

Харківський авіаційний інститут ім. М.Є.Хуковського

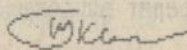
На правах рукопису

ТКАЧЕНКО ОЛЕКСАНДР ВАСИЛЬОВИЧ

АСИМПТОТИЧНИЙ ПІДХІД ЩОДО РІШЕННЯ
ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ПРУЖНИХ ПЛИТ ТА ПЛАСТИН
ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЙ ЗМІЩУВАНЬ

Спеціальність 01.02.04 -
Механіка деформованого твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук



Харків 1993

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00802603 (J)

Дисертація в рукопис.

Робота виконана Харківському авіаційному Інституті ім. М. Є Жуковського на кафедрі конструкцій літаків.

Науковий керівник - професор, кандидат технічних наук

Л.О.МАЛАШЕНКО

Офіційні опоненти :

доктор фізико-математичних наук, професор І.В.ГОНЧАРЮК,

кандидат технічних наук, доцент В.І.ПУСТИННИКОВ.

Ведуче підприємство - АНТК "Антонов"

Захист відбудеться " 26" листопада 1993 р.
на засіданні спеціалізованої ради К.053.140.01 при
Харківському авіаційному Інституті ім. М.Є Жуковського.
З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інститута.
Адреса інститута: 310084, м. Харків 84, вул. Чкалова, 17, ХАІ.

Автореферат відісланий " 25" жовтня 1993 р.

Вчений секретар

спеціалізованої ради

кандидат технічних наук,

професор

Г.Л.КОРНІЛОВ

Актуальність проблеми. Перспективи розвитку економіки тісно пов'язані з розвитком машинобудування — однієї з основ технічного прогресу всіх інших галузей господарства. Найбільш актуальною проблемою сучасного машинобудування виявляється підвищення надійності та економічності машин. Ця проблема дуже загострюється під час створення транспортних засобів, особливо авіаційної та ракетної техніки, тому що ефективна експлуатація останньої потребує максимумно можливого зниження матеріаломісткості при збереженні високої надійності та гарантованої безпечності. Рішення цієї проблеми напередочі потребує подальшого розвитку та удосконалення методів аналізу міцності конструкцій. Суттєвою складовою частиною таких методів виявляється розрахунок компонент напружено-деформованого стану (НДС) елементів конструкцій. Тому актуальним виявляється розвиток математичних моделей, які застосовуються при аналізі НДС.

Широке розповсюдження у багатьох галузях знайшли тонкостінні конструкції, основні яких є пластинки. Методи розрахунку пластинок розвиваються довгий час, проте інтенсивність робіт не зменшується. Досить відзначити, що бібліографія з цього питання за останні десятиріччя нараховує тисячі назв. Щодо факторів, які стимулюють таку увагу до цієї проблеми слід віднести бажання отримати адекватне відображення поведінки пластинок під навантаженням, усунути помилки та протиріччя розрахункових схем, що існують (з урахуванням виникнення нових матеріалів), а також бурхливий розвиток обчислювальної техніки та інформатики.

Усе вище згадане підтвержує актуальність та важливість питань, що розглянуті в дисертації.

Метою роботи є одержання форми зображення рішень задач трьохвимірної теорії пружності та теорії пластинок за допомогою спеціально вибраних функцій знічувань, що дозволяють виразити переміщення у вигляді сукупності полів, які мають визначені кінематичні властивості, що дозволяє одержати простіші рішення та більшу фізичну ясність, у наслідок чого суттєво спрощується:

- зіставлення рішень, які одержані теорією пластинок з точними рішеннями теорії пружності;
- аналіз точності й меж можливого застосування відношень різних теорій пластинок.

Наукова новина полягає у тому, що на основі застосування спеціальних функцій зміщуювань:

1) запропоновано варіант загальної форми рішення трьохвимірних задач теорії пружності, який дозволяє одержати більш прості рішення завдяки кінематичним властивостям полів зміщено. Було одержано рішення щодо пружного шару та півпростору при неоднорідних граничних умовах (ГУ), що задані на поверхні. Розглянуто зображення однорідних рішень для пружних плит. Виявлено, що при вигинанні товстих плит виникає деяка аналогія з плоским деформованим станом;

2) розглянуто форми рішень, щодо розрахунків задач тонких пружних пластинок (плоске НДС, вигин), та запропоновано метод щодо їх уточнення у випадку дії розподілених поверхневих навантажень, який дозволяє одержати точне рішення щодо випадку відображення навантажень поліномами. Проведено порівняльний аналіз уточнень з точним рішенням задачі про навантаження пружного шару, який показав їх асимптотичний збіг при зменшенні товщини;

3) проведено порівняльний аналіз, який показав асимптотичний збіг (коли товщина зменшується) головної частини рішень пружних плит та пластинок при вигинанні, що обумовлено неоднорідними механічними ГУ. Запропоновано розглядати ГУ класичної теорії, як асимптотичні, що дозволяє уникнути існуючих у класичній теорії питань, щодо урівноваженості пластинки;

4) одержано співвідношення для пластинок, які мають жорсткість вигину та характерний масштаб зміни НДС такі, що дозволяють вважати модуль поперечного зсуву нехтовно малим;

5) одержано співвідношення, які дають можливість порівняти рішення пластинок у межах моделей Тимошенко та класичної. Виявлено, що при великих значеннях жорсткості поперечного зсуву рішення моделі Тимошенка асимптотично наближаються до результатів класичної теорії, а при малих -- до результатів пластинок з нехтовно малим зна-

ченням жорсткості поперечного зсуву. Запропоновано ефективні методи уточнення рішень класичної теорії поблизу краю пластинок, які базуються на методі малого параметру, та проведено аналіз їх точності;

б) одержано зображення рішення на пластині, яка складається з трьох шарів із легким заповнювачем, що дозволяє записати основні рівняння у вигляді, що має форму подібну до рішення моделі Тимошенка.

Достовірність наукових результатів підтверджується порівнянням з результатами, які одержані для деяких випадків рішень задач іншими авторами на ґрунті інших співвідношень та методів, а також порівнянням розрахункових та експериментальних даних. Вона забезпечується використанням апробованих методів отримування рішень та надійним програмним забезпеченням.

Практична цінність результатів роботи у тому, що одержані зображення рішень задач вирахунків пружних шару, простору, плит та пластинок дають можливість:

1) зменшити час та витрати на обчислювання НДС із необхідною точністю для деяких задач, завдяки використанню одержаних формул запису кінцевих результатів та застосування розробленого апрограмно-го забезпечення;

2) уточнити межі використання співвідношень теорії тонких пластинок та усунути деякі логичні суперечності, що дає можливість підвищити достовірність результатів розрахунків;

3) пояснити причини незадовільної поведінки рішень, що отримані деякими чисельними методами (зокрема методом скінчених елементів у формі зміщень) при аналізі НДС тонких пластинок в межах моделі Тимошенка, що дає можливість знайти засоби до їх усунення.

4) використати добре опрацьовані способи вирішення задач класичної теорії пластинок, що ґрунтуються на ітераційних або асимптотичних методах, заради одержання більш точних результатів. Математичне та програмне забезпечення, що розроблено, можна використовувати для обчислювання НДС в системах автоматизованого проектування та аналізу міцності конструкцій. Результати дисертаційної роботи використовувались при виконанні договірних робіт і були впроваджені на підприємствах замовника.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на XXXVIII -- XXXXVI науково-технічних конференціях професорів та викладачів Харківського авіаційного інституту (м. Харків, 1986-89), на науково-технічних конференціях молодих вчених та фахівців КМЗ ім. О. К. Антонова (м. Київ, 4-6 травня 1987р.), ХАІ (м. Харків, 17-18 березня 1988р.), на 4 Всесоюзній Конференції "Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов" (м. Харків, 18-21 вересня 1991р.).

До захисту вноситься:

-- одержана функціональна форма зображення рішень задач трьох-вимірної теорії пружності та теорії пластинок за допомогою спеціально вибраних функцій зміщень, які дозволяють виразити зміщення у вигляді сукупності полів, що мають визначені кінематичні властивості;

-- одержані за її допомогою співвідношення для пружного шару, плит та пластинок, а також результати порівняльного аналізу поведінки рішень різноманітних моделей пластинок та їх уточнене з рішеннями, які одержані у рамках більш досконалих моделей (у тому числі й трьохвимірних) для певних значень відношення товщини до характерного масштабу зміни НДС, що показали їх асимптотичний збіг.

Публікації. Тема дисертації відображена у 5 наукових публікаціях.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з вступу, п'яти розділів, висновків, переліка літератури та двох додатків. Вона містить в собі 278 сторінок машинописного тексту, в тому числі 76 сторінок ілюстрацій та таблиць. Перелік використаної літератури містить в собі 152 назви.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність та практичне значення розвитку математичних моделей, що відображають поведінку пружних тонкостінних елементів. Підкреслена важливість удосконалення методів розрахунку НДС у пружних плитах та пластинках. Формується мета та

обмірковується новизна досліджень, міститься структура та анотація дисертації, а також результати її використання та практичного значення.

Перший розділ містить в собі стислий огляд методів та основних форм відображення рішень задач розрахунку НДС в пружних плитах, шарі, півпросторі, тонких пластинках (класична та уточнені теорії), що базуються на аналізі літератури. Відзначена велика різноманітність методів, що пов'язане з широким колом розв'язуваних задач. Визначене значення аналітичних та пов'язаних з ними асимптотичних методів.

Відзначено великий внесок у розробку теорії та методів розрахунку пружних пластинок та плит Е. Я. Абрамяна, В. В. Новожилова, А. І. Лур'є та цілого ряду інших дослідників.

Аналіз показав, що в переважній кількості публікацій з цієї тематики в останні роки розглядаються здебільшого питання здійснення чисельних методів. Тільки в деяких роботах порушуються питання розробки аналітичних та асимптотичних моделей та методів, хоча останні суттєво доповнюють обчислювальні методи і є найбільш ефективні та раціональні при рішенні цілого кола задач.

Одночасно слід відмітити, що одним з головних ускладнень при розробці, використанні та доведенні аналітичних методів до практично застосовуваних обчислюваних результатів та методів найчастіше є дуже складна форма відображення одержаних співвідношень.

Далі формулюється мета та задачі дослідження.

У другому розділі наведено запропоновану форму зображення рішень задач теорії пружності за допомогою набору функцій змішувань Φ , W_3 , Γ_3 , Ψ_3 . Зміщення точок тіла визначаються формулами:

$$u_\alpha = -W_{3,\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \Phi_{3,\beta} + \Phi_{1,\alpha} \quad (\alpha = 1,2), \quad u_3 = W_{3,3} + \Gamma_3 + \Phi_{1,3}$$

де $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ - компоненти тензора Леві-Чівіта.

Поля зміщено, які створюються через функції змішувань приведеного зкладу, мають такі кінематичні властивості.

Поле зміщено u_α^0 - безвихреве, оскільки вводиться через функцію

Φ , яка є скалярним потенціалом.

Функція Ψ_3 , яка є компонентом векторного потенціала, створює плоске вихрове поле зміщень u_{α}^{Ψ} частин тіла. Компонента вектора зміщень $u_3^{\Psi} = 0$. Деформації, які зв'язані зі зміненнями u_j^{Ψ} , відбуваються без зміни об'єму.

Функція Γ_3 створює тільки компоненту вектора зміщень u_3^{Γ} .

Компоненти вектора зміщень u_{α}^{Γ} , які створюються за допомогою функції W_3 , мають такі властивості:

$$e_{3\alpha}^{\Psi} = 0.5 (\alpha_{3,\alpha} + \alpha_{\alpha,3}) = 0.5 (W_{3,3\alpha} - W_{\alpha,3}) = 0,$$

$$e_{12}^{\Psi} = 0.5 (\alpha_{3,\alpha} - \alpha_{\alpha,3}) = 0.5 (W_{3,12} - W_{3,21}) = 0.$$

За допомогою використання переліку цих функцій одержується рішення системи однорідних рівнянь рівноваги пружного тіла, що мають такий вигляд:

$$\Psi_3 = \Psi_3^0, \quad W_3 = W_3^0, \quad \Gamma_3 = \Gamma_3^0, \quad \Phi = \Phi^0 + \Phi',$$

де $\Psi_3^0, W_3^0, \Gamma_3^0, \Phi^0$ - гармонічні функції;

$$\Phi' = \frac{1}{4\nu-1} (2W_{3,3} + \Gamma_3) x_3 - \text{бігармонічна функція};$$

ν - коефіцієнт Пуассона.

Одна з функцій W_3^0, Γ_3^0 є зайвою і може бути відкинута. До рівнянь рівнянь відноситься також сукупність функцій зміщень:

$$\Phi_i^{\epsilon} p_{\epsilon}(x_3), \quad \Psi_i^{\epsilon} p_{\epsilon}(x_3), \quad \Gamma_i^{\epsilon} p_{\epsilon}(x_3), \quad W_i^{\epsilon} p_{\epsilon}(x_3) \quad (0 \leq i \leq 3)$$

де $\Phi_i^{\epsilon}, \Psi_i^{\epsilon}, \Gamma_i^{\epsilon}, W_i^{\epsilon}$ - плоскі гармонічні функції координат x_{α} ;

$p_{\epsilon}(x_3)$ - поліном ступеня ϵ координати x_3 .

Відмічено, що аналоги функцій Φ, Ψ, Γ використовувались у ряді відомих функціональних зображень. Запропоновані форми зображення дозволять одержати нові форми рівнянь для багатьох відомих задач. Так, за допомогою методу Фур'є були одержані рішення задач теорії пружності для шару та півпростору. У рішенні, що одержано для плоского шару, використовувалась сукупність трансформант функцій:

$$\Phi_3 = \int_{-b_3}^{+b_3} \int_{-b_2}^{+b_2} \Phi_0^*(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = A^{\psi} chz + B^{\psi} shz,$$

$$W_3 = A^{\psi} chz + B^{\psi} shz,$$

$$\Phi = A^{\psi} chz + B^{\psi} shz - \frac{2}{2(1-\nu)} (A^{\psi} shz + B^{\psi} chz),$$

де $z = k_3 x_3$; $k_3 = 0 = (k_1^2 + k_2^2)^{0,5}$;

$$\Phi_0^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp(i(k_1 x_1 + k_2 x_2));$$

$A^{\psi}, B^{\psi}, A^{\psi}, B^{\psi}, A^{\psi}, B^{\psi}$ - функції хвильових чисел k_1, k_2 , які дозволяють відновити ГУ на межах шару.

При одержанні рішення для півпростору $x_3 < 0$ була використана сукупність трансформант функцій знічувано:

$$\Phi_3 = A^{\psi} e^z, \quad W_3 = A^{\psi} e^z, \quad \Phi = A^{\psi} e^z - \frac{2}{2(1-\nu)} A^{\psi} e^z.$$

Рішення визначається величинами

$$A^{\psi} = i \cdot (k_2 V_1 - k_1 V_2) / k_3^2, \quad A^{\psi} = \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \cdot (k_3 V_3 - i k_4 V_4) / k_3^2,$$

$$A^{\psi} = \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \cdot (k_3 V_3 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot i k_4 V_4) / k_3^2,$$

при заданих на грані $x_3 = 0$ зміщеннях $u_j|_{x_3=0} = V_j$ та

$$A^{\psi} = \frac{f_3}{2ik_3^2}, \quad A^{\psi} = \frac{i}{2ik_3^2} \cdot (k_2 f_1 - k_1 f_2), \quad A^{\psi} = \frac{1-\nu}{2ik_3^2} \cdot (k_3 f_3 - i k_4 f_4).$$

при заданих на грані $x_3 = 0$ напруженнях $\sigma_{3j}|_{x_3=0} = f_j$.

Як приклад наведено рішення задачі навантаження товстої квадратної плити (розмір в плані a , товщина $2h$) з шарнірно закріпленими краями, що здійснюється навантаженням, яке розподілене по верхній грані за законом

$$\sigma_{33}|_{x_3=h} = f_3^t = q \sin(kx_1) \sin(kx_2) \quad (k = \pi x_3/a).$$

Графіки розподілення по товщині амплітудних значень безвирірного прогину у центрі плити $u_3 = u_3^0 \frac{4h^2 D}{q}$ для $a/2h = 10, 5, 3$ зображені на рис.1.

Розглянуто зображення однорідних рівень пружних плит. При цьому поряд з плоским напруженим станом проведено аналіз вигину товстих плит. Виявлено, що при вигинанні товстих плит виникає деяка аналогія с плоским деформованим станом.

В третьому розділі розглянуті зображення рівень задач тонких пружних пластин (плоскі НДС та вигин), що базуються на використанні функція зміцувачів. Запропоновано метод, що дозволяє уточнити рішення класичної теорії тонких пластинок у разі дії розподілених поверхневих навантажень. Зроблено порівняльний аналіз уточнених рішень та асимптотичного розкладення за малим параметром, яке пов'язано с товщиною, з точним рішенням задачі про навантаження пружного шару, во показало їх асимптотичний збіг, коли товщина зменшується. Виявлено, що запропонований метод дозволяє одержати точне рішення щодо випадку відображення навантажень ступінчевими поліномами. Виявлено, що виділення з функціональних форм зображення НДС та навантажень компонент потенціального та плоского вихрового полів, істотно зрощує одержання рішення.

Рішення системи рівнянь рівноваги можна відобразити так:

$$\phi = \phi^0 + \phi^2 + \phi^3, \quad \psi = \psi^0 + \psi^2,$$

де ϕ^0 - гармонична функція;

ϕ^2 та ψ^0 - частинні рішення неоднорідних рівнянь

$$\phi_{, \alpha \alpha}^2 = - \left(p^2 (1-\nu) / (24h) + p_3 \nu / (24h) \right), \quad \psi_{, \alpha \alpha}^0 = - p^2 / (4h);$$

где ϕ^0 - гармоническая функция;

ϕ^2 та ψ^0 - бігармонічні функції, які пов'язані між собою порівняннями рівноваги

$$24h / (1-\nu) \phi_{, \beta \beta \alpha \alpha}^2 + 4h \epsilon_{3-\alpha \beta} \psi_{, \gamma \gamma \beta}^0 = 0;$$

$p_i = p_i^0 = (f_i^t - f_i^c) / 2 \quad (i=1, \dots, 3)$ - розподілені поверхневі навантаження.

Записано розподілені навантаження P_α через скалярний P^2 та векторний P^j потенціал

$$P_\alpha = P_{,\alpha}^2 + \epsilon_{3\alpha\beta} P_{,\beta}^j$$

Неважко встановити, що класична теорія має суперечності, які містяться у тому, що деформації ϵ_{2j} не відповідають плоскому полю зміщень $U_\alpha(x_1, x_2)$.

Додамо до рішення функції зміщувань, щоб усунути ці суперечності

$$\Phi = \Phi_2(x_1, x_2) P_2^2(\xi), \quad W_3 = W_2(x_1, x_2) W_2^2(\xi), \quad \Phi_3 = \Phi_2(x_1, x_2) P_2^2(\xi),$$

де $P_2^2(\xi) = a_0 + a_1 \xi^2$ ($k = \Phi, W, \Phi$);

$$\xi = x_2/h; \quad a_0 \text{ та } a_1 - \text{деякі коефіцієнти.}$$

Для однорідних рівнянь рівноваги, рішеннями яких є напруження $\sigma_{\alpha\beta}$, що відповідають ГУ та вводяться, наприклад, через бігармонічну функцію напружень $E \epsilon_{ij}$ за допомогою формули $\sigma_{\alpha\beta} = U_{,11} \delta_{\alpha\beta} - U_{,\alpha\beta}$

$$\epsilon_{3\alpha} = \sigma_{3\alpha}/2\mu = 0, \quad \epsilon_{33} = -\nu/E \sigma_{\alpha\alpha} = -\nu/E U_{,\alpha\alpha}.$$

Дані деформації можна задати за допомогою функції

$$W_3^2 = W_2(x_1, x_2) \cdot (1 - \xi^2),$$

де $W_2 = \nu/E h^2/6 \sigma_{\alpha\alpha} = \nu/E h^2/6 U_{,\alpha\alpha}$.

Функція W_3^2 відповідає умовам урівноваженості, оскільки

$$\Delta W_3^2 = \nu/E \Delta U_{,\alpha\alpha} h^2/6 \cdot (1 - \xi^2) = 0.$$

Так само одержані уточнення співвідношень для частинних рівень, що відповідають дії на пластинку розподілених поверхневих навантажень P_j .

Наприклад, для пластинки, що знаходиться під впливом навантаження P_3 , має місце

$$\Phi_{,\alpha\alpha} = -P_3 \nu/(2\mu), \quad \epsilon_{3\alpha} = 0, \quad \epsilon_{33} = (\sigma_{33} - \nu \sigma_{\alpha\alpha})/E = P_3(1-\nu^2)/E,$$

то візьмем функцію зміщувань у вигляді $W_3^2 = W_2(x_1, x_2) \cdot (1 - \xi^2)$

одержим $W_3^2 = -P_3(1-\nu)/24 h^2/6 \cdot (1-\xi^2)$.

Функції W_3^2 відповідають зміщення та напруження, які будемо відмечати верхнім індексом '2'

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^2 &= -W_{3,\alpha}^2 = P_{3,\alpha}(1-\nu)/24 h^2/6 \cdot (1-\xi^2), \\ \sigma_{\alpha\beta}^2 &= -24 (W_{3,\alpha\beta}^2 + \nu/(1-\nu) W_{3,\gamma\gamma}^2 \delta_{\alpha\beta}) = \\ &= (P_{3,\alpha\beta}(1-\nu) + \nu \Delta P_3 \delta_{\alpha\beta}) h^2/6 \cdot (1-\xi^2), \end{aligned}$$

Напруження $\sigma_{\alpha\beta}^2$ другого приближення одержимо з умов рівноваги

$$\sigma_{\alpha\beta}^2 = 24/(1-\nu) W_{2,\gamma\gamma}^2 h^3/6 \cdot \xi(1-\xi^2) = -P_{3,\gamma\gamma} h^3/6 \cdot \xi(1-\xi^2).$$

Зміщення u_3^2 , які мають другий порядок малости по відношенню до зміщень $u_3 = W_{3,3}^2 = P_3(1-\nu)/24 h^2$,

одержимо з рівнянь

$$\begin{aligned} u_{3,3}^2 &= \varepsilon_{33}^2 = -\nu/\Delta \sigma_{\alpha\alpha}^2 = -\nu/24 P_{3,\gamma\gamma} h^2/6 \cdot (1-\xi^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_3^2 = -\nu/24 P_{3,\gamma\gamma} h^3/6 \cdot \xi(1-\xi^2) \end{aligned}$$

Процес уточнення рішення має ітераційний характер. Доля складових кожної ітерації можна оцінити та зупинити процес уточнення при досягненні потрібної точності. Виявлено, що запропонований метод дозволяє одержати точне рішення щодо випадку відображення навантажень ступіневими подинамами.

Одержані співвідношення щодо уточнення рішення, які відповідають другому порядку малости величини відношення товщини пластинки до характерного масштабу НДС - $2h/a$. Вони можуть використовуватися щодо оцінки та підвищення точності одержання компонент НДС у практичних розрахунках. Розглянуті приклади порівняльного аналізу з результатами тривимірних рішень показали ідентичність як функцій зміщень, так і компонентів НДС, які визначаються за їх допомогою.

Четвертий розділ містить в собі одержані результати щодо використання запропонованих функцій зміщень до аналізу НДС у пластин-

ках при вигинанні, для яких важливим є урахування деформацій поперечного зсуву.

Один з суттєвих допущень класичної теорії пластинок, що ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа, є припущення щодо відсутності деформацій поперечного зсуву. Оскільки відповідні цим деформаціям дотичні напруження відрізняються від нуля, то для можливості існування такого НДС потрібно, щоб модуль поперечного зсуву прямував до безкінечності. В такому розумінні класичну теорію можливо розглядати як асимптотичну відносно удосконаленнях. При цьому нехтують енергією деформації пластини, яка пов'язана з поперечним зсувом.

На практиці зустрічаються випадки настільки невеликих модулів трансверсального зсуву, що нехтувати впливом деформацій поперечних зсувів на НДС неможливо. Відповідно з цим викликають зацікавленість співвідношення, що відображають поведінку пластинок у випадках гранично малих значень модуля трансверсального зсуву.

Розглянемо вигин пластинки, для якої

$$u_\alpha = \vartheta_\alpha(x_1, x_2) \cdot x_3, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2), \quad \varepsilon_{33} = 0.$$

На відміну від класичної теорії для цього поля зміщень є можливою поява компонентів деформації зсуву

$$\varepsilon_{3\alpha} = 0,5(u_{3,\alpha} + u_{\alpha,3}) = 0,5(u_{3,\alpha} + \vartheta_\alpha).$$

Найбільшим інтерес при розрахунках НДС пластинок становить визначення полів зміщень

$$u_\alpha = \vartheta_\alpha(x_1, x_2) \cdot x_3, \quad (\alpha=1,2)$$

оскільки саме з ними пов'язані найбільш важливі з практичної точки зору компоненти напружень $\sigma_{\alpha\beta}$ та деформацій $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Компоненти зміщень u_j , які пов'язані з $\varepsilon_{\alpha\beta}$ та $\sigma_{\alpha\beta}$, визначимо через функції зміщень

$$W_3 = W(x_1, x_2) x_3, \quad \Phi_3 = \Phi(x_1, x_2) x_3$$

за формулами

$$u_3 = W, \quad u_\alpha = (-W_{,\alpha} + \varepsilon_{3\alpha\beta} \Phi_{,\beta}) x_3.$$

Напруженнями σ_{33} нехтуємо в порівнянні з іншими компонентами тензора напружень. Компоненти дотичних напружень $\sigma_{\alpha\beta}$, які пов'язані

зі зміцненнями u , вважаємо нехтовно малими, що можливо тільки при $G_{z\alpha} = 0$. Таким чином ми фактично нехтуємо частиною енергії \bar{U} , яка пов'язана з трансверсальним зсувом, коли визначаємо поля зміщень, що пов'язані з плоскими полями $\sigma_{\alpha\beta}$ та $\epsilon_{\alpha\beta}$ (аналогія з класичною теорією вигину пластинки).

Прийняті гіпотези по суті відрізняються від гіпотез Кірхгофа тільки в одному: поряд з потенційними $\varphi_{\alpha}^0 = -W_{,\alpha}$ можливі також вихрові $\varphi_{\alpha}^0 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \psi_{,\beta}$ компоненти двувимірного поля φ , а таким чином стають можливими пов'язані з компонентами ϵ $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \psi_{,\beta}$ деформації поперечного зсуву. Одночасно напруження $\sigma_{z\alpha}$ також повинні бути пов'язані з деяким полем зміщень, за яке візьмемо компоненту зміщення $u_3 = \Gamma$. У межах прийятих гіпотез намісце

$$\sigma_{z\alpha} = G_{z\alpha} \Gamma_{,\alpha} \gg G_{z\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \psi_{,\beta} \neq 0.$$

Рівняння рівноваги

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{z\alpha} + n_{\alpha} = 0, \quad Q_{z\alpha,\alpha} + Q_3 = 0$$

та ГУ на незакріпленій частині контуру C_1

$$M_{\alpha n} = M_{\alpha\beta} n_{\beta} = M_{\alpha n}, \quad Q_{3n} = Q_{z\alpha} n_{\alpha} = Q_{3n}, \quad \varphi_{,n}^0 = \epsilon_{3\alpha}^0 \psi_{,\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \psi_{,\beta} n_{\alpha} = 0,$$

одержані з принципу віртуальних робіт.

Тут n_{α} - косинуси нормалі до контуру пластинки.

$M_{\alpha\beta}$, $Q_{z\alpha}$ - моменти та перерізувальні сили;

$M_{\alpha n}$, Q_{3n} - значення величин на межі;

n_{α} , Q_3 - розподілені моменти та перерізувальні сили.

Зобразимо вектор моментів \bar{M} за допомогою скалярного M^2 та векторного в потенціалів $\bar{m}_{\alpha} = M^2_{,\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} m^{\beta}_{,\gamma}$, ізробимо припущення, що жорсткості циліндрична D та зсувна $G_{z\beta}$ є постійні. Тоді рівняння рівноваги запишемо у такому вигляді

$$(-D) W_{,\alpha\alpha} + M^2 (G_{z\alpha} 2\beta \Gamma)_{,\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (0,5K(1-\nu) \psi_{,\alpha\alpha} + m^{\alpha})_{,\beta} = 0,$$

$$G_{z\alpha} 2\beta \Gamma + Q_3 = 0.$$

У разі відсутності перерізувальних сил та розподілених моментів два перших рівняння рівноваги мають вигляд

$$M_{\alpha\beta} = 0$$

та описувать чистий вигин. Рівняння у такому випадку можна одержати тими ж методами, що використовуються для плоскої задачі теорії пружності. Це дає певні переваги, оскільки методи рішення таких задач добре розроблені.

Одержане зображення рішення через функції зніжувань щодо пластинок Тимошенка, яке використовує надто натуральні й прості вирази, що урахують деформації поперечного зсуву

$$u_{\alpha} = U_{\alpha}(x_1, x_2) \cdot x_3, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2).$$

Зобразимо зніження за допомогою функцій зніжувань

$$W_3 = W(x_1, x_2) x_3, \quad \Phi_3 = \Phi(x_1, x_2) x_3, \quad \Gamma_3 = \Gamma(x_1, x_2)$$

за формулами

$$u_{\alpha} = (-W_{,\alpha} + \epsilon_{3\alpha\beta} \Phi_{,\beta}) x_3, \quad u_3 = W + \Gamma.$$

Рівняння рівноваги можна записати у вигляді

$$-D \Delta W_{,\alpha} + 0,5K(1-\nu) \epsilon_{3\alpha\beta} (\Delta \Phi - z^2 \Phi)_{,\beta} - G_3 2h \Gamma_{,\alpha} + p_{\alpha} = 0,$$

$$G_3 2h \Delta \Gamma + q_3 = 0,$$

де $z^2 = \frac{2G_3 2h}{K(1-\nu)}$, або переписати так

$$\Delta \Gamma = -q_3 / G_3 2h, \quad \Delta W = \frac{p_{\alpha}^2}{D} - \frac{(1-\nu) z^2}{2} \Gamma, \quad \Delta \Phi - z^2 \Phi = -\frac{2p_{\alpha}^2}{K(1-\nu)}.$$

Одержане зображення рішення для пластин Тимошенка через функції зніжувань дозволяє явно порівняти його з зображенням рішення класичної теорії вигину пластинок.

Виявлено, що при великих значеннях параметра $\lambda = l/(2a)$ (a - характерний масштаб НДС) рішення моделі Тимошенка асимптотично наближуються до результатів класичної теорії, а при малих - до результатам пластинок з нехтовно малим значенням жорсткості поперечного зсуву.

Розраховані за допомогою формул для пластинок з нехтовно малим модулем трансверсального зсуву напруження дають верхні оцінки значень концентрації відносно тих, які одержані в моделі пластин Тимо-

шенка. Ці співвідношення дають найкращі результати при розрахунках НДС в елементах конструкцій, які схематизуються пластинкою або з малим значенням жорсткості трансверсального зсуву, або с малими по відношенню до товщини розмірами області зміни (концентрації) компонент НДС, прикладани яких є трюохшарові панелі з тонкими несучими шарами та легким заповнювачем, панелі з деяких композитних матеріалів, зони тріщин малої протяжності.

Зображення рішення моделі пластин Тимошенка, що дозволяє відверто розділити рішення на вигинове та таке, що зникає біля краю, дає незалежні переваги, оскільки стає можливим застосування асимптотичних моделей, якими виявляються класична теорія пластинок та співвідношення для пластинок з нехтовно малим модулем трансверсального зсуву (аналогічні співвідношенням плоскої задачі теорії пружності), разом із методами теорії малого параметру для визначення НДС. Часто це простіше зробити, оскільки методи рішення таких задач добре розвигі.

В роботі запропоновані способи уточнення рішень, які ґрунтуються на методі малого параметру та дають можливість здійснювати уточнення у обох випадках.

Уточнення рішення класичної теорії одержано фактично ітераційно: за допомогою нульового приближення (що відповідає моделі Кірхгофа) та третього ГУ на немі, якому не вдається відповідати в класичній теорії (для механічних ГУ це $Q_{3N} = Q_{3D}$ для геометричних $\theta_3 = \theta_3$), відбудовується функція Ψ_1 . Використання Ψ_1 приводить до порушення двох інших ГУ. Усунувши це порушення одержимо Ψ_2 і т.д. Процес уточнення рішення на практиці є дуже ефективним і може бути використаним для різноманітних (чисельних та аналітичних) методів рішення задач. Результати аналізу прикладів показують, що при $\lambda \ll 1$ вистачить однієї ітерації для достатнього збігу з точним рішенням.

Про точність та немі застосування асимптотичних зображень можна робити висновки, аналізуючи графіки, що зображені на рис. 2. Якщо можливо допустити максимальну помилку $\approx 3\%$, то співвідношеннями класичної теорії можна використовувати при $\lambda < 0,03$, а уточнення рішення першого порядку при $\lambda < 0,5 \dots 0,3$.

За допомогою функцій змінено W, Φ, Γ в межах лінійної теорії Хорфа та теорії Тимошенка (у разі можливості знехтувати товщиною несучого шару) одержані зображення рішень пластинки, що складається з трьох шарів з легким заповнювачем.

Змінення одержано через функції змінювані

$$W_3 = W(x_1, x_2) x_3, \quad \Gamma_3 = \Gamma(x_1, x_2), \quad \Phi_3 = \Phi(x_1, x_2) x_3$$

за допомогою співвідношень:

- несучий шар $|x_3| \in [h, h + 2h]$

$$u_z = W + \Gamma, \quad u_\alpha = -W_{,\alpha} x_3 - \Gamma_{,\alpha} (x_3 - h_1) + \epsilon_{\alpha\beta} \Phi_{,\beta} h;$$

- заповнювач $|x_3| \in [0, h]$

$$u_z = W + \Gamma, \quad u_\alpha = -W_{,\alpha} x_3 + \Gamma_{,\alpha} \frac{h}{h} x_3 + \epsilon_{\alpha\beta} \Phi_{,\beta} x_3.$$

Суттєві компоненти напружень в несучому шарі відображаються рівняннями

$$\sigma_{\alpha\beta} = -2\mu(W_{,\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \Delta W) x_3 - 2\mu(\Gamma_{,\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \Delta \Gamma) x_3 - h_1 + \\ + \mu(\epsilon_{\alpha\beta} \Phi_{,\gamma\delta} + \epsilon_{\beta\gamma} \Phi_{,\alpha\delta}),$$

а в заповнювачі - рівняннями

$$\sigma_{\alpha\beta} = 6 h_1 / h \Gamma_{,\alpha\beta} + 6 \epsilon_{\alpha\beta} \Phi_{,\gamma\delta}.$$

де

$2h$ - товщина несучого шару пластини;

$2h$ - товщина заповнювача пластини;

$h_1 = h + \frac{h}{2}$ - відстань від середньої площини до середини несучого шару.

Рівняння рівноваги при $q_z = 0$ можна подати у вигляді

$$\Delta \Phi - z \Phi = 0, \quad \Delta \Delta (W - \chi^{-2} W) = q_z, \quad \Gamma_{,\alpha} = \frac{2}{1-\nu} z^{-2} W_{,\alpha},$$

де $D = D + 2D$ - вигинова жорсткість пластини;

$$\chi^{-2} = \frac{2D}{h} \frac{2}{1-\nu} z^{-2}.$$

Зображення рішень трьохшарових пластин через функції змінювані дозволяє записати основні рівняння у вигляді, який має форму подібну рівнянню поделі Тимошенка. Завдяки цьому стає можливим викреслити

частинні рішення, які ідентичні моделям пластинок Тимошенка та класичної, а також ті, що швидко затухають біля країв.

У п'ятому розділі роботи співставлено результати рівняння задач та експериментальні дані.

Одержане рішення для прямокутної пластинки розмірами $a \times b$ з шарнірно опертими краями, яка навантажена рівномірно розподіленим тиском q . Рівняння відображено через зображення

$$W = W' + W_1 + W_2, \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad \Gamma = -2/(1-\nu)z^2 W,$$

де W' - частинне рішення рівняння $\Delta W = q/D$;

$$W_1 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (A_{1n} \operatorname{ch}(k_{1n} x_2) + B_{1n} k_{1n} x_2 \operatorname{sh}(k_{1n} x_2)) \sin(k_{1n} x_1); \quad (1-2, 2-1)$$

$$\Psi_1 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (C_{1n} \operatorname{sh}(\sqrt{k_{1n}^2 + k_{2n}^2} x_2)) \cos(k_{1n} x_1);$$

$$k_{1n} = n\pi/a, \quad k_{2n} = n\pi/b.$$

Безкінечна система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно констант $A_{1n}, B_{1n}, C_{1n}, A_{2n}, B_{2n}, C_{2n}$ одержана через задовільнення ГУ. Розглянуті випадки шарнірного закріплення (одержано точне рішення) та шарнірного опирання країв (рівняння одержано двома методами: через використання малого параметра $\lambda = 1/(za)$ і через розрішення відсіченої частини безкінечної системи).

Для величини максимального безрозмірного вигину в центрі квадратної пластини з розміром сторони a , яка має шарнірно закріплені края, одержано співвідношення

$$U_3^0 = U_3^0/cqa^4/D = 0,00405589 (1 + c/(1-\nu)\lambda^2),$$

Якщо сторони пластини шарнірно оперті, має місце асимптотичне співвідношення

$$U_3^0 \approx 0,00405589 (1 + b(1-\nu)\lambda + c/(1-\nu)\lambda^2),$$

де $a = 36,270$, $b = 3,8918$, $\lambda = 1/(za)$.

На рис.3 зображені графіки залежності безрозмірних вигинів U_3^0 в центрі пластини від параметру λ . Там також виділені значення

результатів випробувань трьохслойних пластин, що наведені в роботі¹

Експериментальні точки лежать поблизу від кривої, яка відповідає вигинам в центрі пластини з шарнірно опертими краями. Аналіз графіку дозволяє відмітити, що обчислені значення вигину пластини, які одержані за допомогою асимптотичних співвідношень першого порядку, практично не відрізняються від значень, що одержані рішенням системи рівнянь метода суперпозиції U_3 (одержати рішення такої системи набагато важче).

Здійснений аналіз підтверджує добрий збіг результатів розрахунків пластин за приведеними формулами, що відповідають моделі Тимошенки, з результатами випробувань та обчислень інших авторів. Дослідження впливу характеру опирання края на величини вигинів показало, що результатом випробувань в деяких випадках можна задовільнити тільки при вільно опертих сторонах пластини. Проведено також дослідження впливу на величину вигину жорсткості поперечного зсуву елемента, який підкріплює края панелі. Показано, що асимптотичні співвідношення дають досить приємну точність та одночасно суттєво спрощуть розрахунки.

Було проведено порівняння результатів досліджень та обчислень для вільно опертих трьохслойних стержнів, що мали зовнішні шари з алюмінієвого сплаву та заповнювач з пінопласту, які навантажувались поперечним тиском, що розподілений за законом синуса. Формули для обчислення вигинів та напружень в стержнях одержані за допомогою співвідношень теорії трьохшарових пластин. Найбільші безрозмірні вигини та напруження в середині стержня визначаються співвідношеннями, які характеризують відміну від класичної теорії

$$U_3 = 1 + (\pi\lambda)^2, \quad \sigma^+ = 1 + (\pi\eta)^2,$$

де $\lambda = (\pi a)^{-1}$; $\eta^2 = \lambda^2 2t/(h+2t)$; $z^2 = 2G_3/(Eh^3)$;

a - відстань проніж опори;

$2t$ - товщина несучого шару;

¹ Александров А.Я., Бриккер Л.Э., Куршин Я.М., Прусаков А.П.
Расчет трехслойных пластин. М.: Оборонгиз, 1960. - 272 с.

$2h$ - товщина заповнювача.

Результати розрахунків відображені на рис.4. Вони добре збігаються з результатами експерименту та обчислювань інших авторів.

Проведений аналіз показує:

- 1) найголовніший вплив на компоненти НДС чинить параметр λ ;
- 2) частина вигину, якому в межах теорії трьохшарових систем відповідає функція W , практично збігається з вигином, що обчислюється у межах класичної теорії, оскільки вплив жорсткості несучих шарів на величину вигину нехтовно малий. Значення вигинів, які одержані для балок у межах теорії трьохшарових систем та моделі Тимошенка, майже не відрізняються;
- 3) при розрахунках нормальних напружень вплив додаткового вигину несучих шарів (функція Γ) є надто істотний. Він характеризується квадратом величини η^2 (визначається параметром λ та відношенням товщини несучого шару до повної товщини елемента). Тому визначення максимальних значень нормальних напружень в несучих шарах за допомогою співвідношень теорій класичної або Тимошенка може давати значні помилки, що ілюструється наведеним прикладом.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ.

Наведені в дисертаційній роботі основні наукові результати полягають в тому, що за допомогою використання розглянутих функцій злідувань:

- 1) запропоновано варіант загальної форми рішення трьохвимірних задач теорії пружності, який дозволяє одержати більш прості рішення завдяки кінематичним властивостям полів зміщень. Було одержано рішення щодо пружного шару та півпростору при неоднорідних граничних умовах (ГУ), що задані на поверхні. Розглянуто зображення однорідних рішень для пружних плит. Виважено, що при вигинанні товстих плит виникає деяка аналогія з плоским деформуванням станом;
- 2) розглянуто форми рішень, щодо розрахунків задач тонких пружних пластинок (плоске НДС, вигин), та запропоновано метод щодо їх уточнення у випадку дії розподілених поверхневих навантажень, який дозволяє одержати точне рішення щодо випадку відображення на-

вантажені поліномами. Проведено порівняльний аналіз уточнень з точним рішенням задачі про навантаження пружного шару, який показав їх асимптотичний збіг при зменшенні товщини;

3) проведено порівняльний аналіз, який показав асимптотичний збіг (коли товщина зменшується) головної частини рівень пружних плит та пластинок при вигинанні, що обумовлено неоднорідними механічними ГУ. Запропоновано розглядати ГУ класичної теорії, як асимптотичні, що дозволяє уникнути існуючих у класичній теорії питань, щодо урівноваженості пластинки;

4) одержано співвідношення для пластинок, які мають жорсткість вигину та характерний масштаб зміни НДС такі, що дозволяють вважати модуль поперечного зсуву нехтовно малим;

5) одержано співвідношення, які дають можливість порівняти рішення пластинок у межах моделей Тимошенка та класичної. Виявлено, що при великих значеннях жорсткості поперечного зсуву рішення моделі Тимошенка асимптотично наближаються до результатів класичної теорії, а при малих -- до результатів пластинок з нехтовно малим значенням жорсткості поперечного зсуву. Запропоновано ефективні методи уточнення рівень класичної теорії поблизу країв пластинок, які базуються на методі малого параметру, та проведено аналіз їх точності;

6) одержано зображення рішення на пластині, яка складається з трьох шарів із легким заповнювачем, що дозволяє записати основні рівняння у вигляді, що має форму подібну до рішення моделі Тимошенка.

Основний зміст дисертації було опубліковано в роботах:

1. Сравнительный анализ результатов расчета пластин асимптотическими и точными методами. // Современное состояние проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов: Тез. докл. 4 Всесоюзн. конф. Харьков, 18-21 сентября 1991 г. / Харьков, 1991. с. 34. (савтор Малащенко Л.А.)

2. Ікаченко А.В. Об одной форме представления решений задач теории упругости с помощью функций сдвига. // Материали науочно-технічної конференції молодих учених і спеціалістів. Харьков, 17 - 18 марта 1988 г. / Харьков, 1988. с.38-45. /Деп. в ВИНТИ, N 131 - ВВ8.

3. Ткаченко А.В. Асимптотическая теория пластин с пренебрежимо малым модулем трансверсального сдвига. // Материалы научно - технической конференции молодых ученых и специалистов. Харьков, 17 - 18 марта 1988 г. / Харьков, 1988. с. 46 - 54. /Деп. в ВИНИТИ, № 132 - 888.

4. Разработка методики расчета и прочностного анализа листов воя толстостенной конструкции: Отчет о НИР (итоговый)/ИПО "СИНТАЛ-Д"; Руководитель В.И.Рябков, исп. А.В.Ткаченко, М.В.Синькевич и др. № УА01007910Р. Харьков, 1992. 24 с.

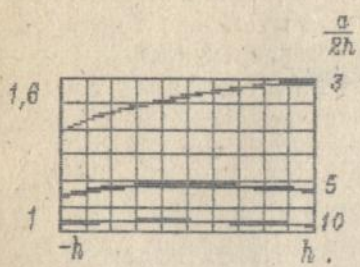


Рис. 1

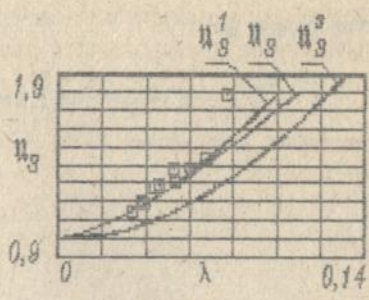
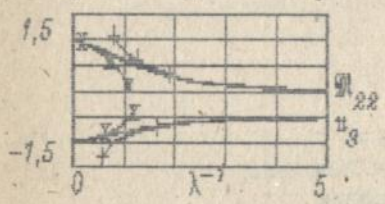
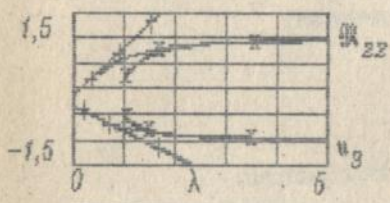


Рис. 3

$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} / (D(1-\nu)k)$, $u_s = u_s k$
 $M = 1, Q = H = 0, \nu = 1/3$



Уточнення на основі :
 + - класичної теорії ;
 x - малої жорсткості зсуву.

Рис. 2

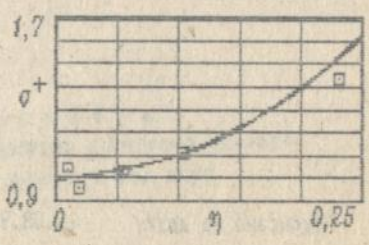
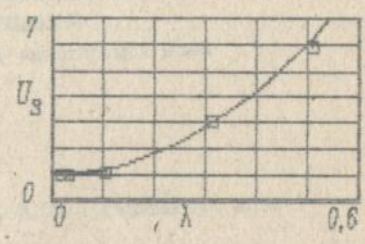


Рис. 4

ВКМ

1.0 0.25 1.1

АВ 28.318

Підписано до друку 12.08.93 г.

Тир. 100 прим.

Харківський авіаційний інститут ім. М. Є. Хуковського.

310084, м. Харків 84, вул. Чкалова, 17