АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ПОДЛИПЕНКО Юрій Костянтинович

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ В ДЕЯКИХ ОБЛАСТЯХ ІЗ НЕКОМПАКТНИМИ ГРАНИЦЯМИ

Спеціальність 01.01.03 - математична фізика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1993

Робота виконана в Київському університеті імені Тараса Шевченка

Офіційні опоненти: член-кореспондент РАН, доктор фізико-математичних наук, професор КУДРЯВЦЕВ Л.Д., доктор фізико-математичних наук, професор ШЕСТОПАЛОВ Ю.В., доктор фізико-математичних наук КОЧУБЕЙ А.Н.

Провідна установа : Інститут прикладних проблем механіки і математики АН України

Захист відбудеться "_____"____________1993р о___ годині на засіданні спеціалізованої ради Д016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601 Київ-4, вул.Терещенківська,3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту

Автореферат розіслано "____".____________1993р.

Вчений секретар спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню крайових задач дифракції в деяких областях із нескінченними границями. Розв'язання цих задач становить значний теоретичний інтерес і має велике прикладне значення. У важливому випадку усталених коливних процесів такі задачі безпосередньо зводяться до відповідних крайових задач для рівняння Гельмгольца. Це рівняння є після рівняння Лапласа найпростішим і разом з тим найбільш важливим рівнянням математичної фізики.

Зусиллями Зоммерфельда, В.Д.Купрадзе, І.Н.Векуа, А.Н.Тихонова, Вейля, Вернера та ін. побудована закінчена теорія крайових задач для рівняння Гельмгольца у необмежених областях із компактними границями (зовнішніх крайових задач).

Д.М.Єйдус, А.Я.Повзнер, Б.Р.Вайнберг, Като, В.В.Грушин, В.А. Марченко, Є.Я. Хруслов, О.А. Ладиженська та ін. розглядали також у таких областях крайові задачі для більш загальних еліптичних диференціальних операторів.

Дослідження крайових задач із некомпактними границями є принципово більш складними. Тут існує лише ряд окремих результатів. До цієї тематики відносяться роботи О.Г. Свешнікова (шар між двома паралельними площинами і нескінченний циліндр), Джоунса, Релліха і Д.М.Ейдуса(випадок, коли нескінченна частина області є циліндром), А.С.Ільїнського, Ю.В.Шестопалова, А.М.Тихонова, А.О.Самарського, А.Г. Рамма та ін. Цикл робіт у цьому напрямку виконаний німецькими математиками Вернером . Моргенройтером.

Враховуючи сказане вище, велике значення набуває завдання побудови теорії крайових задач дифракції у шарі, клині та плоскій кутовій області, які, крім суто теоретичного інтересу, мають важливе застосування в прикладних задачах гідроакустики і електродинаміки.

Мета роботи. Побудова закінченої теорії крайових задач дифракції у шарі, клині та плоскій кутовій області.

Методика дослідження. В роботі використані методи теорії інтегральних рівнянь, спектральної теорії операторів, теорії спеціальних функцій, а також методи загальної теорії рівнянь з частинними похідними та асимптотичні методи аналізу.

Наукова новизна. В роботі одержані наступні основні результати :

- вивчена структура спектрів крайових задач дифракції у шарі , в клині та плоскій кутовій області;
- доведені теореми існування та єдиності розв'язків крайових задач дифракції в названих областях і обгрунтовані принципи граничного поглинання;
- розвинута теорія потенціалу, за допомогою якої вказані крайові задачі зведені до інтегральних рівнянь Фредгольма; доведено існування та єдиність розв'язку останніх.

Теоретична і практична значимість. Теоретична значимість роботи полягає в побудові закінченої математичної теорії дифракції в шарі, в клині та плоскій кутовій області. Конструктивний характер використовуваних методів дозволяє на базі одержаних результатів досить просто будувати ефективні алгоритми розв'язування складних прикладних задач гідроакустики і електродинаміки.

Апробація роботи. Результати дисертації неодноразово доповідались і обговорювались на семінарах фізичного факультету МДУ(наук. кер. О.Г.Свешніков і А.С.Ільїнський), факультету обчислювальної математики і кібернетики МДУ (наук. кер. Ю.В.Шестопалов), на семінарі Математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур (м.Харків, наук.кер. Є.Я.Хруслов), на семінарі Інституту прикладних проблем механіки і математики АН України (м.Львів, наук. кер. М.М.Войтович), на семінарах Інституту математики АН України (наукові керівники М.Л. Горбачук, В.К.Дзядик, І.О.Луковський, Ю.О.Митропольський), Міжвузівському науковому семінарі "Крайові задачі математичної фізики" (м.Київ, наук.кер. Н.О.Вірченко), на семінарі факультету кібернетики Київського університету (наук. кер. В.М.Бублик і О.Г.Наконечний) на Всесоюзній конференції "Численные методы в современных волновых задачах акустики" (м.Москва, 1988, Акустичний інститут), на XX Далекосхідній математичній школі-семінарі з проблем математичного моделювання і чисельного аналізу (м. Находка, 1992), на Республіканських науково-технічних конференціях "Интегральные уравнения в прикладном моделировании" (м. Київ, 1983, 1986), на Всесоюзній науково-технічній конференції "Актуальные проблемы моделирования и управления системами с распределенными параметрами" (м.Одеса, 1987).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 14 робіт, список яких наведений в кінці автореферату.

Структура і об'єм роботи. Робота складається із вступу, трьох глав і списку цитованої літератури. Об'єм роботи 223 сторінки машинопису.

ОГЛЯД ЗМІСТУ ДИСЕРТАЦІЇ

В першій главі вивчаються крайові задачі, що виникають при дослідженні дифракції акустичних хвиль на перешкоді, яка міститься усередині шару між двома паралельними площинами.

Постановка задач. Введемо в R^3 циліндричну систему координат r,φ,z .Нехай $\Omega:=\{(r,\varphi,z)\in R^3 \mid r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ -h<z<0\}$-шар між двома паралельними площинами $S_1:=\{(r,\varphi,z)\in R^3 \mid r\geq 0, 0\leq\varphi\leq 2\pi, z=0\}$ і $S_2:=\{(r,\varphi,z)\in R^3 \mid r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ z=-h\}$, D-обмежена відкрита область з границею ∂D, яка складається із скінченного числа неперетинних замкнених поверхонь, класу C^2, така, що $\bar{D}\subset\Omega$ і область $\Omega\setminus\bar{D}$ зв'язна. Покладемо $\Omega_R:=\{(r,\varphi,z)\in\Omega \mid 0\leq r<R\}$-прямий круговий циліндр радіуса R і висоти h, причому R вибрано так, що має місце включення $\bar{D}\subset\Omega_R$.

Означення. Через $\mathfrak{M}$ позначимо лінійний простір комплекснозначних функцій $u\in C^2(\Omega\setminus\bar{D})\cap C^1(\bar{\Omega}\setminus\bar{D})\cap C(\bar{\Omega}\setminus D)$, для яких у будь-якій точці $P\in\partial D$ існує рівномірна по P границя

$$\partial u(P)/\partial \nu_p = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (\vec{\nu}_p, \operatorname{grad} u(p+h\nu_p)), \qquad (\mathrm{I})$$

де $\vec{\nu}_p$ - одинична зовнішня нормаль до ∂D в точці P.

Означення.

Через $\mathfrak{M}'$ позначимо клас функцій $u \in C^2(\Omega\setminus\bar{D})\cap C^1(\bar{\Omega}\setminus\ )\cap C(\bar{\Omega}\setminus D)$.

Задача I.I. Знайти функцію $u \in \mathfrak{M}'$, що задовольняє в $\Omega\setminus\bar{D}$ рівняння Гельмгольца

$$\Delta u(r,\varphi,z) + k^2 u(r,\varphi,z) = 0, \quad Im\, k \geqslant 0, \qquad (2)$$

де

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

граничні умови

$$u\big|_{\pi_1} = 0, \qquad (3)$$

$$\partial u/\partial \nu\big|_{\pi_2} = 0, \qquad (4)$$

$$u\big|_{\partial D} = f, \qquad (5)$$

де f - задана неперервна функція на ∂D, умову обмеженості $u=O(1)$ в $\Omega\setminus\bar{D}$ і при $k > \pi/2h$ парціальні умови випромінювання Свешнікова на нескінченності:

$$u_m(r,\varphi) = O(r^{-1/2}), \quad r \to \infty, \qquad (6)$$

$$\partial u_m(r,\varphi)/\partial r - i\mu_m u_m(r,\varphi) = o(r^{-1/2}), \quad r \to \infty, \qquad (7)$$

$$m = 0,1,\dots,\ p = E(kh/\pi - 1/2),$$

рівномірно по φ, де $u_m(r,\varphi)$- коефіцієнти Фур'є розкладу функції

$$u(r,\varphi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(r,\varphi)\sin(\gamma_m z)$$

по повній в $L_2(-h,0)$ системі $\{ \sin(\gamma_m z) \}_{m=0}^{\infty}$ при $r \geq R_0$,

$\gamma_m=(2m+1)\pi/2h$, $\mu_m=\sqrt{k^2-\gamma_m^2}$ (вітка кореня вибирається так, щоб $Im\,\mu_m>0$; якщо $Im\,\mu_m=0$, то $Re\,\mu_m>0$), $E(x)$- ціла частина дійсного числа x .

Задача 2.I. Знайти функцію $u \in \mathfrak{M}$, що задовольняє (2)-(4), (6),(7) і граничну умову

$$\partial u/\partial \nu = g \ \text{ на } \partial D, \tag{8}$$

де g - задана неперервна функція на ∂D.

Задача .I. Знайти функцію $u \in \mathfrak{M}$, що задовольняє (2)-(4), (6),(7) і граничну умову

$$\partial u/\partial \nu + \lambda u = g \ \text{ на } \partial D, \tag{9}$$

де λ і g - задані неперервні функції на ∂D.

З фізичної точки зору функція $u(r,\varphi,z)$ має смисл потенціалу швидкостей в задачах дифракції звуку на обмеженому тілі D, яке міститься у хвилеводі Ω (в усталеному режимі). При цьому $k^2 = \omega(\omega+i\gamma)/c^2$- хвильове число, $\lambda = i\rho\chi(\omega+i\gamma)$, де ω- частота, ρ - щільність середовища, що заповнює област $\Omega\setminus\bar{D}$, c- швидкість розповсюдження звуку, γ - коефіцієнт поглинання, χ - акустичний імпеданс перешкоди D. Задання величини u на межі ∂D перешкоди відповідає заданню тиску акустичної хвилі. Аналогічно ,задання нормальної похідної u на границі відповідає заданню нормальної компоненти швидкості хвилі. Крайові умови (3) і (4) виражають той факт, що поверхня S_1 шару Ω акустично м'яка , а поверхня S_2 акустично тверда. Умова обмеженості розв'язку і умови випромінювання (6) і (7) виключають хвилі, які приходять із нескінченності (розглядається хвильовий процес, що залежить від часу по закону $exp\ (-i\omega t)$).

Формулювання основних результатів. Більш детально зупинимось на основних ідеях і результатах розв'язання задачі I.I (результати, що стосуються задач 2.I, 3.I, аналогічні). Дослідження проводяться за наступним планом. Спочатку вивчається структура спектра оператора, що відповідає крайовій задачі I.I і на цій основі встановлюються теореми єдиності. Далі з використанням функції Гріна $G_k(M,P)$ для шару Ω вводяться потенціали простого і подвійного шару, за допомогою яких розв'язування початкової крайової задачі зводиться до розв'язання деяких інтегральних рівнянь Фредгольма на границі ∂D області D. Знайдені умови існування розв'язку задачі I.I і відповідних їй інтегральних рівнянь.

Позначимо через A самоспряжений оператор, заданий рівністю $Au = -\Delta u$ з областю визначення

$$D(A) = \{u \in W_2^{(1)}(\Omega\backslash\bar{D}) \mid -\Delta u \in L_2(\Omega\backslash\bar{D}),\ u|_{S_1\cup\partial D} = 0,\ \partial u/\partial\nu|_{S_2} = 0\},$$

де оператор $-\Delta$ слід розуміти у сенсі теорії розподілу, $u|_{S_1\cup\partial D}$ і $\partial u/\partial\nu|_{S_2}$ - сліди функції та її нормальної похідної відповідно на $S_1\cup\partial D$ і S_2. Через $W_2^{(l)}(G)$ позначений простір функцій, які мають в області G квадратично інтегровні узагальнені похідні до порядку l включно.

В § 4 доведено такий результат (тут і далі до номерів тверджень додається номер глави).

Теорема I.4.4. Спектр оператора A, розташований на додатній півосі $(0,\infty)$. Частина спектра, яка розташована ліворуч точки γ_0^2, дискретна, тобто складається із скінченного числа власних значень скінченної кратності. Частина спектра, що розташована на кожному з інтервалів (γ_0^2, γ_1^2), (γ_1^2, γ_2^2)..., неперервна в усіх точках цих інтервалів з можливим виключенням на будь-якому з них скінченного числа власних значень скінченної кратності.

Накладемо тепер на область D деякі додаткові обмеження. Назвемо область $D\subset\Omega$ правильною, якщо для будь-якої точки $P\in\partial D$ виконується нерівність $\cos(\hat{\vec{\nu},\vec{r}})\le 0$, де $\vec{\nu}$ - внутрішня по відношенню до D одинична нормаль до ∂D в точці $P(x,y,z)$, $\vec{r}=(x,y,0)$-

проекція радіуса-вектора точки P на площину $z=0$, $(\hat{\vec{\nu},\vec{r}})$ - кут між векторами $\vec{\nu}$ і $\vec{r}$. Прикладами правильних областей можуть служити сфера, еліпсоїд, опуклі поверхні обертання та ін. У цьому частинному випадку попередній результат уточнюється.

<u>Теорема I.5.6</u>. Нехай D - правильна область. Тоді оператор A не має власних значень.

Аналогічний результат для правильних областей незалежно іншим способом одержано Вернером (у Вернера гранична умова на S_2: $u=0$).

Позначимо через $\mathcal{A}$ множину всіх точок неперервності спектральної функції оператора A , які не співпадають з жодною із точок γ_k^2, $k=0,1...$.Із теореми I.4.4 випливає, що множина $\mathcal{A}$ складається із об'єднання інтервалів $(-\infty, \gamma_0^2)$, (γ_0^2, γ_1^2), (γ_1^2, γ_2^2), ... з можливим виключенням на будь-якому з них скінченного числа точок - власних значень оператора A .

<u>Теорема I.5.2.</u> Нехай $k^2 \in \mathcal{A}$. Тоді крайова задача I.I має не більше одного розв'язку.

<u>Теорема I.5.5.</u> Нехай D - правильна область. Тоді твердження теореми I.5. має місце при всіх додатних значеннях k , які не співпадають з жодним з чисел γ_p, $p=0,1,...$.

У випадку комплексних значень хвильового числа k має місце наступний результат.

<u>Теорема I.2.2.</u> Нехай $Im\ k>0$. Тоді крайові задачі I.I. і 2.I мають не більше одного розв'язку. Задача 3.I має не більше одного розв'язку, якщо $Im\ (\bar{k}\lambda)\geq 0$ на ∂D.

Далі, спираючись на теореми єдиності I.5.2, I.5.5 і I.2.2 і використовуючи апарат інтегральних рівнянь, досліджена розв'язність крайових задач. З цією метою у розглядуваному випадку будується теорія потенціала.

Покладемо

$$G_k(M,P) = i/2h \sum_{m=0}^{\infty} \sin(\gamma_m z_M)\sin(\gamma_m z_P) H_0^{(1)} [\mu_m (r_M^2 + r_P^2 - 2r_M r_P \cos(\varphi_M - \varphi_P))^{1/2}]$$

$$M, P \in \bar{\Omega},\ M \neq P, \tag{10}$$

де $H_0^{(1)}(z)$- функція Ганкеля першого роду, або в еквівалентній формі

$$G_k(M,P)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\left\{\frac{e^{ik[r_M^2+r_P^2-2r_Mr_P\cos(\varphi_M-\varphi_P)+(z_M-z_P-2nh)^2]^{1/2}}}{[r_M^2+r_P^2-2r_Mr_P\cos(\varphi_M-\varphi_P)+(z_M-z_P-2nh)^2]^{1/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{ik[r_M^2+r_P^2-2r_Mr_P\cos(\varphi_M-\varphi_P)+(z_M+z_P-2nh)^2]^{1/2}}}{[r_M^2+r_P^2-2r_Mr_P\cos(\varphi_M-\varphi_P)+(z_M+z_P-2nh)^2]^{1/2}}\right\}. \qquad (10)$$

Нехай задані функції ϕ, $\varphi \in C\,(\partial D)$, тоді функцію

$$v(M)=\int\limits_{\partial D}G_k(M,P)\,\phi(P)\,dS_P \qquad M\in\Omega\setminus\partial D \qquad (11)$$

будемо називати потенціалом простого шару з щільністю ϕ, а функцію

$$u(M)=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial G_k(M,P)}{\partial\nu_P}\,\varphi(P)\,dS_P\ , \quad M\in\Omega\setminus\partial D, \qquad (12)$$

потенціалом подвійного шару з щільністю φ.

Потенціали (11) і (12) задовольняють в області $\Omega\setminus\bar D$ рівняння (2), крайові умови (3), (4), умови обмеженості в $\Omega\setminus\bar D$ і умови Свешнікова (6), (7) і мають звичайні граничні властивості гармонічних потенціалів.

Визначимо в $C(\partial D)$ інтегральні оператори K і S за формулами

$$K\phi(M)=2\int\limits_{\partial D}\frac{\partial G_k(M,P)}{\partial\nu_P}\,\phi(P)\,dS_P\ , \quad M\in\partial D,$$

$$S\varphi(M)=2\int\limits_{\partial D}G_k(M,P)\,\varphi(P)\,dS_P \qquad M\in\partial D\ .$$

Із використанням властивостей потенціалів простого і подвійного шару встановлені результати про зведення крайових задач до інтегральних рівнянь Фредгольма. Сформулюємо деякі з них.

Твердження I.6.I. Лінійна комбінація потенціалів

$$u(M) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial G_k(M,P)}{\partial \nu_P} - i\eta\, G_k(M,P) \right\} \phi(P)\, dS_P \quad , \quad M \in \Gamma \setminus \bar{D},$$

простого і подвійного шару з неперервною щільністю ϕ є розв'язком задачі I.I в $\Omega \setminus \bar{D}$, якщо ϕ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\phi + K\phi - i\eta S\phi = 2f \;. \tag{I3}$$

Теорема I.6.2. Нехай $\eta \neq 0$ і нехай $k^2 \in \mathcal{A}$; тоді інтегральне рівняння (I3) для крайової задачі I.I однозначно розв'язне при будь-якій правій частині $f \in C\,(\partial D)$.

Із твердження I.6.I і теорем I.6.2 і I.5.2 безпосередньо випливає наступний результат.

Теорема I.6.3. Нехай $k^2 \in \mathcal{A}$. Тоді крайова задача I.6.I однозначно розв'язна .

Теорема I.6.4. Нехай D - правильна область. Тоді твердження теореми I.6.2 вірне при всіх значеннях k, що не співпадають з жодним із чисел γ_p, $p=0,1,2,\ldots$.

Із твердження I.6.I і теорем I.5.5 і .6.4 випливає такий результат.

Теорема I.6.5. Нехай D - правильна область. Тоді твердження теореми I.6.3 вірне при всіх значеннях k, що не співпадають з жодним із чисел γ_p, $p=0,1,2,\ldots$.

Відзначимо, що якщо відомі власні значення λ_i, $i=1,2,\ldots$ ($0<\lambda_1<\lambda_2\leq\ldots$, $\lambda_k \longrightarrow \infty$, $k \longrightarrow \infty$) наступної внутрішньої задачі Неймана:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \qquad \text{в} \quad \Gamma, \tag{I4}$$

$$\partial u/\partial \nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial D, \quad u \in \mathfrak{R}\,(D) \tag{15}$$

(через $\mathfrak{R}\,(D)$ позначено лінійний простір комплекснозначних функцій $u \in C^2(D)\cap C(\bar{D})$, для яких нормальна похідна на межі області D існує в тому розумінні, що границя (1), в якій $\vec{\nu}_P$ – одинична внутрішня по відношенню до області D нормаль в точці $P \in \partial D$, існує рівномірно на ∂D), то можна отримати більш просте, ніж (3), однозначно розв'язне інтегральне рівняння для крайової задачі 1.1. З цією метою розв'язок задачі 1.1 шукається у вигляді потенціалу подвійного шару (12). Тоді функція $u(M)$, що визначається цим співвідношенням, є розв'язком задачі 1.1 при умові, що щільність φ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\varphi + K\varphi = 2f. \tag{16}$$

Теорема 1.6.8. Нехай $k^2 \in A$ і не є власним значенням внутрішньої задачі Неймана (14), (15). Тоді інтегральне рівняння (16) для крайової задачі 1.1 має єдиний розв'язок при будь-якій правій частині $f \in C(\partial D)$.

Для правильних областей D цей результат допускає уточнення.

Теорема 1.6.9. Нехай D – правильна область. Тоді при будь-якому додатному k, яке не співпадає з жодним із чисел γ_p, $p=0,1,\ldots$ і такому, що k^2 не є власним значенням внутрішньої задачі Неймана (14), (15), інтегральне рівняння (16) має єдиний розв'язок при будь-якій правій частині $f \in C(\partial D)$.

Результати, аналогічні теоремам 1.6.3 і 1.6.8, мають місце також у випадку, коли $\mathrm{Im}\, k>0$ (див. теорему 3.10 і наслідок 3.7).

Інтегральні рівняння для крайової задачі 1.1, спряжені до рівнянь (16) і (13), можуть бути одержані також, виходячи з інтегрального представлення розв'язку, яке установлюється в наступному твердженні.

Твердження 1.6.10. Нехай $u \in \mathfrak{R}$ є розв'язком рівняння Гельмгольца (2) в $\Omega\setminus\bar{D}$, який обмежений у цій області і задовольняє граничні умови (3), (4) і умови випромінювання (6), (7). Тоді

$$\int\limits_{\partial D} \left\{ u(P)\frac{\partial G_k(M,P)}{\partial \nu_p} - \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_p} G_k(M,P) \right\} dS_p = \begin{cases} 0, & M\in D, \\ u(M), & M\in \Omega\setminus\bar{D}. \end{cases}$$

Аналогічний результат має місце у випадку $Im\ k > 0$.

У важливому частинному випадку, коли ∂D є поверхнею обертання деякого контура навколо осі OZ, розв'язування одержаних інтегральних рівнянь зводиться до послідовного розв'язання одновимірних інтегральних рівнянь відносно гармонік ряду Фур'є по кутовій координаті шуканих щільностей потенціалів простого або подвійного шару (див. § 8).

Зазначимо, що ще одним способом вилучання розв'язку у випадку $Im\ k = 0$ є принцип граничного поглинання.

Теорема I.7.I (принцип граничного поглинання). Нехай $k^2 \in A$. Тоді розв'язок u_ε рівняння

$$\Delta u_\varepsilon + (k^2 + i\varepsilon)u_\varepsilon = 0 \qquad (\varepsilon > 0),$$

що задовольняє граничні умови (3)-(5), умову $u_\varepsilon = O(1)$ в $\Omega\setminus\bar{D}$ при $\varepsilon \to +0$ прямує до розв'язку u задачі I.I в такому розумінні: $u_\varepsilon \to u$ в будь-якій області $\Omega_p\setminus\bar{D}$ в метриці простору $W_2^{(1)}(\Omega_p\setminus\bar{D})$; $u_\varepsilon \to u$ в будь-якій скінченній внутрішній підобласті ω із $\Omega\setminus\bar{D}$ в метриці $W_2^{(2)}(\omega)$. Крім того, $u_\varepsilon \to u$ рівномірно в будь-якій внутрішній підобласті $\Omega\setminus\bar{D}$.

Для правильних областей має місце таке уточнення попереднього результату.

Теорема I.7.2. Нехай D - правильна область. Тоді твердження теореми I.7.I вірне при всіх додатних значеннях k, що не співпадають з жодним із чисел γ_p, $p=0,1,2,\ldots$.

На закінчення відмітимо, що дослідження першої глави мають конструктивний характер, так що на їх базі можлива побудова ефективних чисельних алгоритмів (один такий приклад - прискорення збіжності ряду (I0'), таке, що його залишок є $O(n^{-r})\ \forall r \in N$ (див. формули (9.9), (9.I0)); другий приклад- застосування ефективного апроксимаційно-ітеративного методу , який був запропонований В.К.Дзядиком, до розв'язування вказаних вище інтегральних рівнянь

У другій главі розглядаються граничні задачі, які описують дифракцію акустичних хвиль на перешкодах, що розташовані усередині трьохвимірного клину. Цей випадок відрізняється від випадку розглянутого у попередній главі наявністю ребра на границі області та виглядом умови випромінювання. Зазначимо, що в ряді важливих гідроакустичних задач клин моделює прибережну зону океану.

Постановка задач. Введемо в R^3 сферичну систему координат r, θ, φ і позначимо через $\Omega=\{(r,\theta,\varphi)\in R^3 | r>0,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<\Phi\}$ клин з кутом розхилу Φ, $0<\Phi<2\pi$; його границю позначимо через $\partial\Omega$. Нехай D-обмежена відкрита область з границею ∂D, яка складається із скінченного числа неперетинних замкнених поверхонь класу C^2, така, що $\bar{D}\subset\Omega$ і область $\Omega\setminus\bar{D}$ зв'язна. Через $\mathfrak{M}$ позначимо лінійний простір комплекснозначних функцій $u\in C^2(\Omega\setminus\bar{D})\cap C(\bar{\Omega}\setminus D)$, які мають на ∂D правильну нормальну похідну (див. (I))

Задача I.2. Визначити функцію $u\in C^2(\Omega\setminus\bar{D})\cap C(\bar{\Omega}\setminus D)$, яка задовольняє в $\Omega\setminus\bar{D}$ рівняння Гельмгольца

$$\Delta u(r,\theta,\varphi) + k^2 u(r,\theta,\varphi) = 0\ ,\ Im\,k \geq 0, \tag{17}$$

умову обмеженості $u=O(1)$ в $\Omega\setminus\bar{D}$ при $Im\,k>0$, а у випадку, коли $Im\,k=0$ - умову випромінювання Зоммерфельда на нескінченності

$$\partial u(r,\theta,\varphi)/\partial r - iku(r,\theta,\varphi) = o(r^{-1}),\quad r\longrightarrow\infty, \tag{18}$$

рівномірно по θ і φ, умову на ребрі

$$\iint\limits_{\Omega\cap\delta}\left(|u|^2 + |grad\ u|^2\right)dV < \infty \tag{19}$$

і граничні умови

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0\ , \tag{20}$$

$$u\Big|_{\partial D} = f\ . \tag{21}$$

Тут Δ-оператор Лапласа в сферичних координатах, $k=const$ - хвильове число, f - задана неперервна функція на ∂D, δ - деякий окіл довільної точки ребра клину.

Задача 2.2. Визначити функцію $u \in \mathfrak{R}$, що задовольняє (17)-(20) і граничну умову

$$\partial u/\partial \nu \Big|_{\partial D} = g \; , \tag{22}$$

де g - задана неперервна функція на ∂D (тут і далі ν - одинична нормаль до ∂D , яка направлена поза областю D).

Задача 3.2. Визначити функцію $u \in \mathfrak{R}$, що задовольняє (17)-(20) і граничну умову

$$(\partial u/\partial \nu + \lambda u)\Big|_{\partial D} = g \; ,$$

де g і λ - задані неперервні функції на ∂D.

Істотню роль в викладаємій теорії грає функція, яка визначена співвідношенням

$$G_k(M,N) = ik/\Phi \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\gamma_m \varphi_M) \sin(\gamma_m \varphi_N) \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+\gamma_m)+1]\Gamma(n+2\gamma_m+1)(n!)^{-1} \times$$

$$P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(\cos\theta_M)\, P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(\cos\theta_N) J_{n+\gamma_m}(kr_<)\, h_{n+\gamma_m}^{(1)}(kr_>), \tag{23}$$

де $M = (r_M, \theta_M, \varphi_M) \in \bar{\Omega}$, $N = (r_N, \theta_N, \varphi_N) \in \bar{\Omega}$, $M \neq N$, $P_\mu^\nu(x)$ - приєднані функції Лежандра, $J_\nu(x)$-сферичні функції Бесселя $h_\nu^{(1)}(x)$-сферичні функції Ганкеля першого роду, $\gamma_m = m\pi/\Phi$, $r_> = \max(r_M, r_N)$, $r_< = \min(r_M, r_N)$.

Введемо потенціали простого і подвійного шару. Нехай задані функції φ і $\phi \in C(\partial D)$; тоді функцію

$$u(M) = \int\limits_{\partial D} G_k(M,N)\,\varphi(N)\,dS_N, \quad M \in \Omega\setminus\bar{D}, \tag{24}$$

будемо називати потенціалом простого шару з щільністю φ, а функцію

$$v(M) = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial G_k(M,N)}{\partial \nu_N}\,\phi(N)\,dS_N\,, \quad M \in \Omega\setminus\bar{D}, \tag{25}$$

- потенціалом подвійного шару з щільністю $\phi(N)$.

Функції (24) і (25) задовольняють рівняння (17) і граничну умову (20).

Теорема 2.2.1. Функції $G_k(M,N)$, $\dfrac{\partial G_k(M,N)}{\partial \nu_N}$, $N \in \partial D$ і потенціали простого і подвійного шару, які визначаються співвідношеннями (24) і (25) відповідно , задовольняють умову випромінювання Зоммерфельда (18) і умову на ребрі (19). Мають місце також асимптотичні оцінки

$$G_k(M,N) = O(r_M^{-1}), \qquad \frac{\partial G_k(M,N)}{\partial \nu_N} = O(r_M^{-1}),\ r_M \to \infty,$$

рівномірно по $0<\theta_M<\pi$, $0<\varphi_M<\Phi$.

Для формулювання теорем існування введемо деякі інтегральні оператори і наведемо результати про зв'язок розв'язків крайових задач 1.2 - 3.2 і відповідних їм інтегральних рівнянь.

Нехай K, K', S : $C(\partial D) \to C(\partial D)$ оператори виду

$$K\phi(M) = 2\int\limits_{\partial D} \frac{\partial G_k(M,N)}{\partial \nu_N}\,\phi(N)\,dS_N\,, \quad M \in \partial D,$$

$$K'\varphi(M) = 2\int\limits_{\partial D} \frac{\partial G_k(M,N)}{\partial \nu_M}\, \varphi(N)\, dS_N \ , \quad M \in \partial D,$$

$$S\varphi(M) = 2\int\limits_{\partial D} G_k(M,N)\, \varphi(N)\, dS_N \qquad M \in \partial D \ .$$

Твердження 2.4.1. Потенціал подвійного шару (25)з неперервною щільністю ϕ є розв'язком задачі 1.2 в $\Omega\backslash\bar{D}$, якщо ϕ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\phi + K\phi = 2f \ . \tag{26}$$

Твердження 2.4.2. Потенціал простого шару (24)з неперервною щільністю φ є розв'язком задачі 2.2 в $\Omega\backslash\bar{D}$, якщо φ задовольняє інтегральне рівняння

$$\varphi - K'\varphi = -2g \ . \tag{27}$$

Твердження 2.4.3. Потенціал простого шару (24)з неперервною щільністю φ є розв'язком задачі 3.2 в $\Omega\backslash\bar{D}$, якщо φ задовольняє інтегральному рівнянню

$$\varphi - K'\varphi - \lambda S\varphi = -2g \ . \tag{28}$$

Теорема 2.4.1. Інтегральне рівняння (26) для неоднорідної крайової задачі 1.2 однозначно розв'язне при будь-якій правій частині f тоді і тільки тоді, коли число k^2 не співпадає з жодним із власних значень μ_n, $n=1,2,...$ наступної внутрішньої задачі Неймана:

$$\Delta u + \mu u = 0 \quad \text{в } D\,,\ \partial u/\partial \nu \Big|_{\partial D} = 0,\ u \in \mathfrak{R}(D).$$

Теорема 2.4.10. Інтегральне рівняння (27) для неоднорідної крайової задачі 2.2 має єдиний розв'язок при будь-якій правій частині g тоді і тільки тоді, коли число k^2 не співпадає з жодним із власних значень μ_n, $n=1,2,\ldots$, наступної внутрішньої задачі Діріхле:

$$\Delta u + \mu u = 0 \quad \text{в } D\,,\ u \Big|_{\partial D} = 0\,. \tag{29}$$

Теорема 2.4.9. Якщо виконується умова $Im\, k \geqslant 0$, то інтегральне рівняння (28) для неоднорідної крайової задачі 3.2 має єдиний розв'язок при будь-якій правій частині g тоді і тільки тоді, коли число k^2 не співпадає з жодним із власних значень μ_n, $n=1,2,\ldots$, внутрішньої задачі Діріхле (29).

Зазначимо, що лінійна комбінація потенціалів

$$u(M) = \int\limits_{\partial D} \left\{ \frac{\partial G_k(M,N)}{\partial \nu_N} - i\eta\, G_k(M,N) \right\} \phi(N)\, dS_N \quad , \quad M \in \Omega \setminus \bar{D},$$

простого і подвійного шару з неперервною щільністю ϕ є розв'язком задачі 1.2 в $\Omega \setminus \bar{D}$, якщо ϕ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\phi + K\phi - i\eta S\phi = 2f\,. \tag{30}$$

Теорема 2.4.16. Нехай η довільне додатне число. Тоді інтегральне рівняння (30) для крайової задачі 1.2 має єдиний розв'язок для всіх значень k, що задовольняють умову $Im\, k \geqslant 0$.

Зміст теорем 4.14, 4.15 і 4.19 сформулюємо у вигляді наступного твердження: крайові задачі I.2 і 2.2 розв'язні і при тому єдиним чином; крайова задача 3.2 однозначно розв'язна, якщо виконується умова $Im\ (k\lambda) \geqslant 0$ на ∂D.

Покладемо

$$\Omega_\rho := \{(r,\theta,\varphi) \in \Omega \mid r<\rho\}$$

Теорема 2.6.I (принцип граничного поглинання). Нехай $Im\ k = 0$. Тоді розв'язок u_ε рівняння

$$\Delta u_\varepsilon + (k^2 + i\varepsilon)u_\varepsilon = 0 \qquad (\varepsilon>0),$$

що задовольняє граничні умови (20)-(2I), умову на ребрі (I9) і умову $u_\varepsilon = O(1)$ в $\Omega\setminus\bar{D}$ при $\varepsilon \to +0$ прямує до розв'язку u задачі I.2 в такому розумінні: $u_\varepsilon \to u$ в будь-якій області $\Omega_\rho\setminus\bar{D}$ в метриці простору $W_2^{(1)}(\Omega_\rho\setminus\bar{D})$; $u_\varepsilon \to u$ в будь-якій скінченній внутрішній підобласті ω із $\Omega\setminus\bar{D}$ в метриці $W_2^{(2)}(\omega)$. Крім того, $u_\varepsilon \to u$ рівномірно в будь-якій внутрішній підобласті $\Omega\setminus\bar{D}$.

Зазначимо, що доведення принципу граничного поглинання є нетривіальним лише у випадку, коли $Im\ k = 0$ через те, що в цьому випадку (згідно з теоремою 2.5.3) спектр самоспряженого оператора, що відповідає, наприклад, крайовій задачі I.2, заповнює піввісь $[0,+\infty)$ та чисто неперервний на ній (в той час, як у випадку $Im\ k > 0$, $\lambda = k^2$ - регулярна точка цього оператора). Аналогічні теоремі 2.6.I твердження мають місце також для крайових задач 2.2 і 3.2.

Всі результати цієї глави вірні, якщо граничні умови (20) замінити, наприклад, такими умовами: $u(r,\theta,0)=0$, $\partial u(r,\theta,\varphi)/\partial\varphi\big|_{\varphi=\Phi} = 0$. У цьому випадку слід вважати, що $\gamma_m=(2m-1)\pi/2\Phi$, $m=1,2,\ldots$

В третій главі вивчені граничні задачі I.3 - 3.3 в плоскій області $\Omega\setminus\bar{D}$, де $\Omega = \{(r,\varphi) \in R^2 \mid 0<r<\infty,\ -\Phi<\varphi<0\}$ - кутова область розхилу Φ (r, φ - полярні координати точки на площині), $0<\Phi<2\pi$, D - обмежена область з границею класу C^2, що належить Ω.

Припускається, що границя ∂D складається із скінченного числа неперетинних замкнених контурів, а область $\Omega\setminus\bar{D}$ – зв'язною.

Вказані граничні задачі описують розсіяння акустичних хвиль на нескінченно довгих циліндричних тілах , які містяться у клині. Зазначимо , що всі результати другої глави вірні в розглядуваному випадку після відповідної заміни функції Гріна і умов випромінювання Зоммерфельда. Сформулюємо ці зміни.

Функцію Гріна (23) необхідно замінити на функцію

$$G_k(M,P) = i\pi/\Phi \sum_{m=1}^{\infty} sin(\nu_m\varphi_M) sin(\nu_m\varphi_P) J_{\nu_m}(kr_<) H^{(1)}_{\nu_m}(kr_>) \ , \qquad (31)$$

д $\nu_m = m\pi/\Phi$, $J_{\nu_m}(z)$ і $H^{(1)}_{\nu_m}(z)$ – відповідно функції Бесселя і Ганкеля першого роду порядк ν_m, r_P, φ_P і r_M, φ_M – полярні координати відповідно точок P і M, $r_> = max\{r_M,r_P\}$, $r_< = min\{r_M,r_P\}$. Умову Зоммерфельда (18) треба замінити на умову

$$\partial u(r,\varphi)/\partial r - iku(r,\varphi) = o(r^{-1/2}), \quad r \to \infty$$

рівномірно по φ. Тоді двовим'рні аналоги результатів глави II залишаються вірними у розглядуваному в даній главі випадку.

Слід вказати на таку особливість двовимірного випадку. Функція Гріна (31) представлена у наступному вигляді:

$$G_k(M,P) = G_0(M,P) + 1/4\pi \ ln \ \phi(M,P),$$

де $G_0(M,P)$ – регулярна в Ω функція, яка визначається у вигляді ряду

$$G_0(M,P) = i\pi/\Phi \sum_{m=1}^{\infty} [J_{\nu_m}(kr_<) H^{(1)}_{\nu_m}(kr_>) + \frac{i}{\pi\nu_m}(r_</r_>)^{\nu_m}] sin(\nu_m\varphi_P) sin(\nu_m\varphi_M),$$

загальний член якого спадає із швидкістю $O(m^{-2})$, $m \to \infty$, а функція $\phi(M,P)$ має такий явний вираз:

$$\phi(M,P) = \frac{\sin^2\frac{\pi}{2\Phi}\,(\varphi_P+\varphi_M) + sh^2\left(\frac{\pi}{2\Phi}\ln(r_M/r_P)\right)}{\sin^2\frac{\pi}{2\Phi}\,(\varphi_P-\varphi_M) + sh^2\left(\frac{\pi}{2\Phi}\ln(r_M/r_P)\right)},$$

і при співпаданні аргументів має особливість виду $1/r^2_{M,P}$.

В останньому параграфі третьої глави одержані мінімаксні середньоквадратичні оцінки лінійних неперервних функціоналів від розв'язків хвильових рівнянь з неповністю визначеними гармонічними за часом правими частинами за результатами неперервних за часом неточних вимірів потенціалу швидкостей у дискретній системі точок із області $\Omega\setminus\bar{D}$ (Ω-шар, клин чи плоска кутова область).

Основні положення дисертації опубліковані в таких роботах:

1. Подлипенко Ю.К. Теория потенциала для задач дифракции в клине в слое.-Киев,1988.-68с.-(Препр./АН УССР. Ин-т математики; 88.55).
2. Подлипенко Ю.К. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в некоторых областях с бесконечными границами.-Киев, 1990.-59с.-(Препр. /АН УССР. Ин-т математики ;90.47).
3. Подлипенко Ю.К. О краевых задачах для уравнения Гельмгольца в клине.-Киев,1991.-51с.-(Препр./АН Украины. Ин-т математики;91.47)
4. Подлипенко Ю.К. Интегральные уравнения для задач дифракции в плоскопараллельном волноводе//Математические методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость.-Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.-С.75-85.
5. Подлипенко Ю.К. О структуре спектра оператора Лапласа в слое с ограниченными полостями//Ряды Фурье: Теория и приложения.- Киев: Ин-т математики АН Украины , 1992.-С.96-104.
6. Подлипенко Ю.К. О спектре оператора, соответствующего краевой задаче дифракции в клине //Докл. АН Украины.-1993.-№6.-с.45-47.
7. Подлипенко Ю.К. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в угловой области. 1. //Укр.мат.журн.-1993.-45, №3.-С.403-419.
8. Подлипенко Ю.К. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в угловой области. 2. //Укр.мат.журн.-1993.-45, №4.С.500-520.
9. Подлипенко Ю.К. Теория потенциала для задач дифракции в слое между двумя параллельными плоскостями//Укр.мат.журн.-1993.-45,№5. С.647-663.
10. Подлипенко Ю.К. Принцип предельного поглощения для задач дифракции в клине // Докл. РАН.- 1992. -327,№ 4-6.-С.485-488.
11. Подлипенко Ю.К. Использование метода граничных элементов для моделирования звуковых полей в волноводах переменного сечения //1-я Респ. науч.-техн.конф."Интегральные уравнения в прикладном моделировании". Тез. докл. -Киев, 1983.-Ч.1.- С.206-207.
12. Подлипенко Ю.К. О применении метода интегральных уравнений для моделирования звуковых полей в некоторых неограниченных областях //2-я Респ.науч.-техн.конф."Интегральные уравнения в прикладном моделировании".Тез.докл. - Киев, 1986.-Ч.1.- С.194-195.
13. Подлипенко Ю.К. Применение метода граничных интегральных уравнений для расчета поля в двухслойном волноводе переменного сечения//2-я Всесоюз.конф."Численные методы в современных волновых

задачах акустики" . Тез.докл. - М.: Акустический ин-т,1988.С.36.
14. Данилов В.Я., Подлипенко Ю.К. Применение метода интегральных уравнений в задаче расчета поля в плоскопараллельном волноводе по результатам измерения акустического давления в ближнем поле излучателя //Автоматика.-1990.-С.50-55.

Підп. до друку 22.06.93.Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб.1,16. Обл.-вид. арк.0,9.
Тираж 120 пр. Зам. 255 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.