ОДЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. И.И.МЕЧНИКОВА

На правах рукописи

МАХМУД АЛИ

РАССЕЯНИЕ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЧАСТИЦ

01.04.02 - теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Одесса - 1993

Работа выполнена на кафедре теоретической физики Одесского государственного университета им.И.И.Мечникова

Научный руководитель: доктор физ.-мат.наук, профессор
Адамян В.М.

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат.наук, профессор Асланов С.К.
доктор физ.-мат.наук, профессор Поплавский И.В.

Ведущая организация - Киевский политехнический институт

Защита состоится "25" ноября 1993 года в 14.00 часов на заседании специализированного совета К 068.24.11 при Одесском государственном университете им .И.И.Мечникова
(270100,г.Одесса,ул.Петра Великого, 2, ОГУ)

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Одесского университета (ул.Преображенская, 24)

Автореферат разослан "11" 10 1993 года

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физ.-мат.наук Затовский А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Как известно, даже классическое описание движения трех и более взаимодействующих частиц требует очень больших усилий, а точные результаты в этой области, полученные еще в прошлом веке, до сих пор считаются вершинами анализа. Такие же трудности остаются и в квантовой механике. Здесь вообще пока нельзя указать задачу с реальными взаимодействиями и конечным числом частиц, большим двух, которая допускала бы точное решение. Поэтому важную роль в понимании даже таких элементарных явлений играют так называемые решаемые модели. Они позволяют понять основные черты динамики взаимодействующих частиц, указывают направление поиска и очерчивают область применимости приближенных методов, отражающих главные особенности задачи в целом. Следует подчеркнуть, что разрешимость в конечном виде в таких моделях достигается только в частных случаях, когда удается фактически сократить число степеней свободы, и только при специальном выборе потенциалов взаимодействия или операторов энергии для системы частиц.

В классической задаче трех тел известны так называемые прямолинейные решения Эйлера, соответствующие расположению всех трех частиц на одной прямой. Отдаленным квантовым аналогом задачи, в которой выделяется такой тип движения является модельная задача рассеяния для системы трех одномерных тождественных частиц. После отделения движения центра масс для относительного движения частиц получается обычная задача для уравнений на плоскости. Само по себе такое упрощение даже для быстро убывающих потенциалов еще не дает решаемой модели. Для того, чтобы ее получить, необходимо наряду с одномерностью движения воспользоваться методом потенциалов нулевого радиуса действия. Суть его формально заключается в выборе в качестве потенциалов взаимодействия частиц сингулярных обобщенных функций типа δ-функций Дирака с носителями на многообразиях, выделяемых в конфигурационном пространстве условиями совпадения координат частиц. Применение метода потенциалов нулевого радиуса действия в принципе позволяет свести многочастичные задачи потенциального рассеяния к классическим краевым задачам математической физики. Так, на его основе задача рассеяния для трех одномерных частиц была сведена к двумерной задаче дифракции плоской волны на системе экранов (В.С.Буслаев, С.П.Меркурьев, С.П.Соликов, 1979).

Следует отметить, что в шестидесятилетней истории развития метода потенциалов нулевого радиуса, начатого знаменитыми работами Э.Ферми, квантовая задача трех тел сыграла драматическую роль. Именно в связи с этой задачей, появились известные работы Ф.А.Березина, Р.А.Минлоса, Л.Д.Фаддеева, в которых, во-первых, методу была придана математическая корректная форма, а именно, форма специфического варианта теории самосопряженных расширений симметрических операторов. Во-вторых, было показано, что стандартная трехчастичная задача с парным точечным взаимодействием приводит к нефизическому гамильтониану, для которого отрицательный спектр не ограничен снизу. Последнее обстоятельство на время снизило интерес к изучению математических проблем, связанных с точечными потенциалами, однако их продолжали успешно применять в исследованиях по теории рассеяния и для построения решеточных моделей в физике твердого тела. В последние годы количество работ, посвященных как математическим вопросам, связанным с точечными потенциалами, так и их физическим приложениям быстро возрастает.

В настоящей работе в рамках метода потенциалов нулевого радиуса действия рассматриваются связанные состояния и состояния рассеяния для четырех тождественных одномерных частиц. не смотря на увеличение числа частиц, этот случай фактически не сложнее аналогичной задачи для трех частиц. Дело в том, что после отделения движения центра масс задача о связанных состояниях и рассеянии для четырех одномерных тождественных частиц сводится к детально исследованной задаче об одной частице в потенциальном поле. Единственное отклонение от обычных требований задачи одночастичного рассеяния состоит в том, что потенциал, вообще говоря, не убывает на бесконечности.

Кроме того, в случае задачи четырех тел наряду с парными взаимодействиями появляются неприводимые трехчастичные и четырехчастичные вклады в оператор взаимодействия. Если четырехчастичные взаимодействия порождают возмущения сосредоточенные вблизи начала координат в трехмерном пространстве относительных координат и могут быть сравнительно учтены с помощью точечных потенциалов, то трехчастичные взаимодействия даже в рамках метода потенциалов нулевого радиуса приводят к возмущениям, сосредоточенным на пучке пересекающихся прямых.

Парные взаимодействия нулевого радиуса применительно к задаче четырех одномерных частиц приводят к возмущениям, сосредоточенным, на шести пересекающихся плоскостях, разрезающих трехмерное пространство на двенадцать клинообразных областей. Задача рассеяния в этом случае сводится к задаче дифракции плоской волны на пересекающихся плоскостях. Все эти задачи представляются актуальными для дальнейшего развития теории рассеяния и метода потенциалов нулевого радиуса действия.

Целью работы явилось

- изучение связанных состояний и состояний рассеяния для квантовой системы из четырех тождественных одномерных частиц с учетом парных и неприводимых трехчастичных и четырехчастичных взаимодействий на модели с точечными потенциалами, сводящейся к краевым задачам для трехмерного уравнения Шредингера;
- обобщение метода потенциалов нулевого радиуса на взаимодействие, сосредоточенное на пучках прямых;
- исследование асимптотик задачи рассеяния для четырех тождественных одномерных частиц и эквивалентных задач дифракции плоской волны на пучках прямых и в клинообразных областях.

Научная новизна и практическая ценность

В работе с помощью решаемой модели, столь же простой как и в случае задачи рассеяния для трех одномерных частиц, построены решения задачи рассеяния и исследована локализация спектра связанных состояний для системы из четырех одномерных тождественных частиц. В связи с этой проблемой дано корректное определение аналога потенциала нулевого радиуса для неприводимых трехчастичных взаимодействий и парных взаимодействий в системе из четырех частиц.

Для самосопряженных операторов Шредингера в трехмерном пространстве, определяемых обычным дифференциальным выражением и специальными граничными условиями на пучке прямых или связке плоскостей, с помощью формулы М.Г.Крейна для резольвент построены функции Грина (ядра резольвент) и на этой основе исследованы связанные состояния и найдены асимптотики решений задачи рассеяния.

Полученные результаты, помимо приложений к многочисленным задачам рассеяния, практически без изменений могут быть использованы при изучении дифракции волн вблизи препятствий в виде пучка прямых и связки плоскостей.

Автор защищает:

- Разработанную решаемую модель для четырех частиц с парными, трехчастичными и четырехчастичными взаимодействиями;
- Спектральный анализ оператора Лапласа с самосопряженными граничными условиями на пучке прямых;
- Полученные асимптотики решений задачи рассеяния.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры теоретической физики ОГУ. Идеи, подходы и положения, развиваемые в диссертации, опубликованы в работе [1].

Структура и объем работы. Диссертация, общим объемом 112 страниц машинописного текста, состоит из введения и трех глав, распадающихся на одиннадцать параграфов. Список литературы включает 22 названия.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование актуальности темы, сформулирована цель работы и приведено ее краткое содержание.

В первой главе диссертации дается общая постановка обсуждаемых задач для системы четырех тождественных одномерных частиц. Уравнение Шредингера для этой системы записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_j^2} + V\,(x_1,x_2,x_3,x_4) = E\Psi \qquad (1)$$

где x_1,x_2,x_3,x_4 – координаты одномерных частиц, $V(x_1,x_2,x_3,x_4)$ – потенциал взаимодействия, удовлетворяющий условию: для любого сдвига a

$$V(x_1+a,\ x_2+a,\ x_3+a,\ x_4+a) = V(x_1,x_2,x_3,x_4) \qquad (2)$$

После введения координаты центра масс X и относительных координат ξ,η,ζ по формулам

$$X = \frac{1}{2}\,(x_1+x_2+x_3+x_4)\ ,\quad \xi = \frac{1}{2}\,(x_1+x_2-x_3-x_4)\ ,$$

$$\eta = \frac{1}{2}\,(x_1-x_2+x_3-x_4)\ ,\quad \zeta = \frac{1}{2}\,(x_1-x_2-x_3+x_4)\ ,$$

и отделения движения центра масс на плоскости X=0, волновая функция относительного движения $u(\xi,\eta,\zeta)$ удовлетворяет обычному уравнению Шредингера для движения одной трехмерной частицы, движущейся в потенциальном поле $V(\xi,\eta,\zeta)$. Если потенциал $V(\xi,\eta,\zeta)$ порожден лишь неприводимыми четырехчастичными взаимодействиями, то вполне естественным является условие:

$$\lim_{\rho\to\infty} V(\xi,\eta,\zeta) = 0\ , \qquad \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\ . \qquad (3)$$

Поскольку математическая теория одночастичных операторов Шредингера с убывающими потенциалами в настоящее время хорошо разработана, то здесь лишь остается рассмотреть некоторые известные результаты с позиций исходной четырехчастичной задачи. В частности, тут выделены комбинации волновых функций задачи рассеяния, удовлетворяющие условию симметрии относительно перестановки тождественных частиц. В качестве решаемой четырехчастичной задачи рассматривается случай связанный с известным точечным потенциалом, действие которого сводится к граничному условию

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) - h(\rho u) \right] = 0 \qquad (4)$$

где h - вещественный параметр.

<u>Вторая глава</u> диссертации посвящена более сложному случаю, когда возмущение в системе четырех тождественных одномерных частиц вносится неприводимым трехчастичными взаимодействиями, и, когда соответствующий трехчастичный потенциал отличен от нуля в малой окрестности многообразия, выделяемого условиями координат любых трех частиц. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - орты, направленные соответственно вдоль координатных осей ξ, η, ζ в пространстве относительных координат Λ. В рассматриваемом случае влияние потенциала можно учесть, подчиняя волновую функцию относительного движения $u(\xi,\eta,\zeta)$ дополнительным граничным условиям на четырех прямых $(t\vec{e}_j)$, $j=1,2,3,4$, $-\infty<t<\infty$,

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}),$$
$$\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}), \quad \vec{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}), \qquad (5)$$

Оператор Шредингера H, описывающий относительное движение, строится здесь самосопряженное расширение симметрического оператора Шредингера (фактически Лапласа), заданного на бесконечно гладких быстро убывающих функциях, обращающихся в нуль в некоторой окрестности выделенных прямых. пусть $\vec{\rho}=(\xi,\eta,\zeta)$

$$\Omega_{j,\varepsilon} = \left\{ \vec{\rho} : |\vec{\rho} - (\vec{\rho}\cdot\vec{e}_j)\vec{e}_j| > \varepsilon \right\}.$$

$W_2^2(\Omega)$ - пространство Соболева всех функций, квадратично интегрируемых вместе со всеми обобщенными вторыми частными производными на многообразии Ω. В качестве H берется расширение указанного симметрического оператора ($-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$, Δ - оператор Лапласа) на множество всех функций φ из $L^2(E_3)$, таких, что

$$1) \quad \forall\ \varepsilon > 0 \qquad \varphi \in W_2^2\Big(\bigcap_{j=1}^{4} \Omega_{j,\varepsilon}\Big); \qquad (6)$$

2) $\exists \lim\limits_{\rho_j \to 0} \dfrac{1}{\ln \rho_j} \varphi(\vec{\rho}) = A_j(\Psi)$, $\rho_j = |\vec{\rho} - (\vec{\rho}\,\vec{e}_j)\,\vec{e}_j|$, $j = 1,\dots,4$;

3) $\lim\limits_{\rho_j \to 0} \left\{ \varphi(\vec{\rho}) - \ln(\rho_j h) A_j(\varphi) \right\}$, $j = 1,\dots,4$.

где h - положительный фиксированный параметр.
Граничные условия 2), 3) в (6) являются аналогами известных условий типа (4) в двумерных и квазидвумерных задачах.

Доказательство самосопряженности оператора H получается в результате следующих построений. В соответствии с формулой М.Г.Крейна для резольвент функция Грина $G_W(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,')$ (ядро резольвенты $(H-W)^{-1}$) оператора H при невещественных значениях W ищется в виде

$$G_W(\vec{\rho},\vec{\rho}\,') = G^{\circ}_W(\vec{\rho},\vec{\rho}\,') - \sum_{i,j=1}^{4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G^{\circ}_W(\vec{\rho}, t\vec{e}_i) \cdot \tag{7}$$

$$\cdot\, \Gamma_{W,i,j}(t,t')\, G^{\circ}_W(t'\vec{e}_j,\vec{\rho}), \qquad G^{\circ}_W(\vec{\rho},\vec{\rho}\,') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{W}|\vec{\rho}-\vec{\rho}\,'|}}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'|},$$

$$\operatorname{Im} W > 0$$

в предположении, что при $\operatorname{Im} W = 0$ матрица-функция $\Gamma_{W,i,j}(t,t')$ - ядро непрерывного интегрального оператора оператора $\hat{\Gamma}_W$ в пространстве 4-компонентных вектор-функций $L^2(E_1,\mathbb{C}^4)$, такого, что $\forall \varphi \in L^2(E^3)$ функция

$$(\hat{G}_W \varphi)(\vec{\rho}) = \int_{E_3} G_W(\vec{\rho},\vec{\rho}\,')\, \varphi(\vec{\rho}\,')\, d\vec{\rho}\,'$$

удовлетворяет условиям (6).

Сначала доказывается, что для непрерывного оператора $\hat{\Gamma}_W$ функции, получающиеся в результате преобразования (8), удовлетворяют условию 1) в (6). Далее формально устанавливается, что условия 2), 3) в (6) равносильны равенству

$$\hat{\Gamma}_W = [\hat{C}_W + \hat{Q}_W]^{-1}. \tag{9}$$

где $\hat{C}_W$ - неограниченный оператор в $L^2(E_1,\mathbb{C}^4)$, переходящий при стандартном преобразовании Фурье в оператор умножения на скалярную функцию

$$q_w(k) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{w-k^2}}{2hi}e^{\gamma}, \quad \mathrm{Im}\sqrt{w-k^2} > 0, \qquad (10)$$

где γ - постоянная Эйлера, $\hat{Q}_w$- сингулярный интегральный оператор с матричным ядром

$$Q_{w,i,j}(t,t') = \frac{e^{i\sqrt{w}|t\vec{e}_i - t'\vec{e}_j|}}{4\pi\,|t\vec{e}_i - t'\vec{e}_j|}, \; i\neq j$$

$$Q_{w,i,i}(t,t') = 0.$$

Доказывается, что интегральный оператор с ядром $Q_{w,j,i}(t,t')$ $i\neq j$, ограничен в $L^2(E_1)$, причем

$$|Q_{w,ij}| \leq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{1-|(\vec{e}_i\vec{e}_j)|}} \qquad (11)$$

Далее показано, что при любых невещественных w оператор $\hat{C}_w + \hat{Q}_w$ обратим, причем при больших по модулю невещественных и отрицательных значениях w эта сумма непрерывно обратима. Из непрерывной обратимости оператора $\hat{C}_w$ всюду за исключением $w \in (-4h^2e^{-2\gamma},0)$ и леммы, согласно которой $\hat{C}_w^{-1}\hat{Q}_w$ - оператор Гильберта-Шмидта в $L^2(E_1,\mathbb{C}^4)$, $w \bar{\in} (-4h^2e^{-2\gamma},0)$, выводится, что оператор $\hat{\Gamma}_w$, определенный согласно (9) действительно непрерывен в $L^2(E_1,\mathbb{C}^4)$ по крайней мере при невещественных w.

Для любых w_1, w_2 из области аналитичности операторной функции $\hat{G}_w$, определяемой как интегральный оператор с ядром (7), в частности для любых невещественных w_1, w_2 для операторов $\hat{G}_{w_1}$, $\hat{G}_{w_2}$ справедливо тождество Гильберта. Кроме того, в этой области операторы $\hat{G}_w$ обратимы и $\hat{G}_w^{*} = \hat{G}_{\bar{w}}$. Из этих свойств и представления (7) следует, что $\hat{G}_w$ - резольвента самосопряженного оператора H, который является расширением исходного симметричного оператора на область (6).

Подпространство L_B^2 волновых функций симметричных относительно перестановок координат (ξ,η,ζ) и не меняющихся при изменении знаков у любых пар координат, то есть волновых функций относительного движения для состояний симметричных относительно перестановок исходных состояний $x_1, \ldots, x_4$, для оператора H является инвариантным. Для части H_B оператора H на L^2_B построение функции Грина согласно формуле (7) сводится к построению оператора $\tilde{\Gamma}^B_w$ в $L^2(E_1)$ обратного к оператору $\hat{\tilde{C}}_w + \hat{\tilde{Q}}_w$, где $\hat{\tilde{C}}_w$ - оператор, переходящий при преобразовании Фурье в оператор умножения на функцию (10), а $\hat{\tilde{Q}}_w$ - интегральный оператор с ядром

$$\hat{\tilde{Q}}_w(t,t') = \frac{3}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{w}\sqrt{t^2+t'^2+\frac{2}{3}tt'}}}{\sqrt{t^2+t'^2+\frac{2}{3}tt'}} .$$

Спектр оператора H_B на отрицательной полуоси составляют отрицательные значения параметра w, для которых операторная функция $\hat{\tilde{C}}_w + \hat{\tilde{Q}}_w$ не является непрерывно обратимой. Доказывается, что в интервале $(-\infty, -4h^2 \exp[\sqrt{27/8}\,(1+\sqrt{2})\pi - 2\gamma])$ у оператора H_B нет точек спектра. Несколько неожиданным оказывается то, что, как показано в работе, у оператора H_B имеется по крайней мере одно изолированное собственное значение в интервале $(-4h^2 \exp[\sqrt{27/8}\,(1+\sqrt{2})\pi - 2\gamma]$, $-4h^2\exp(-2\gamma))$. Этому собственному значению соответствует связанное состояние всех четырех частиц. Вообще же в интервале $(-\infty, -4h^2\exp(-2\gamma))$ оператор H_B может иметь только изолированные собственные значения. В то же время показано, что все точки интервала $(-h^2\exp(-2\gamma), 0)$ принадлежат спектру H_B. Им соответствуют состояния "3+1", когда три частицы образуют связанный комплекс, а четвертая может свободно удаляться от них на любые расстояния.

При положительных энергиях для операторов H и H_B рассмотрены состояния рассеяния. Следует отметить, что оператор $\hat{H}$ и соответствующий оператор $\hat{H}_0$ для невзаимодействующих частиц не являются близкими в том смысле слова как это обычно понимается в математической теории рассеяния. Однако уравнение Липмана-Швингера, с помощью которого там получаются волновые функции состояний рассеяния сохраняют смысл и здесь, и поэтому решениями задачи рассеяния по определению считаются функции, определяемые с помощью соотношения

$$\Psi(\vec{k},\vec{\rho}) = \lim_{\varepsilon\to 0} (-i\varepsilon) \int\limits_{E_3} G'_{E+i\varepsilon}(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,')\, e^{i\vec{k}\vec{\rho}\,'} d\vec{\rho}\,', \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} .$$

Показано, что для направлений волнового вектора $\vec{k}$ непараллельных ни одной из линий $t\vec{e}_j$, $j=1,\dots,4$ и при $\rho\to\infty$ вдоль любого луча непараллельного ни одной из этих линий

$$\Psi(\vec{k},\vec{\rho}) \underset{\rho\to\infty}{=} e^{i\vec{k}\vec{\rho}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi k\rho}} \sum_{j=1}^{4} \frac{e^{ik\rho\cos(\theta_j-\theta_j')}}{\sqrt{\sin\theta_j \sin\theta_j'}} \times \tag{12}$$

$$\times\left[\ln \frac{k\sin\theta_j\, e^{\gamma}}{2hi}\right]^{-1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad \cos\theta_j = \frac{1}{\rho}(\vec{\rho}\vec{e}_j),\ \cos\theta_j' = \frac{1}{k}(\vec{k}\vec{e}_j).$$

Отметим, что главный член в асимптотике рассеянной волны в (12) представляет собой сумму вкладов от рассеяния на отдельных линиях. Эффекты связанные с интерференцией волн, дают вклады порядка $1/\rho$. Волновые функции задачи рассеяния для четырех тождественных частиц получаются из (12) в результате перехода к исходным координатам и симметризации по перестановкам частиц.

В <u>третьей главе</u> диссертации рассматривается задача рассеяния для четырех одномерных частиц с точечными парными взаимодействиями. В этом случае после отделения движения центра масс влияние взаимодействия сводится к иным самосопряженным граничным условиям для оператора Шредингера (Лапласа) на шести плоскостях

$$\begin{aligned} \xi + \eta = 0, \quad \xi + \zeta = 0, \quad \eta + \zeta = 0 \\ \xi - \eta = 0, \quad \xi - \zeta = 0, \quad \eta - \zeta = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

чем те условия непрерывности, которые имеют место для свободного движения. В предельном случае сильного отталкивания волновые функции должны обращаться в нуль на поверхностях (13). В этом предельном случае фактически рассматривается оператор Лапласа с условиями Дирихле на плоскостях (13). Плоскости (13) разрезают трехмерное пространство на 12 клинообразных областей, одна из которых выделяется с помощью соотношений

$$|\xi| \le \eta \le \zeta . \tag{14}$$

При переходе к обычным сферическим координатам задача допускает разделение радиальной переменной ρ и угловых переменных θ, φ. Собственные функции для состояний с определенной энергией $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ в области (14)

$$u_n(k,\rho;\theta,\varphi) = \frac{C}{\sqrt{\rho}} J_{\nu_n}(k\rho)\, W_n(\theta,\varphi), \quad \nu_n = \sqrt{(\lambda_n + \tfrac{1}{4})},$$

где $W_n(\theta,\varphi)$ - нормированная собственная функция для угловой части оператора Лапласа в сферическом секторе

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \le \theta \le \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}},$$

с нулевыми условиями на границе, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ - соответствующая возрастающая последовательность собственных значений, $J_n(x)$ - функции Бесселя. Показано, что $\lambda_n > 6$.

Такие же решения в других областях получаются в результате преобразования угловых переменных соответствующего подходящей перестановке и замене знаков у координат ξ, η, ζ. Построена функция Грина для оператора Лапласа с условиями Дирихле на плоскостях (13). Эта функция использована для построения решения $\Psi(\vec{k},\vec{\rho})$ задачи рассеяния на основе уравнения Липмана-Швингера. При этом для $\Psi(\vec{k},\vec{\rho})$ получилась обычная асимптотика

$$\Psi(\vec{k},\vec{\rho})_{\rho\to\infty} = e^{i\vec{k}\vec{\rho}} + \frac{e^{ik\rho}}{\rho} f(\theta,\varphi) + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{15}$$

однако оказалось, что в выделенной области (14) амплитуда рассеяния отлична от нуля только тогда, когда в эту область попадает луч, соответствующий значениям угловых переменных $\pi-\theta_0$, $2\pi-\varphi_0$, где угловые переменные $\pi-\theta_0$, $2\pi-\varphi_0$ определяют направление вектора "$-\vec{k}$". Если последнее условие выполнено, то для любого направления в этой области отличающегося от "$-\vec{k}$"

$$f(\theta,\varphi) = \frac{2\pi i}{k}\sum_{n=1}^{\infty} W_n(\theta,\varphi)\, W_n(\pi-\theta_0, 2\pi-\varphi_0)(e^{2i\delta_{\nu_n}} - 1), \tag{16}$$

$$2i\delta_{\nu_n} = -\sqrt{(\lambda_n + \tfrac{1}{4})}\,\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Решение задачи рассеяния, удовлетворяющее условию симметрии относительно перестановки тождественных частиц, получается в результате симметризации выражений (15), (16) по перестановкам компонент и замене знаков у любых пар компонент вектора "$\vec{k}$".

Все построения, проведенные в случае условий Дирихле, повторены и для условий Неймана на плоскостях (13). Единственное, но существенное отличие этого случая от предыдущего состоит в том, что здесь необходимо дополнительно вводить граничное условие в начале координат - точке пересечения плоскостей (13), то есть, вводить дополнительное условие вида (2) в начале координат. При этом может возникнуть связанное состояние, а амплитуда рассеяния есть сумма постоянного слагаемого вида 1/n - ik и слагаемого с такой же структурой и свойствами, что и (15).

Основные результаты диссертации опубликованы в работе

1. *Махмуд Али* Рассеяние для четырех тождественных одномерных частиц. Деп.N 1641-Ук91 (1991), 21 с.