювальних алгоритмів створено два комплекси програм модульної структури: мовами ПЛ-І, ФОРТРАН для ЄС ЕОМ, та мовою Сі для ПЕОМ типу IBM PC AT.
8. Програмно-алгоритмічне забезпечення випробувано на різноманітних тестових прикладах та на реальних задачах.

Основні положення дисертаційної роботи викладені в таких публікаціях:

I. Скопецкий В.В., Дейнека В.С., Марченко О.А. Построение приближенных решений для динамической задачи теории упругости, допускающей разрыв в решении/ Киев. гос. ун-т.-Киев,1989.-26 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 04.04.89. № 965.

2. Скопецкий В.В., Дейнека В.С., Марченко О.А. Определение МКЭ собственных значений и разрывных собственных форм сред, ослабленных малопрочными включениями/ Киев. гос. ун-т.-Киев,1989.- 23 с..-Деп. в УкрНИИНТИ 10.11.89. № 2530.

3. Благовещенская Т.Ю., Марченко О.А. К вопросу об организации подсистемы ввода и обработки исходной информации на ПЭВМ в в комплексе САРПОК//Вопросы экономики и организации информационных технологий: Материалы Всесоюз. науч.-практ. конф.- Гомель, 1991.-Ч.1.-С.97-99.

4. Дейнека В.С., Марченко О.А. Автоматизация расчета динамических характеристик тел, ослабленных тонкими малопрочными включениями// Там же.-Ч.2.- С.19-21.

5. Скопецкий В.В., Дейнека В.С., Марченко О.А. Расчет динамических характеристик тел, ослабленных тонкими малопрочными включениями // Расчетные предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций энергетических сооружений (ПРЕДСО-90): Материалы конф. и совещ. по гидротехнике (22-24 мая 1990 г., г.Усть-Нарва).- С.-Петербург: Энергоатомиздат,1991.-С.291-294.

6. Скопецкий В.В., Дейнека В.С., Марченко О.А. Дискретизация динамической задачи теории упругости, допускающей разрыв в решении // Вычисл. и прикл. математика.-1991.- Вып.75.-С.75-83.

7. Скопецкий В.В., Дейнека В.С., Марченко О.А. Определение собственных значений и разрывных собственных функций системы уравнений теории упругости //Там же.-1992.-Вып74.-С.38-45.

8. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С., Марченко О.А. и др. Система автоматизированного расчета полей и оптимизации конструкций (САРПОК) на ПЭВМ типа IBM PC AT.-Киев,1992.-24 с.- (Препр./ АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова; 92-26).

9. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С., Марченко О.А. и др. Системи автоматизированного расчета полей и оптимизации конструкций (САРПОК) на СМ - ЕС ЭВМ.-Киев,1992.-17 с.-(Препр./ АН Украины. Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова; 92-25).

10. Скопецкий В.В., Дейнека В.С., Марченко О.А. Определение

собственных значений и разрывных собственных функций операторов в теории фильтрации // Машинные методы решения задач в теории фильтрации: Тез.докл. 2-й Респ.научн.-техн.конф.(23-25 июня 1992 г.).- Казань: МИИММ при КГУ, 1992.- С.46.

Підп. до друку 04.06.93. Формат 60x84/16. Папір друк. № 3.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 1,16.
Обл.-вид. арк. 1,0. Тираж 100 прим. Зам. 960.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики ім.В.М.Глушкова АН України
252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40