ЗАПОРОЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

ШАДМАНОВ АЛИМ ТРАПОВИЧ

ВАРИАНТ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ГАРМОНИЧЕСКИМИ И БИГАРМОНИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

05.13.16 – Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях.

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук

Запорожье - 1993

Работа выполнена в Запорожском государственном университете.

Научный руководитель - доктор технических наук, профессор Толок В.А.

Научный консультант - доктор физико-математических наук, профессор Туровцев Г.В.

Официальные оппоненты: - доктор физико-математических наук, профессор Верюжский Ю.В.

- доктор технических наук, профессор Цурпал И.А.

Ведущее предприятие - Киевский автомобильно-дорожный институт

Защита диссертации состоится "12" ноября 1993г. в 15⁰⁰ на заседании специализированного совета К 068.52.02 при Запорожском государственном университете по адресу: 330600, г.Запорожье, ул.Жуковского, 66, ауд. 50

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Запорожского госуниверситета.

Автореферат разослан "9" октября 1993г.

Ученый секретарь
специализированного совета
к.т.н., доцент Сысоев Ю.А.

Общая характеристика работы.

Актуальность работы. Численные методы являются одним из основных, а зачастую и единственным аппаратом решения современных прикладных задач механики сплошных сред и, в частности, краевых задач с бигармоническим оператором. Наибольшее распространение получили методы, основанные на дискретизации области, в которой ищется решение задачи. Использование метода граничных интегральных уравнений, понижающего размерность задачи на единицу и позволяющего явно учесть особенности напряжений, представляет альтернативу классическим методам. Для краевых задач с дифференциальными операторами высокого порядка этот метод теряет часть присущих ему преимуществ. Таким образом, разработка эффективного варианта метода граничных интегральных уравнений для краевых задач с бигармоническим оператором является актуальной задачей вычислительной математики.

Цель диссертационной работы. Разработка эффективного варианта метода граничных интегральных уравнений для краевых задач с бигармоническим оператором в качестве главной части, в часности задач теории изотермического и температурного изгиба пластин.

Научная новизна. Разработана комбинация методов теории возмущений и метода граничных интегральных уравнений для задач теории пластин.

Предложенный подход развит на задачи нелинейного изгиба пластин (приближение Бергера). Исследованы возможности повышения эффективности этого подхода за счет сведения задачи к чисто граничной (исключение интегрирования по области).

Разработаны алгоритмы и реализующие их универсальные пакеты прикладных программ для решения отдельных классов задач теории пластин. Численно исследована сходимость предложенных алгоритмов.

Достоверность основных научных результатов обосновывается их согласованностью с теоретическими результатами опубликованных исследований. Достоверность алгоритмов и программ подтверждается решением тестовых примеров расчета термостатического и температурного изгиба пластин.

Научная и практическая ценность заключается в разработке эффективного варианта метода граничных интегральных уравнений для краевых задач теории пластин. Разработанные алгоритмы и реализующие их программы могут быть использованны в НИИ и КБ при расчетах пластинчатых элементов конструкций.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на:

- научном семинаре кафедры прикладной математики Запорожского государственного университета под руководством проф. Толока В.А. (г.Запорожье, 1990-93гг.);
- научном семинаре кафедры высшей математики Запорожского индустриального института под руководством проф. Тамурова Н.Г. (г.Запорожье, 1993г.);
- научном семинаре кафедры зданий и сооружений аэропортов Киевского института инженеров гражданской авиации под руководством проф. Верюжского Ю.В. (г.Киев, 1993г.);
- научном семинаре кафедры сопротивления материалов и строительного дела Украинского государственного аграрного университета

под руководством проф. Цурпала И.А. (г.Киев, 1993г.);

- научном семинаре кафедры теоретической и прикладной механики Киевского автомобильно-дорожного института под руководством академика Транспортной Академии Украины проф. Рассказова А.О. (г.Киев, 1993г.);

- на научной конференции преподавателей и студентов Запорожского государственного университета (г.Запорожье, 1992г.);

- на Всесоюзной конференции "Перспективные информационные технологии в анализе изображений и распознавании образов" (г.Ташкент, 1992г.).

Публикации. По результатам выполненых исследований опубликовано 6 работ, в которых отражено основное содержание диссертационной работы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка литературы, содержит 167 страниц, включая 27 иллюстраций, 6 таблиц, список литературы содержит 77 наименований.

Содержание работы.

Во введении сделан краткий обзор работ по применению метода граничных элементов к решению краевых задач с бигармоническим оператором. Отмечены преимущества и недостатки метода граничных элементов в сравнении с методами типа конечных элементов и конечных разностей для рассматриваемого класса задач.

Отмечен приоритет отечественных ученых в развитии методов граничных интегральных уравнений (М.О.Башелейшвили, Т.Г.Бурчуладзе, Т.Г.Гегелиа, Н.А.Кильчевский, В.Д.Купрадзе, С.Г.Михлин, Н.И.Мусхелишвили, Г.Н.Савин, Д.И. Шерман и др.).

Указанно, что прогресс на этапе решения гранично-интегрального уравнения связан с применением процедуры кусочно-полиномиальной аппроксимации, заимствованной из метода конечных элементов (Р.Баттерфильд, П.Бенерджи, К.Бреббиа, Ю.В.Верюжский, Л.Вроубел, М.Джесван, Т.А.Круз, М.Мэйти, П.И.Перлин, Ф.Д.Риззо, В.А. Толок, Г.В. Т..овцев и др.).

Рассмотрены известные подходы к решению задач теории пластин Кирхгофа, основанные на методе граничных интегральных уравнений. Выполнен сравнительный анализ эффективности этих подходов. Отмечены их преимущества и недостатки. Обоснована необходимость дальнейшего развития методов граничных интегральных уравнений для краевых задач высокого порядка.

Подробно проанализирован альтернативный подход к решению задач с бигармоническим оператором, основанный на предварительной декомпозиции задачи. Сформулированы цель и задачи диссертации.

Приведен краткий обзор выполненной работы. Сделаны основные выводы.

Первая глава посвящена решению проблемы, возникающей при рассмотрении неоднородных краевых задач - исключению интегрирования по области в МГЭ, т.е. сведению задачи к чисто граничной. Развиты известные подходы к решению этой проблемы. В качестве приложения этих методов предложены эффективные схемы решения задач для уравнений Пуассона, Гельмгольца (Клейна-Гордона) и одного класса задач на собственные значения.

В частности, в § I.2 рассмотрена смешанная краевая задача для уравнения Гельмгольца (Клейна-Гордона).

$$\nabla^2 U - K^2 U = 0, \quad U|_{\Gamma_1} = \bar{U}, \quad \frac{\partial U}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \bar{q}. \qquad (1.1)$$

С помощью комбинации методов теории возмущений и МГЭ эта задача приводится к итерационному граничному интегральному уравнению:

$$C(P)U_\ell(P) + \int_\Gamma U_\ell(Q) \frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)d\Gamma(Q) = \int_\Gamma U^*(P,Q) \frac{\partial U_\ell}{\partial n}(Q)d\Gamma(Q) + \qquad (1.2)$$

$$+ K^2 \int_\Omega U_{\ell-1}(R)U^*(P,R)d\Omega(R), \quad \ell=1,2,3,\ldots$$

где $U^*(P,Q)$ - фундаментальное решение двумерного уравнения Лапласа, а интегрирование по области Ω может быть сведено к интегрированию по границе.

Таким образом, задача сводится к чисто граничной. Преимущества такого подхода являются результатом использования фундаментального решения уравнения Лапласа $U^*(P,Q)$ вместо гораздо более сложного фундаментального решения исходного уравнения.

В § 1.3 предложен численный алгоритм решения задачи на собственные значения, возникающей при исследовании колебаний жидкости в жестком сосуде.

$$\nabla^2\Phi = 0, \text{ в } \Omega; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_1; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \lambda\Phi = 0 \text{ на } \Gamma_2.$$

Ее особенность заключается в том, что собственный параметр λ входит в краевое условие, а не в дифференциальное уравнение, что так же, как и выше позволяет свести задачу к чисто граничной.

$$C_\ell\Phi_\ell + \int_\Gamma \left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial n} + \lambda\Phi^*\right)\Phi d\Gamma = 0,$$

где C_ℓ - известная константа, Φ^* - фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Вторая глава посвящена развитию альтернативного подхода к решению задач с бигармоническим оператором, в частности к задачам статического и температурного изгиба пластин Кирхгофа.

В § 2.I описан класс так называемых распадающихся задач, для которых дана формулировка метода граничных интегральных уравнений. Показано, что в случае распадающейся задачи эквивалентная система граничных интегральных уравнений может быть записана в виде:

$$C(P)w(P) + \int_\Gamma w(Q)\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)d\Gamma(Q) = \int_\Gamma U^*(P,Q)\frac{\partial w}{\partial n}(Q)d\Gamma(Q) + \int_\Omega M(P)U^*(P,R)d\Omega(R), \quad (2.I)$$

$$C(P)M(P) + \int_\Gamma M(Q)\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)d\Gamma(Q) = \int_\Gamma U^*(P,Q)\frac{\partial M}{\partial n}(Q)d\Gamma(Q) + \int_\Omega f(R)U^*(P,R)d\Omega(R)$$

где $M(P) = \nabla^2 w(P)$ и в отличие от соответствующего классического подхода использовано только фундаментальное решение $U^*(P,Q)$ уравнения Лапласа, что значительно повышает эффективность метода. Кроме того, используя результаты первой главы, показано, что во многих практически важных случаях интегрирование по области в (2.I) можно исключить. Уравнение (2.I) является основой исследования термостатического и температурного изгиба пластин в § 2.2 и § 2.3.

В § 2.2 сформулированы основные гипотезы и решен ряд тестовых и модельных задач об изгибе свободно опертых пластин симметричных форм под действием нормальной нагрузки и краевых моментов. Подтверждена эффективность такого варианта метода граничных элементов при решении задач реальной сложности.

В § 2.3 предложенный альтернативный вариант МГЭ развивается для случая температурного изгиба пластин Кирхгофа.

Задача

$$D\nabla^4 w = - \frac{1}{(1-\nu)} \nabla^2 M_T , \qquad (2.2)$$

где $M_T = \alpha E \int\limits_{-h/2}^{h/2} T(x,y,z) z dz$

с краевыми условиями свободного опирания

$$\omega_{|\Gamma} = 0,\ M_{|\Gamma} = \left\{ -D\left[\nabla^2 w + (\nu+1)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right] - \frac{M_T}{1-\nu}\right\}_{|\Gamma} = 0$$

приводится к распадающейся краевой задаче и затем к системе граничных интегральных уравнений с помощью метода частных решений, в соответствии с которым общее решение исходной задачи ищется в виде:

$$w = w^0 + w^p$$

В сочетании с методом граничных элементов метод частных решений позволяет исключить интегрирование по области для тех случаев, когда частное решение w^p неоднородного уравнения может быть найдено аналитически. В этом случае система интегральных уравнений (2.1) сводится к одному уравнению относительно прогиба w, дискретная форма которого имеет вид:

$$H(w) = G\left\{\frac{\partial w}{\partial n}\right\}$$

где H, G – матрицы коэффициентов влияния;

$\{w\}, \left\{\dfrac{\partial w}{\partial n}\right\}$ - векторы узловых значений переменных.

В общем случае w^p могут быть найдены с помощью метода неопределенных коэффициентов и для многих практических важных случаев эти решения легко записываются, исходя из вида функции $M(x,y)$ в (2.2). Тогда исследование температурного изгиба пластин сводится к решению разрешающего уравнения:

$$H\{w - w^p\} = G\left\{\frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial w^p}{\partial n}\right\},$$

дополненного соответствующими краевыми условиями. Эффективность реализации предложенного метода подтверждается решением ряда задач температурного изгиба прямоугольных пластин.

<u>Третья глава</u> посвящена развитию альтернативного варианта метода граничных интегральных уравнений для случая смешанной краевой задачи для бигармонического оператора. Поскольку в случае задачи Дирихле, как и в общем случае смешанной краевой задачи, декомпозиция исходной краевой задачи в пару несвязанных задач для уравнения Пуассона невозможна, использован альтернативный подход, основанный на методах теории возмущений. Он состоит в сведении краевой задачи Дирихле и смешанной краевой задачи для бигармонического оператора к последовательности распадающихся задач и последующей декомпозиции каждой из них. Использованный метод теории возмущений позволяет получить оценку сходимости. Никаких дополнительных гипотез не накладывается и эффективность решения значительно повышается. Эти преимущества сохраняются и в случае смешанной краевой задачи, учитывающей условия свободного опирания на части многоугольной границы.

На первом шаге предлагаемого алгоритма используется разложение, предложенное А.А.Дородницыным. Наряду с задачей

$$\nabla^4 w = f(x,y), \tag{3.I}$$

$$w_{|\Gamma} = \bar{w}, \quad \frac{\partial w}{\partial n}_{|\Gamma_1} = \bar{q}, \quad \nabla^2 w_{|\Gamma_2} = 0, \quad (\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2) \tag{3.2}$$

рассматривается однопараметрическое семейство краевых задач:

$$\nabla^4 w = f, \quad w_{|\Gamma} = 0, \quad \nabla^2 w_{|\Gamma} = \varepsilon\left(\mu \frac{\partial w}{\partial n} + \nabla^2 w\right)_{|\Gamma} \tag{3.3}$$

Решение ищется в виде

$$w = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \varepsilon^{\kappa} w_{\kappa} \tag{3.4}$$

и для задачи (3.3) получаем последовательность распадающихся задач

$$\nabla^4 w_0 = f(x,y), \qquad w_{0\,|\Gamma} = 0, \qquad \nabla^2 w_{0\,|\Gamma} = 0, \tag{3.5}$$

$$\nabla^4 w_\kappa = 0, \quad w_{\kappa\,|\Gamma} = 0, \quad \nabla^2 w_{\kappa\,|\Gamma} = \left(\mu \frac{\partial w_{\kappa-1}}{\partial n} + \nabla^2 w_{\kappa-1}\right)_{|\Gamma} = 0,$$

$\kappa = 1,2,3,\ldots$

каждая из которых может быть представлена в виде пары несвязанных задач для уравнения Пуассона. Б.В.Пальцевым показано, что ряд (3.4) сходится при $\varepsilon = I$ к точному решению задачи (3.I)-(3.2), если константа μ удовлетворяет условию

$$\frac{-2}{\|K\|} < \mu < 0, \tag{3.6}$$

где $\|K\|$ - норма некоторого оператора, пропорциональная квадрату линейного размера области Ω. Для круговой области с радиусом a значение $\|K\|$ может быть точно найдено:

$$\|K\| = \frac{a^2}{2}\sqrt{2\pi}\,.$$

В более общем случае смешанной краевой задачи постоянная μ определяется в виде кусочно постоянной функции

$$\mu = \begin{cases} 0 \ , \ \Gamma_2 \\ \mu_0 \ , \ \Gamma_1 \end{cases} \tag{3.7}$$

Каждая из задач последовательности (3.5) разлагается в пару несвязанных задач для уравнения Пуассона и затем записывается в интегральной форме

$$C(P)w_0(P) + \int\limits_{\Gamma} w_0(Q)\,\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)d\Gamma(Q) = \int\limits_{\Gamma} U^*(P,Q)\,\frac{\partial w_0}{\partial n}(Q)d\Gamma(Q) + \tag{3.8}$$

$$+ \int\limits_{\Omega} M_0(R)U^*(P,R)d\Omega(R) \ ,$$

$$C(P)M_0(P) + \int\limits_{\Gamma} M_0(Q)\,\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)d\Gamma(Q) = \int\limits_{\Gamma} U^*(P,Q)\,\frac{\partial M_0}{\partial n}(Q)d\Gamma(Q) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} f(R)U^*(P,R)d\Omega(R) \ ,$$

$$C(P)w_k(P) + \int\limits_{\Gamma} w_k(Q)\,\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)d\Gamma(Q) = \int\limits_{\Gamma} U^*(P,Q)\,\frac{\partial w_k}{\partial n}(Q)d\Gamma(Q) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} M_k(R)U^*(P,R)d\Omega(R) \ ,$$

$$C(P)M_k(P) + \int\limits_{\Gamma} M_k(Q)\,\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)d\Gamma(Q) = \int\limits_{\Gamma} U^*(P,Q)\,\frac{\partial M_k}{\partial n}(Q)d\Gamma(Q) \ ,$$

где $U^*(P,Q)$ - фундаментальное решение двумерного уравнения Лапласа.

Дискретизация уравнений (3.8) с помощью стандартной схемы применения метода граничных элементов для уравнения Пуассона, приводит к последовательности линейных алгебраических уравнений:

$$H\{w_o\} = G\left\{\frac{\partial w_o}{\partial n}\right\} + (D)\ ,\quad H\{M_o\} = G\left\{\frac{\partial M_o}{\partial n}\right\} + (T)\ ,$$

$$H\{w_к\} = G\left\{\frac{\partial w_к}{\partial n}\right\} + (Q)\ ,\quad H\{M_к\} = G\left\{\frac{\partial M_к}{\partial n}\right\},\quad к = 1,2,3,\ldots$$

где (w_o), $\left\{\frac{\partial w_o}{\partial n}\right\}$, (M_o), $\left\{\frac{\partial M_o}{\partial n}\right\}$, $(w_к)$, $\left\{\frac{\partial w_к}{\partial n}\right\}$, $(M_к)$, $\left\{\frac{\partial M_к}{\partial n}\right\}$ - векторы значений соответствующих переменных в узлах границы; H, G - матрицы коэффициентов влияния интегралов вдоль границы; (D), (T), (Q) - векторы значений объемных интегралов в (3.8). Использование граничных условий позволяет получить разрешающую систему алгебраических уравнений.

Описанный алгоритм является основой исследования статического и температурного изгиба пластин Кирхгофа со смешанными краевыми условиями в § 3.2 и § 3.3.

В § 3.2 исследован статический изгиб пластин Кирхгофа и решен ряд тестовых и модельных задач, позволяющих исследовать сходимость итерационной схемы и получить значения параметра μ, обеспечивающего наилучшую сходимость.

В § 3.3 предложенный алгоритм развивается на случай температурного изгиба пластин Кирхгофа. В этом случае имеем смешанную краевую задачу.

$$D\nabla^4 w = -\ \frac{1}{(1-\nu)}\,\nabla^2 M_т$$

$$w_{|\Gamma} = 0\ ,\qquad \frac{\partial w}{\partial n}{}_{|\Gamma} = 0$$

Использование разложения (3.4) приводит эту задачу к последовательности распадающихся задач:

$$D\nabla^4 w_0 + \frac{\nabla^2 M_T}{1-\nu} = 0, \quad w_0|_\Gamma = 0, \quad \left[D\nabla^2 w_0 + \frac{M_T}{1-\nu}\right]_{|\Gamma} = 0,$$

$$D\nabla^4 w_K = 0, \quad w_K|_\Gamma = 0, \quad D\nabla^2 w_K|_\Gamma = \left(\mu \frac{\partial w_{K-1}}{\partial n} + D\nabla^2 w_{K-1}\right)_{|\Gamma},$$

$K = 1,2,3,\ldots$

При этом для моментов и усилий, действующих в плоскости пластинки будем иметь:

$$M_n = -D\sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon^K \nabla^2 w_K = -D\sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon^K M_K,$$

$$M_T = -\nu D\sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon^K M_K, \quad V_n = Q_n = -D\sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon^K \frac{\partial M_K}{\partial n}.$$

Дальнейшая процедура совпадает с описанной ранее и приводит к последовательности граничных интегральных уравнений. Учитывая $M(P) = \left\{D\nabla^2 w(P) - \dfrac{M_T(P)}{1-\nu}\right\}_{|\Gamma} = 0$, имеем

$$C(P)w_0(P) + \int_\Gamma w_0(Q)\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)d\Gamma(Q) = \int_\Gamma U^*(P,Q)\frac{\partial w_0}{\partial n}(Q)d\Gamma(Q) -$$

$$- \frac{1}{D(1-\nu)}\int_\Omega M_T(R)U^*(P,R)d\Omega(R),$$

$$C(P)w_K(P) + \int_\Gamma w_K(Q)\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)d\Gamma(Q) = \int_\Gamma U^*(P,Q)\frac{\partial w_K}{\partial n}(Q)d\Gamma(Q) +$$

$$+ \frac{1}{D}\int_\Omega M_K(R)U^*(P,R)d\Omega(R).$$

$$C(P)M_k(P) + \int\limits_{\Gamma} M_k(Q)\,\frac{\partial U^*}{\partial n}(P,Q)\,d\Gamma(Q) = \int\limits_{\Gamma} U^*(P,Q)\,\frac{\partial M_k}{\partial n}(Q)\,d\Gamma(Q)\ ,$$

где Ω - область, занятая срединной поверхностью пластины с границей Γ.

С помощью разработанных в первой главе методов интегрирования по области можно исключить и привести задачу к чисто граничным интегральным уравнениям для многих практически важных случаев температурного нагружения. В качестве примера рассмотрена круговая пластина, находящаяся в температурном поле $T(x,y,z)$, удовлетворяющем условию $-\frac{1}{1-\nu}\nabla^2 M_T = \mathrm{const}$, где M_T - температурный момент.

Метод граничных элементов не может быть применен непосредственно для исследования конечного прогиба пластин, так как определяющие уравнения являются нелинейными.

В четвертой главе для исследования конечного прогиба пластин использовано уравнение Бергера, известное как псевдолинейное уравнение, аппроксимирующее нелинейный изгиб:

$$D(\nabla^4 w - \alpha^2 \nabla^2 w) = P\ ,$$

$$U_{,x} + \upsilon_{,y} + \frac{1}{2}\,(w^2_{,x} + w^2_{,y}) = \frac{\alpha^2 h^2}{12} = \mathrm{const}\ ,$$

где α^2 - константа Бергера, определяемая для пластин с неподвижными краями численно из соотношения

$$\frac{\alpha^2 h^2}{12}\,\Omega = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w\,\nabla^2 w\,d\Omega$$

Таким образом, нелинейное соотношение между внешней нагрузкой P и прогибом w вводится в уравнение с помощью слагаемого $D\alpha^2\nabla^2 w$.

Здесь по аналогии с рассмотренным ранее случаем линейного изгиба использована формулировка МГЭ в сочетании с методами теории возмущений. Для свободно опертой пластины задача нелинейного изгиба предварительно приводится к паре задач:

$$\nabla^2 w - \alpha^2 w = M, \quad w_{|\Gamma} = 0 \tag{4.1}$$

$$\nabla^2 M = \frac{P}{D}, \quad w_{|\Gamma} = 0$$

$$\frac{\alpha^2 h^2}{12}\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega (w^2_{,x} + w^2_{,y})d\Omega$$

а для случая защемленной пластины – к последовательности краевых задач:

$$\nabla^2 w_0 - \alpha^2 w_0 = M_0, \quad w_{0|\Gamma} = 0 \tag{4.2}$$

$$\nabla^2 M_0 = \frac{P}{D}, \quad M_{0|\Gamma} = 0$$

$$\nabla^2 w_k - \alpha^2 w_k = M_k, \quad w_{k|\Gamma} = 0, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\nabla^2 M_k = 0, \quad M_{k|\Gamma} = \left(\mu \frac{\partial w_{k-1}}{\partial n} + M_{k-1}\right)_{|\Gamma}$$

$$\frac{\alpha^2 h^2}{12}\Omega = -\frac{1}{2}\int_\Omega w \nabla^2 w \, d\Omega .$$

Затем задачи (4.1), (4.2) записываются в форме граничных интегральных уравнений, используя предыдущие результаты. Константа Бэргера α определяется итерационной процедурой. В качестве начального приближения для функций прогиба w и момента M принимается решение соответствующей линейной задачи ($\alpha = 0$). Использована процедура численного интегрирования по области, занятой пластиной.

Дискретизация полученной последовательности граничных интегральных уравнений с помощью стандартной процедуры МГЭ приводит к разрешающей последовательности линейных алгебраических уравнений.

Вопросы сходимости предложенной схемы решаются в случае нелинейного изгиба более сложным образом. Сходимость разложений $w = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k$ гарантируется выбором константы μ известными оценками (3.6), а сходимость итерационной процедуры, связанной с введением в уравнение нелинейных членов с помощью численного эксперимента. Во всех рассмотренных случаях для достижения приемлемой точности по константе Бергера α требовалось лишь несколько итераций.

В § 4.3 изложенная процедура исследования нелинейного изгиба использована для решения задач теории пластин канонической формы (квадратная и круглая в плане), подверженных действию нормальной нагрузки и удовлетворяющих условиям защемления. Полученные результаты сравниваются с точным решением и решением, даваемым линейной теорией. В рассматриваемом случае становится особенно важной высокая эффективность предложенного алгоритма, так как уравнение Бергера является, по сути, нелинейным.

<u>В заключении</u> сформулированы основные результаты и выводы диссертации, которые сводятся к следующему:

- разработан вариант метода граничных интегральных уравнений для решения краевых задач с бигармоническим оператором, отличающийся простотой и эффективностью;

- предложенный подход, состоящий в комбинации методов граничных интегральных уравнений и методов декомпозиции исходной краевой задачи, развит на задачах термостатического и температурного изгиба пластин Кирхгофа;

- возможности развитого метода позволяют включить в рассмотрение один класс задач нелинейного изгиба пластин (приближение Бергера) и построить эффективный алгоритм его решения;

- анализ полученных результатов и сравнение с результатами других авторов показали, что предлагаемый вариант метода граничных интегральных уравнений и пакеты прикладных программ могут быть успешно использованы в приложения.

Основные положения и результаты диссертации опубликованы в работах.

I. Толок В.А., Шадманов А.Т. Эффективный вариант метода граничных интегральных уравнений для решения уравнения Гельмгольца. //Перспективные информационные технологии в анализе изображений и распознавании образов: Тез.докл.Всес.конф.- Ташкент, 1992. - С.7I.

2. Туровцев Г.В., Шадманов А.Т. Итерационный метод граничных интегральных уравнений для исследования температурного изгиба пластин. //Прикладные проблемы прочности и пластичности. Сб.статей.- Горький: ГГУ, 199I. - Вып.49. - С.35-39.

3. Шадманов А.Т. Итерационный метод граничных элементов для уравнения Клейна-Гордона. //Тез.докл.научн.конф. преподавателей и студентов Запорожского ун-та.- Запорожье, 1992. - С.I5.

4. Шадманов А.Т. Приложения альтернативного гранично-элементного анализа к исследованию изгиба пластин. //К., 1992.- I5с. Деп. Укр.НИИНТИ, N 237 - Ук.92.

5. Шадманов А.Т. Приложения метода граничных элементов к исследованию изгиба пластин с произвольными граничными условиями. //К., 1992.- I6с. Деп.Укр.ИНТЭИ, N 870 - Ук.92.

6. Шадманов А.Т. Метод граничных элементов для класса задач на собственные значения, возникающие при исследовании колебания жидкости в жестком сосуде. //К., 1993.- 9с. Деп.в Укр.ИНТЭИ, N 246 - Ук.93.

Подписано к печати 10.09.1993 г. Формат 60x84/16

г. Запорожье, ООП ОУС, зак. № 1006, тир. 100 экз.