ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ІВ. ФРАНКА

На правах рукопису

П У К А Ч
ПЕТРО ЯРОСЛАВОВИЧ

ЗМІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико - математичних наук

ЛЬВІВ - 1993

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь Львівського державного університету ім. Ів. Франка

Науковий керівник - кандидат фізико - математичних наук, доцент **ЛАВРЕНЮК С. П.**

Офіційні опоненти: доктор фізико - математичних наук, вед. наук. співр. **ШИШКОВ А. Є.** (Інститут прикладної математики і механіки АН України, м. Донецьк), кандидат фізико-математичних наук, доцент **ДАНИЛЮК Г. І.** (Макіївський інженерно - будівельний інститут).

Провідна організація - Чернівецький державний університет.

Захист відбудеться "18" XI **1993 р.** о 15:30 год. на засіданні спеціалізованої Ради К. 068.12.13 по присудженню вченого ступеня кандидата фізико - математичних наук у Львівському державному університеті ім. Ів. Франка (290602, м. Львів, вул. Університетська, 1).

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського держуніверситету.

Автореферат розіслано "11" X **1993 р.**

Вчений секретар
спеціалізованої Ради **МИКИТЮК Я. В.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Математичне моделювання різноманітних явищ та процесів в фізиці, техніці (задачі фазових режимів, температурного граничного шару, опріснення морських вод, руху рідин та газів в пористому середовищі, явища в плазмі та ін.) приводять до необхідності розгляду змішаних задач для параболічних рівнянь та систем з виродженням по змінній t, певне теоретичне узагальнення яких є предметом дослідження в цій дисертації. В працях Джураева Т.Д., Гринберга Г.А., Подгаева А.Г., Favini A., Ford W.T. та ін. наведено моделі конкретних прикладних задач, що підтверджують цей факт.

В дисертаційній роботі розглядаються змішані задачі для параболічних рівнянь та систем, що вироджуються в довільний скінчений момент часу та задача Фур'е для систем, що вироджуються при $t \to -\infty$.

Змішані задачі в обмежених областях для параболічних рівнянь та систем з виродженням розглядалися в працях Калашникова А.С., Джураева Т.Д., Городецкого В.В. і Житарюка И.В., Глушака А.В. і Шмулевича С.Д., Краснова М.Л., Мысовских П.И., Орлова В.П., Пукальського І.Д. та Матійчука М.І., Терсенова С.А., Ippolito P.M., Pao C.V., Schuchman V. та ін. Деякі автори, такі як Соболевский П.Е., Friedman A., Schuss Z., Ford W.T., Favini A., Waid M.C. та ін. вивчали загальні властивості параболічних операторів, коефіцієнт при похідній по часу в яких певним чином обертається в нуль. Як наслідок отримуються властивості розв'язків конкретних задач .

Дослідженню задачі Фур'е для лінійних та нелінійних рівнянь і систем присвячені роботи Івасишена С.Д., Олійник О.А., Радкевича Е.В., Лавренчука В.П., Матійчука М.І., Шишкова А.Є., Бокала М.М., Nakao M. та ін.

Найбільш загальні результати по змішаних задачах для параболічних рівнянь з невід'ємною характеристичною формою отримані в працях Олійник О.А., Радкевича Е.В.

Мета роботи. Дослідити умови коректної розв'язності змішаних задач в обмежених нециліндричних областях та задачі Фур'е в необмежених по t областях для лінійних та нелінійних параболічних рівнянь і систем, що вироджуються по часовій змінній.

Загальна методика роботи. Застосовуються метод ε - регуляризації, метод штрафу, метод Гальоркіна, методи апріорних оцінок, деякі загальні підходи теорії вагових соболевських просторів, метод Роте.

Наукова новизна. Досліджено питання коректної розв'язності змішаних задач в обмежених нециліндричних областях для лінійних та деяких класів нелінійних параболічних систем, що вироджуються в фіксований момент часу. Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків. Отримано умови існування та єдиності розв'язку задачі Фур'е для лінійних та нелінійних параболічних систем, що вироджуються при $t \to -\infty$. Теоретично обгрунтовано можливість застосування метода Роте до знаходження розв'язку змішаної задачі для одного лінійного параболічного рівняння зі слабим виродженням.

Теоретична та практична значимість. Результати роботи вносять вклад в загальну теорію параболічних граничних задач і можуть бути використані при її побудові. Вони також можуть знайти своє застосування в прикладних питаннях.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на семінарі кафедри диференціальних рівнянь Львівського держуніверситету (кер. канд. фіз.-мат. н., доц. Лавренюк С.П.); на спільному семінарі Інституту прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача АН України і кафедри диференціальних рівнянь Львівського університету (кер. канд. фіз.-мат. н., доц. Лавренюк С.П.; докт. фіз.-мат. н., проф. Пташник Б.Й.; докт. фіз.-мат. н., проф. Скоробогатько В.Я.); на семінарі Інституту прикладної математики і механіки АН України, м. Донецьк (кер. акад. Скрипник І.В.); на семінарі кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького держуніверситету (кер. докт. фіз.-мат. н., проф. Івасишен С.Д.; докт. фіз.-мат. н., проф. Матійчук М.І.); на 8 - ій та 9 - ій Міжнародних конференціях " Нелінійні граничні задачі "(м. Донецьк); на Міжнародній конференції "Актуальні проблеми фундаментальних наук" (м. Москва); на Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті акад. М.П. Кравчука (м. Київ).

Публікації. Результати виконаних досліджень опубліковані в роботах [1-9], список яких наведено в кінці автореферату.

Структура та об'ем роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох глав, закінчення та списка літератури, викладених на 147 сторінках машинописного тексту. Список літератури містить 115 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі дано обгрунтування актуальності питань, дослідженню яких присвячена дисертація, проаналізовано сучасний стан проблеми і коротко викладено основні результати.

В главі I розглянуто змішані задачі для лінійних та нелінійних параболічних систем, що вироджуються в скінчений момент часу.

Досліджуються лінійні системи такого вигляду:

$$\Phi(t)u_t + Au = F(x,t), \tag{1}$$

$$R(x,t)u_t + Au = F(x,t). \tag{2}$$

Тут $u=(u_1,\dots,u_m)$, $Au = -\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}B_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u$. Коефіцієнти $\Phi(t)$, $R(x,t)$, $A_{ij}(x,t)$, $B_i(x,t)$, $C(x,t)$ систем (1),(2) - квадратні матриці розміру m, $F(x,t)=(F_1(x,t),\dots,F_m(x,t))$. Для систем (1), (2), що розглядаються в нециліндричній області $Q=\Omega(t)\times S$, $S=(0,T)$, $T<+\infty$, $\Omega(t)$ - обмежена область в R^n, $\Gamma\in C^2$ - бічна поверхня області Q, початкова та крайова умови мають відповідно вигляд:

$$u(x,0)=\psi(x), \tag{3}$$

$$u(x,t)\big|_{\Gamma} = 0. \tag{4}$$

Припускається, що Γ допускає продовження через неї коефіцієнтів та правих частин розглядуваних в цій роботі систем.

Елементи $\varphi_{\kappa\ell}(t)$ матриці $\Phi(t)$ $(\kappa,\ell=\overline{1,m})$ - обмежені на $\bar{S}$ функції, нескінчено - диференційовані на $\bar{S}$ за виключенням, можливо, лише точки t_0, $0\le t_0\le T$;

$$(\Phi(t)\xi,\xi)\ge\varphi(t)|\xi|^2,\ (\Phi'(t)\xi,\xi)\le\alpha\varphi'(t)|\xi|^2,\ \alpha>0$$

для всіх $t\in\bar{S}$ та довільного вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$; $\varphi(t_0)=0$, $\varphi(t)>0$, $t\in\bar{S}\setminus\{t_0\}$, $\varphi(t)\in C^\infty(\bar{S}\setminus\{t_0\})$; $\varphi'(t)<0$, $t\in[0,t_0)$, $\varphi'(t)>0$, $t\in(t_0,T]$.

Відносно коефіцієнтів та правої частини (1) припускатимемо наступне.

1. Елементи матриць A_{ij}, $A_{ij\,x_\kappa}$ $(i,j=\overline{1,n})$ належать простору $L^\infty(Q)$,

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)\xi_i,\xi_j\right)\ge\nu|\xi|^2,\ \nu>0$$

для м. в. $(x,t)\in Q$ та довільного вектора $\xi\in\mathbb{R}^m$.

2. $\left(\dfrac{C(x,t)}{|\varphi'(t)|}\xi,\xi\right)\ge c_0|\xi|^2,\ 0<c_0<+\infty$

для м. в. $(x,t)\in Q$ та довільного вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$.

3. $\rho_0(t)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sup\limits_{x\in\Omega(t)}\dfrac{\|B_i(x,t)\|}{\sqrt{|\varphi'(t)|}}<+\infty$, $\rho_0\in L^\infty(S)$.

Означення узагальненого розв'язку задачі (1),(3),(4) дається в сенсі виконання інтегральної тотожності.

Т е о р е м а 1.1. Нехай виконуються викладені вище умови на елементи матриці $\Phi(t)$, поверхні Γ, умови 1 - 3. Крім того, $\rho_0(t) \to 0,\ t \to t_0;\ \psi_i(x) \in L^2(\Omega(0))$;

$$\varphi(t) \leq \varkappa |\varphi'(t)| \cdot |t-t_0|^{\alpha_0},\ \varkappa > 0,\ \alpha_0 \geq 1; \tag{5}$$

$$\frac{F_i(x,t)}{\sqrt{|\varphi'(t)|}} \in L^2(Q_{0,t_0});\ \frac{F_i(x,t)}{\{\varphi(t)\}^{1+\delta_0}\cdot\sqrt{\varphi'(t)}} \in L^2(Q_{t_0,T}),$$

$\delta_0 > 0$ - достатньо мале число, $i=\overline{1,m}$. Тоді існує единий узагальнений розв'язок $u(x,t)$ задачі (1),(3),(4) в Q, такий що $(i=\overline{1,m})$

$$\sqrt{\varphi(t)}\, u_i \in C(\bar{S}; L^2(\Omega(t))),$$

$$\sqrt{|\varphi'(t)|}\, u_i \in L^2(Q),\ u_i \in L^2(S; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega(t))).$$

При доведенні використано методи ε - регуляризації та штрафу. Застосування метода Гальоркіна дае можливість отримати апріорні оцінки наближеного розв'язку задачі. При граничному переході встановлюються властивості розв'язку вихідної задачі.

Далі розглядається задача (2)-(4) в припущенні, що елементи $r_{kl}(x,t)$ ($k,l=\overline{1,m}$) матриці $R(x,t)$ - неперервні на $\bar{S}$ функції, $(R(x,t)\xi,\xi) \geq \varphi_0(t)|\xi|^2$ для всіх $t \in \bar{S}$ та довільного вектора $\xi \in R^n$; $\varphi_0(t) > 0,\ t \in \bar{S} \setminus \{t_0\}$, $\varphi_0(t_0) = 0,\ \varphi_0(t) \in C(\bar{S})$.

Припускатимемо також наступне:

4. Матриці $A_{ij}(x,t)$ - симетричні; $\sum\limits_{i,j=1}^{n}(A_{ij_t}\xi_i,\xi_j) \leq a'|\xi|^2$, $0 < a' < +\infty,\ \xi \in R^n_m,\ i,j=\overline{1,n}$.

5. $\rho_1(t) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{x\in\Omega(t)} \dfrac{\|B_i(x,t)\|}{\sqrt{\varphi_0(t)}} < +\infty,\ i=\overline{1,n}$, $\rho_1 \in L^r(S)$.

6. $\|C(x,t)\| < +\infty, (x,t)\in Q;\ \|C_t(x,t)\| \le c',$

$0 < c' < +\infty, (x,t)\in Q;\ (C(x,t)\xi,\xi) \ge c_0^*(t)|\xi|^2,\ \xi\in R^n.$

7. $\nu + c_1^*(t)A_0 > 0$, де ν визначається умовою 1, A_0 - константа відомої нерівності Фрідріхса для функцій з $\overset{\circ}{H}{}^1_m(\Omega(t))$,

$$c_1^*(t) = \begin{cases} c_0^*(t), & c_0^*(t) < 0, \\ 0, & c_0^*(t) \ge 0. \end{cases}$$

Теорема 1.2. Нехай область Q така, що $\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2}$, $t_1 < t_2$, мають місце умови 1, 4 - 7, $F_i(x,t)/\sqrt{\varphi_0(t)} \in L^2(Q)$, елементи матриці $R(x,t)$ володіють описаними вище властивостями. Крім того, $\rho_1(t) \to 0$, $t \to t_0$; $\psi_i(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega(0))$. Тоді задача (2) - (4) має единий розв'язок м.в. в Q , такий що

$$\sqrt{\varphi_0(t)}\, u_{i_t} \in L^2(Q),\ u_i \in L^2(S;H^2(\Omega(t))). \qquad (6)$$

Теорема 1.3. Нехай виконуються всі умови теореми 1.2, $t_0 = 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $\int_0^T \frac{dt}{\varphi_0(t)} < +\infty$. Тоді задача (2)-(4) має единий розв'язок м.в. в Q , що задовільняє (6).

Далі в роботі отримано результати існування та единості розв'язків задач (1),(3),(4) та (2) - (4) для правих частин систем, поведінка яких при $t \to t_0$ визначається не лише функціями $\varphi(t)$, $\varphi_0(t)$.

Розглянемо випадок матриці $\Phi(t)$, що задовільняє оцінку:

$$\left(\left(\Phi'(t) + \frac{\gamma\,\Phi(t)}{|t-t_0|}\right)\xi,\xi\right) \le K\cdot|t-t_0|^{\beta_1}|\xi|^2, \qquad (7)$$

$$\xi\in R^n,\ K>0,\ \beta_1 \ge 0,\ \gamma > 0.$$

Крім того, припускатимемо:

8. $\|B_i(x,t)\| < +\infty$; $\|B_{i x_i}(x,t)\| \le \bar{b}'$, $\bar{b}' \ge 0$, $i = \overline{1,n}$.

9. $(C(x,t)\xi,\xi) \ge \bar{c}|\xi|^2$, $\bar{c} > 0$, $L_1 = \begin{cases} L_0, & L_0 \le 0, \\ 0, & L_0 > 0, \end{cases}$

$\nu + L_1 A_0 > 0$. Тут $L_0 = \bar{c} - \frac{1}{2}(n\bar{b}' + K)$; ν, A_0 ті самі, що й вище.

10. $F_i(x,t)|t-t_0|^{\gamma/2} \in L^2(Q)$, $\gamma > 0$.

Теорема 1.4 Нехай матриця $\Phi(t)$, крім описаних в теоремі 1.1 умов, задовільняе оцінку (7), мають місце умови 1; 8 - 10, (5), $\varphi_i(x) \in L^2(\Omega(0))$. Тоді існує единий узагальнений розв'язок $u(x,t)$ задачі (1),(3),(4) в Q (в сенсі теореми 1.1), такий що

$$\sqrt{\varphi(t)} \cdot |t-t_0|^{\gamma/2} u_i \in C(\bar{S}; L^2(\Omega)),$$

$$|t-t_0|^{\gamma/2} u_i \in L^2(S; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)).$$

У випадку $t_0 = T$ подібний результат отримано для розв'язку м.в. задачі (2) -(4).

Далі в главі I окремо розглянуто виродження системи (1) в початковий момент часу ($t_0 = 0$). Виділено клас видозмінених початкових умов, що визначаються коефіцієнтами системи (1), змішана задача для яких коректно розв'язна.

В обмеженій циліндричній області Q вивчено задачу (3),(4) для слабо нелінійної параболічної системи

$$\Phi(t)u_t + Au + B(x,t)|u|^{p-2}u = F(x,t), \; p > 2. \tag{8}$$

Оператор A, матриця $\Phi(t)$ ті ж, що й вище.

Припускається наступне:

11. $B(x,t) = \mathrm{diag}\,[b_1(x,t), \dots, b_m(x,t)]$,

$(B(x,t)\xi,\xi) \geq b_0|\xi|^2,\ 0<b_0<+\infty, (x,t)\in Q,\ \xi\in R^n$.

12. $\|B_t(x,t)\| \leq b',\ b'<+\infty, (x,t)\in Q$.

13. $\|C_t(x,t)\| \leq c',\ c'<+\infty;\ \|C(x,t)\|<+\infty$.

14. $\rho_1(t) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sup\limits_{x\in\Omega} \dfrac{\|B_i(x,t)\|}{\sqrt{\varphi(t)}} < +\infty,\ \rho_1 \in L^\infty(S)$.

15. $F_i(x,t)/\sqrt{\varphi(t)} \in L^2(S; L^2(\Omega))$.

Означення узагальненого розв'язку задачі (8),(3),(4) дається в сенсі виконання інтегральної тотожності.

Т е о р е м а 1.8. Нехай виконуються умови 1, 4, 6, 7, 11-15, $\rho_1(t)\to 0,\ t\to t_0;\ \psi_i(x)\in V$, $V=\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$. Тоді задача (8),(3),(4) має єдиний розв'язок $u(x,t)$, що задовільняє наступним включенням:

$$u_i \in L^\infty(S;V),\ \sqrt{\varphi(t)}\,u_{i_t} \in L^2(Q). \qquad (9)$$

Отримано умови єдиності розв'язку задачі (8),(3),(4), що задовільняє (9), умови існування та єдиності розв'язку м.в.

Т е о р е м а 1.12. Нехай мають місце всі умови теореми 1.8, $t_0=0$, $\psi(x)\equiv 0$, $\int_0^T dt/\varphi(t) < +\infty$. Тоді задача (8),(3),(4) має розв'язок в Q, що задовільняє (9).

Далі в главі I розглянуто задачу (3),(4) в нециліндричній області Q для сильно нелінійної системи другого порядку

$$\Phi(t)u_t + A_1(u) = F(x,t), \qquad (10)$$

Матриця $\Phi(t)$ та сама, що й вище, оператор A_1 має вигляд

$$A_1(u)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega_0(x,|\nabla u|^{p-1})|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\omega_1(x)|u|^{p-2}u,$$

$$p>2;\ \omega_0=diag[\omega_0^1,\dots,\omega_0^m],\ \omega_1=diag[\omega_1^1,\dots,\omega_1^m].$$

На функції ω_0^i, ω_1^i накладаються певні умови, що забезпечують хемінеперервність, монотонність та коерцитивність оператора A_1 (див., наприклад, Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. "Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения", М., Мир, 1978).

Теорема 1.14. Нехай нециліндрична область Q та матриця $\Phi(t)$ такі, як в теоремі 1.1; виконується умова (5); оператор A_1 описаного вище вигляду. Крім того, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\int_0^{t_0}\|F_i\|^q_{W^{-1,q}(\Omega(t))}dt<+\infty,\ \int_{t_0}^{T}\frac{\|F_i\|^q_{W^{-1,q}(\Omega(t))}}{\{\varphi(t)\}^{1+\delta_0}}dt<+\infty,\ i=\overline{1,m},$$

$\delta_0>0$ - достатньо мале число; $\psi_i(x)\in L^2(\Omega(0))$. Тоді задача (10),(3),(4) має єдиний розв'язок $u(x,t)$, для якого

$$\sqrt{\varphi(t)}\,u_i\in C(\overline{S};L^2(\Omega(t))),\ \varphi(t)u_{i_t}\in L^q(S;W^{-1,q}(\Omega(t))).$$

Глава II присвячена розгляду задачі Фур'е для лінійних та нелінійних систем параболічного типу з виродженням.

В циліндричній області $Q=\Omega\times S$, $S=(-\infty,T')$, $T'\le+\infty$ вивчено задачу Фур'е для лінійної системи:

$$\begin{pmatrix}\Phi(t) & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}w_t+Aw=F(x,t), \qquad (11)$$

$$w(x,t)\big|_{\Gamma} = 0. \tag{12}$$

Область Q, оператор A ті самі, що й в гл. I; $\Phi(t)$ - квадратна матриця розміру m_1, I - одинична матриця розміру m_2, $m_1 + m_2 = m$. Покладемо $w = (u,v)$, $u = (u_1,\dots,u_{m_1})$, $v = (v_1,\dots,v_{m_2})$.

Позначимо

$$L^{\infty}_{\Phi,\mu}(S;L^2(\Omega)) = \{v_0 \,|\, e^{\mu t}\int_{\Omega}(\Phi v_0, v_0)\,dx < +\infty,\ \mu > 0\},$$

$$L^{\infty}_{\mu}(S;L^2(\Omega)) = \{v_0 \,|\, e^{\mu t}\int_{\Omega}|v_0|^2\,dx < +\infty,\ \mu > 0\},$$

$$L^{2}_{\mu}(S;\mathring{H}^1(\Omega)) = \{v_0 \,|\, \int_{-\infty}^{T}\int_{\Omega}|\nabla v_0|^2 e^{\mu t}\,dx\,dt < +\infty,\ \mu > 0\}.$$

Відносно коефіцієнтів системи (11), що є дійснозначними квадратними матрицями розміру m, та правої частини припускатимемо наступне:

16. а) $\varphi_{kl}(t): \bar{S} \to R$, $k,l = \overline{1,m_1}$;

$$(\Phi(t)\xi,\xi) > 0\ \ \forall t \in S\ \forall \xi \in R^n;\ \lim_{t\to-\infty}\|\Phi(t)\| = \lim_{t\to-\infty}\|\Phi'(t)\| = 0;$$

б) $\varphi_{kl}(t) \in C^{\infty}(\bar{S})$; $k,l = \overline{1,m_1}$.

17. $\|B_i(x,t)\| \to 0$, $t \to -\infty$, $i = \overline{1,n}$.

18. $F_i(x,t) \in L^2_{\mu}(S;L^2(\Omega))$.

Під узагальненим розв'язком задачі (11),(12) розуміється деяка функція $w \in L^2_{\mu}(S;\mathring{H}^1(\Omega))$, що задовільняє інтегральній тотожності.

Теорема 2.1. Нехай виконуються умови 1, 7, 16 - 18. Тоді задача (11),(12) має единий узагальнений розв'язок в Q, такий що

$$u_i \in L^{\infty}_{\varphi,\mu}(S;L^2(\Omega)),\ v_i \in L^{\infty}_{\mu}(S;L^2(\Omega)),$$

$$w_i \in L^2_{\mu}(S;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)),\ 0<\mu<2\left(\frac{\nu}{A_0}+c_1^*\right).$$

Далі розглядається задача (12) для системи

$$\begin{pmatrix} R(x,t) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} w_t + Aw = F(x,t). \qquad (13)$$

Тут $R(x,t)$ -квадратна матриця розміру m_1, $B_i = \begin{pmatrix} B_i^1 & B_i^2 \\ B_i^3 & B_i^4 \end{pmatrix}$; B_i^1, B_i^4 - квадратні матриці розміру m_1 та m_2; B_i^2 - матриця з m_1 стрічками і m_2 стовпцями; B_i^3 - матриця з m_2 стрічками і m_1 стовпцями; $F=(\bar F,\bar{\bar F})$, $\bar F=(\bar F_1,\dots,\bar F_{m_1})$, $\bar{\bar F}=(\bar{\bar F}_1,\dots,\bar{\bar F}_{m_2})$.

Додатково припускатимемо, що:

19. $r_{kl}(x,t)\in L^{\infty}(Q)$, $k,l=\overline{1,m_1}$,

$(R(x,t)\xi,\xi)\geq\varphi(t)|\xi|^2$, $\xi\in R^n$; $\varphi(t)\in C(\bar S)$,

$\varphi(t)>0$ на S, $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t)=0$.

20. $\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sup\limits_{Q}\|B_i^s\|/\sqrt{\varphi(t)}\leq b^s$, $s=1,2$;

$\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sup\limits_{Q}\|B_i^s\|\leq b^s$, $s=3,4$; $b^s\to0$, $t\to-\infty$, $s=\overline{1,4}$.

21. $|\bar F|/\sqrt{\varphi(t)}\in L^2_{\mu}(S;L^2(\Omega))$,

$|\bar{\bar F}|\in L^2_{\mu}(S;L^2(\Omega))$.

Т е о р е м а 2.2. Нехай мають місце умови 1, 4, 6, 7,19-21. Тоді існує единий узагальнений розв'язок (13),(12), для якого

$$w_i \in L^2_\mu(S; H^2(\Omega)), \sqrt{\varphi(t)}\,|u_t| \in L^2_\mu(Q),$$

$$|v_t| \in L^2_\mu(Q).$$

В главі II вивчено задачу Фур'е для системи з невід'ємною характеристичною формою

$$u_t + A u = F(x,t). \tag{14}$$

Припускається, що:

22. $\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)\xi_i, \xi_j) \geq 0$ для м. в. $(x,t) \in Q$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n_m$; елементи матриць A_{ij} - неперервні по t і неперервно - диференційовані по x_k ($k=\overline{1,n}$) в $\overline{Q}$ функції. Позначимо $\mathcal{D} = \{(x,t) \in Q: \sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}\xi_i, \xi_j) = 0\}$. Відносно $\mathcal{D}$ припускаемо:

а) $\Gamma \cap \mathcal{D} = \varnothing$;

б) всяку точку $(x^*, t^*) \in \mathcal{D}$ можна помістити в обмежений циліндр Q_{τ_1, τ_2}, $\tau_1 < t^* < \tau_2$, що $\Omega_{\tau_1} \cap \mathcal{D} = \varnothing$, $\Omega_{\tau_2} \cap \mathcal{D} = \varnothing$.

23. Елементи матриць B_i - неперервні по t і неперервно - диференційовані по x_k ($k=\overline{1,n}$) в $\overline{Q}$ функції; елементи матриці C неперервні в Q. Припустимо:

а) $\left(\left(C(x,t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} B_{i x_i}\right)\xi, \xi\right) \geq c_0|\xi|^2$ для м. в. $(x,t) \in Q$, $c_0 > 0$;

б) $(C(x,t)\xi, \xi) > 0$.

Т е о р е м а 2.4. При виконанні умов 22,23 існує узагальнений (з простору L^2) розв'язок (14),(12) в Q, якщо $c_0 - \frac{1}{2}\mu > 0$, $F_i \in L^2_\mu(Q)$.

Отримано результати единості цього розв'язку.

В главі II вивчено також задачу Фур'е для системи

$$\Phi(t)u_t + A_1(u) + C(x,t)u = F(x,t). \tag{15}$$

Нехай

$$\varphi(t)|\xi|^2 \le (\Phi(t)\xi,\xi) \le \varphi_0(t)|\xi|^2, \tag{16}$$

$$\varphi(t) \in C^\infty(\bar S),\ \varphi_0(t) \in C^\infty(\bar S),\ \varphi(t) > 0 \text{ на } S,$$

$$\varphi_0(t) > 0 \text{ на } S,\ \lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to-\infty}\varphi_0(t) = 0.$$

Припускатимемо для спрощення $T = 0$. Оператор A_1 той самий, що й в системі (10). Крім того:

24. а) $\omega_0^i \le M,\ M > 0, \forall s \in S$ для м. в. $x \in \Omega$; $\omega_1^i \ge 0$;

б) $\int_{\Omega_t} \langle A_1(v_1) - A_1(v_2), v_1 - v_2 \rangle dx \ge h(t) \| v_1 - v_2 \|^p_{\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_m(\Omega)}$

для довільних $v_1, v_2 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_m(\Omega)$, де $h(t) \in L^1_{loc}((-\infty, 0])$,

$$h(t) \ge 0,\ \int_{-\infty}^0 \frac{h(t)}{\varphi_0^{p/2}(t)}\, dt = +\infty.$$

25. $(C(x,t)\xi,\xi) \ge \bar c(t)|\xi|^2,\ \bar c(t) \ge 0,$

$$2\inf_{\bar S} \bar c(t) \ge \sup_{Q} \|\Phi'(t)\|.$$

Означення узагальненого розв'язку задачі (15),(12) дається в класі локально інтегрованих функцій.

Т е о р е м а 2.6. Нехай виконуються умови 16,(16),24,25. Тоді задача (15),(12) має не більше одного розв'язку.

Т е о р е м а 2.8. Нехай мають місце умови теореми 2.6 і

а) $\inf_{t\in(-\tau,\tau)} h(t) > 0$ для довільного $\tau > 0$;

б) $\|F\|_{(V^m)^*} \in L^q_{loc}(\bar{S}),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ V=\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega).$

Тоді задача (15),(12) має хоча б один узагальнений розв'язок. Для довільного узагальненого розв'язку справедливі оцінки:

$$\varphi(t)\|u\|^2_{L^2_m(\Omega)} \le M_1\left(\bar{h}(t-1,t+1)\right)^{\frac{1}{1-p}} \int_{t-1}^{t} \|F\|^q_{(V^m)^*}\, d\tau + M_2\left(\bar{h}(t-1,t+1)\right)^{\frac{2}{2-p}},$$

$$\int_t^{t+1} \|u\|^p_{V^m}\, d\tau \le M_1\left(\bar{h}(t-1,t+1)\right)^{\frac{p}{1-p}} \int_{t-1}^{t+1} \|F\|^q_{(V^m)^*}\, d\tau + M_2\left(\bar{h}(t-1,t+1)\right)^{\frac{p}{2-p}},$$

де M_1, M_2 - константи, що залежать від m, p, Ω ; $\bar{h}(t) = \inf\limits_{t\in(t_1,t_2)} h(t)$.

Окремо розглянуто задачу (12) для слабо нелінійної системи з виродженням (8).

Глава III присвячена застосуванню метода Роте до знаходження наближеного розв'язку змішаної задачі для параболічного рівняння другого порядку наступного вигляду:

$$\varphi(\tau)u_\tau - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,\tau)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,\tau)u_{x_i} + c(x,\tau)u = f(x,\tau), \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0, \tag{18}$$

$$u(x,\tau)\big|_{\Gamma_0} = 0. \tag{19}$$

Тут $\Omega \subset R^n$ -обмежена область, Γ_0 -бічна поверхня циліндра $Q_0 = \Omega \times S_0$, $S_0 = (0,T_0)$, $T_0 < +\infty$.

Відносно функції $\varphi(\tau)$ припускаємо наступне:

26. а) $\varphi(\tau)\in C^{\infty}(\bar{S}_0\setminus\{0\})$, $\varphi(\tau)>0$ на S_0, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(\tau)>0$ на S_0; $\varphi(\tau)\le \varkappa\varphi'(\tau)\tau^{\alpha_0}$, $\alpha_0\ge 1$, $\varkappa>0$;

б) $\displaystyle\int_0^{T_0}\frac{d\theta}{\varphi(\theta)}<+\infty$.

Коефіцієнти та права частина (17)-дійснозначні функції, що задовільняють умовам:

27. $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\tau)\,\xi_i\cdot\xi_j \ge \nu|\xi|^2$, $\nu>0$ для м.в. $(x,t)\in Q_0$ $\forall\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$; $|a_{ij}(x,\tau)|\le a_0$, $a_0>0$, $i,j=\overline{1,n}$.

28. $0<\inf\limits_{Q_0}\dfrac{c(x,\tau)}{\varphi'(\tau)\varphi^{\delta_0}(\tau)}<+\infty$, $\delta_0>0$ -довільне мале число.

29. $\rho_0(\tau)=\sup\limits_{x\in\Omega}\dfrac{b_i(x,\tau)}{\sqrt{\varphi'(\tau)}}\to 0$, $\tau\to 0$, $i=\overline{1,n}$; $|\rho_0(\tau)|\le\rho$, $\rho\ge 0$.

Припускаємо, що $f(x,\tau)\in L^2(Q_0)$. (20)

Для знаходження наближеного розв'язку задачі (17)-(19) застосовується метод Роте. Попередньо за допомогою перетворення часу $t=\displaystyle\int_0^{\tau}\frac{d\theta}{\varphi(\theta)}$ задача зводиться до змішаної задачі для рівняння без виродження. В **теоремі 3.1** стверджується, що при виконанні умов 26 - 29, (20) узагальнений (в сенсі простору $\overset{\circ}{H}{}^{1,0}$) розв'язок задачі (17)-(19) є слаба границя наближених розв'язків, що визначаються за допомогою схеми Роте.

Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику, доценту Лавренюку С.П. за керівництво і постійну увагу до роботи.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Лавренюк С. П., Пукач П. Я. Смешанные задачи для параболических уравнений, вырождающихся в произвольный момент времени // В сб. "Международная научно-техн. конф. "Актуальные проблемы фунд. наук". Москва, 28.10. 1991-3.11. 1991 г.". - Т. 2. - М. -1991. -С. 19 - 21.
2. Лавренюк С. П., Пукач П. Я. Про задачу без початкових умов для параболічних систем з виродженням / Тези Міжн. конф., присв. пам'яті акад. Кравчука М. П. (22 - 28 вересня 1992). - Київ - Луцьк . - 1992. - С. 109.
3. Пукач П. Я. Змішана задача для параболічного рівняння з виродженням//Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. -мат. -1990. -Вип. 34. -С. 10 - 14.
4. Пукач П. Я. Задачі для нелінійних параболічних рівнянь з виродженням//Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. -мат. - 1991. -Вип. 36. -С. 6-10.
5. Пукач П. Я. Смешанные задачи для вырождающихся параболических уравнений / Львів. ун-т. Львів, 1992 .- 86 с. Деп. в УкрІНТЕІ 9. 07. 92 . N 1037 - Ук - 92.
6. Пукач П. Я. О задаче без начальных условий для вырождающихся параболических систем / Львів. ун-т. Львів, 1992 .- 42 с. Деп. в УкрІНТЕІ 11. 11. 92 . N 1825 - Ук - 92.
7. Пукач П. Я. Об однозначной разрешимости задачи с видоизмененным начальным условием для вырождающихся параболических систем/Львів. ун-т. Львів, 1992 .-19 с. Деп. в УкрІНТЕІ 12. 11. 92. N 1826-Ук - 92.
8. Пукач П. Я. Про схему Роте для одного лінійного параболічного рівняння зі слабим виродженням / Львів. ун-т. Львів, 1993 .- 10 с. Деп. в УкрІНТЕІ 25.06.93 . N 1224 - Ук - 93.
9. Пукач П. Я. Про задачу Фур'е для лінійної параболічної системи з виродженням // Доп. АН України .- 1993. - N 7. - С. 22-25.

463665

П У К А Ч

ПЕТРО ЯРОСЛАВОВИЧ

ЗМІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ.

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико - математичних наук

Підписано до друку 28.09.93. Формат 60x84/16. Папір друк.№1.
Друк. осет. Умовн. друк.арк. 1,2. Умовн. фарб.відб. 1,3.
Обл.- вид. арк. 1,2. Тираж 100. Зам. 348.
Машинно-офсетна лабораторія Львівського державного університету ім. І.Франка. 290602. Львів, вул. Університетська,1.