АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

на правах рукопису

ГАМАЛІЯ РОСТИСЛАВ ВІТАЛІЙОВИЧ

ПРО ДЕЯКІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗА ІНДЕКСОМ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.03 - математична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1993

Робота виконана на кафедрі вищої математики МІ Київського політехнічного інституту.

НАУКОВИЙ КЕРІВНИК: доктор фізико-математичних наук, професор ВІРЧЕНКО Н.О.

ОФІЦІЙНІ ОПОНЕНТИ: доктор фізико-математичних наук, професор МАРТИНЮК Д.І., кандидат фізико-математичних наук, доцент ЯКОВЕНКО В.М.

ПРОВІДНА УСТАНОВА: Інститут прикладних проблем механіки і математики АН України

Захист відбудеться "30" листопада 1993р. о 15⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України (252004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3)

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту

Автореферат розісланий "22" жовтня 1993р.

Вчений секретар спеціалізованої ради,
доктор фізико-математичних наук Лучка А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В останні роки при розв'язанні багатьох технічних задач з'явилась гостра потреба у дослідженні різноманітних фізичних процесів (механічних, теплових, електромагнітних та ін.) в об'єктах зі складною геометричною формою, що складаються з різних середовищ з нелінійними характеристиками. Математично задача полягає у знаходженні розв'язку системи нелінійних диференційних рівнянь з розривними коефіцієнтами при заданих граничних умовах.

Пряме розв'язання такої задачі за допомогою наближених методів становить значні труднощі через великий об'єм обчислень. У багатьох практичних випадках вдається одержати розв'язок шляхом розв'язання деякого числа лінеаризованих задач. Тоді ефективність алгоритму визначається швидкістю розв'язання відповідних лінійних задач. Особливу цінність у цьому випадку становить наявність точного аналітичного розв'язку лінійної задачі.

Одним із найбільш поширених та ефективних аналітичних методів розв'язання вищезгаданих задач є метод інтегральних перетворень. Можна виділити два основні класи інтегральних перетворень. До першого класу входять інтегральні перетворення типу згортки (перетворення Фур'є, Лапласа, Мелліна, Ганкеля, Гільберта та ін.). Другий клас містить так звані інтегральні перетворення за індексом (приміром, інтегральні перетворення Конторовича-Лебедєва, Мелера-Фока, Олевського, Віша та ін.). Якщо теорія інтегральних перетворень першого класу розроблена достатньою мірою, то теорії інтегральних перетворень другого класу ще далеко до завершення.

Слід зауважити, що застосування методу інтегральних перетворень в основному обмежується лінійними диференціальними рівняннями з неперервними коефіцієнтами та класичними граничними умовами (першого, другого та третього родів). Бажання відмовитись від цих обмежень привело до розвитку двох методів - методу парних або N-арних інтегральних (рядових) рівнянь та методу гібридних інтегральних перетворень. Між цими двома методами існує тісний взаємозв'язок, тому що формулу обернення для будь-якого гібридного інтегрального перетворення з N точками спряження можна розглядати як розв'язок відповідного N-арного інтегрального рівняння та навпаки, якщо відомо розв'язок деякого N-арного інтегрального рівняння, то його можна розглядати як гібридне інтегральне перетворення з N точками відокремлення.

Вперше задача про парні інтегральні рівняння була сформульована Вебером в 1872р. і розв'язана Бельтрамі в 1881р. Пізніше з'явилось велика кількість робіт, присвячених розв'язанню окремих парних (N-арних) інтегральних рівнянь. Однак, лише в деяких випадках вдавалось знаходити розв'язок у замкнутій формі.

Основи методу гібридних інтегральних перетворень було викладено в роботах Я.С.Уфлянда, І.А.Єфімової, Є.А.Нікової (1960 - 1974рр.). Різноманітним застосуванням гібридних інтегральних перетворень та побудові нових формул обернення було присвячено роботи В.С.Проценко (1972 - 1982рр.), Найди (1983 - 1984 рр.) та ін. Подальший розвиток методу гібридних інтегральних перетворень подано в працях М.П.Ленюка та його учнів (1985 - 1992рр.). Зауважимо, що в більшості цих робіт при побудові формул обернення гібридних інтегральних перетворень використовувався єдиний підхід, детально викладений Я.С.Уфляндом в 1976 р. По своїй суті це операційний метод. Однак, всі обчислення носять формальний характер, результати вимагають повнішого математичного обгрунтування. Окрім того, складність викладок у багатьох випадках не дозволяє отримати формули обернення гібридних інтегральних перетворень з числом точок спряження більшим двох.

Вищевказані обставини визначили напрям дисертаційної роботи. Дисертація присвячена побудові, дослідженню та застосуванню нових інтегральних перетворень за індексом.

Метою даної роботи є побудова ядер прямих та обернених гібридних інтегральних перетворень з функціями Віттекера та Лежандра у випадках однієї, двох та N точок спряження, застосування одержаних результатів для розв'язання деяких задач математичної фізики, обчислення невласних інтегралів та розв'язання парних (N-арних) інтегральних рівнянь.

Методика дослідження. У дослідженнях використовувались елементи теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, операційне числення, теорія спеціальних функцій, а також розроблений автором метод асимптотичних оцінок.

Наукова новизна дисертаційної роботи.

Методом асимптотичних оцінок побудовано інтегральне перетворення з модифікованими функціями Віттекера $W_{\mu,i\tau}(x)$ в ядрах, яке при $\mu=0$ переходить у класичне інтегральне перетворення Конторовича-Лебедєва. Доведено теорему про існування оберненого перетворення, одержано узагальнену рівність Парсеваля та композиційні співвідношення з дробовим інтегралом Вейля та узагальненим інтегральним перетворенням Мелера-Фока (з узагальненою приєднаною функцією Лежандра першого роду $P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$). Подано застосування вказаних співвідношень для обчислення нових невласних інтегралів від спеціальних функцій та розв'язання парних інтегральних рівнянь з функціями Віттекера в ядрах.

Операційним методом побудовано гібридні інтегральні перетворення з модифікованими функціями Віттекера в ядрах з однією та двома точками спряження.

Методом асимптотичних оцінок одержано структуру ядер гібридних інтегральних перетворень з N точками спряження, що містять модифіковані функції Віттекера. Доведено відповідну теорему розгорнення.

Операційним методом побудовано гібридні інтегральні перетворення Віттекера-Лежандра-Віттекера та Лежандра-Віттекера-Лежандра на обмеженій зліва півпрямій з двома точками спряження, що містять модифіковані функції Віттекера та приєднані функції Лежандра в ядрах.

Методом асимптотичних оцінок доведено теорему розгорнення функції, що справджує умови Діріхле, інтегровної з точно визначеною вагою в інтеграли з кусково-неперервними ядрами гібридних інтегральних перетворень Віттекера-Лежандра-Віттекера та Лежандра-Віттекера-Лежандра.

- Методом асимптотичних оцінок доведено теорему про розгорнення абсолютно сумовної з точно визначеною вагою функції, що справджує умови Діріхле, в інтеграли з кусково-неперервним ядром гібридного інтегрального перетворення з N точками спряження.
- Досліджено властивості ядер одержаних гібридних інтегральних перетворень, що дозволяють використовувати їх для розв'язання різноманітних задач математичної фізики. Подано конкретні приклади розв'язання таких задач.

Практична цінність. Одержані в дисертації інтегральні перетворення можуть використовуватись в різноманітних задачах теплофізики, механіки, електрофізики тощо. Зокрема, апарат цих інтегральних перетворень може бути використаний при дослідженні електромагнітних та теплових полів в електротехнічних пристроях.

Апробація. Основні результати роботи доповідались на Міжнародній науковій конференції "Диференціальні та інтегральні рівняння. Математична фізика та спеціальні функції" (м.Самара, 1992р.); міжвузівському науковому семінарі "Крайові задачі математичної фізики" (м.Київ, 1992р.); Міжнародній конференції "The Third International Colloquium on Differential Equations" (Болгарія, Пловдів, 1992р.); Всесоюзній науково-технічній конференції "Математичне моделювання в енергетиці" (м.Київ, 1990р.); Міжнародній науково-технічній конференції "Пам'яті академіка М.П.Кравчука" (м.Київ, 1992р.); XI науковій конференції факультету математичних знань, присвяченій 400-річчю м.Куйбишева (м.Куйбишев,1986р.); науково-методичних семінарах кафедри вищої математики №1 Київського політехнічного інституту (м.Київ, 1990-1992р.); науковому семінарі відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики АН України (м.Львів, 1993р.).

Структура роботи. Дисертація складається з вступу, трьох розділів, висновку та списку цитованої літератури. Повний об'єм роботи - 134 сторінки машинопису. Бібліографічний список містить 97 назв.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

У вступі до дисертації обгрунтовується актуальність теми, подано огляд робіт з теми дисертації та зроблено опис отриманих результатів.

Перший розділ присвячено побудові узагальненого інтегрального перетворення Конторовича-Лебедєва та дослідженню деяких його властивостей і застосувань.

В §1.1 запроваджено модифіковані функції Віттекера:

$$w_{\mu,\nu}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, W_{\frac{\mu}{2},\nu}(2x), \qquad (1)$$

$$\mathfrak{m}_{\mu,\nu}(x) = \frac{2^{-2\nu}\,\Gamma\left[\frac{1}{2} - \nu\right]\,M_{\frac{\mu}{2},\nu}(2x)}{\Gamma\left[1 + \nu\right]\,\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} - \nu\right]\,\sqrt{2x}}, \tag{2}$$

де $W_{\mu,\nu}(x)$, $M_{\mu,\nu}(x)$ - функції Віттекара першого і другого роду відповідно. Вони при $\mu=0$ переходить у модифіковані функції Бесселя $K_\nu(x)$, $I_\nu(x)$. Досліджено деякі їх властивості. Зокрема, отримані асимптотичні формули

$$\mathfrak{m}_{\mu,\nu}(x) = \frac{2^{-2\nu}e^{x}(2x)^{-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}}\,\Gamma\left[\frac{1}{2} - \nu\right]\,\Gamma\left[1 + 2\nu\right]}{\Gamma\left[1 + \nu\right]\,\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} - \nu\right]\,\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} + \nu\right]}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad x \to +\infty, \tag{3}$$

$$\mathfrak{w}_{\mu,\nu}(x) = \sqrt{\pi}\,(2x)^{\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}}e^{-x}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad x \to +\infty, \tag{4}$$

$$\mathfrak{m}_{\mu,\nu}(x) = \frac{2^{-2\nu}\,\Gamma\left[\frac{1}{2} - \nu\right]\,(2x)^{\nu}}{\Gamma\left[1 + \nu\right]\,\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} - \nu\right]}\left[1 + O(x)\right], \quad x \to 0, \tag{5}$$

$$\mathfrak{w}_{\mu,\nu}(x) = \sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} - \nu\right]}(2x)^{\nu} + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} + \nu\right]}(2x)^{-\nu}\right] \times$$

$$\times \left[1 + O(x)\right], \quad x \to 0. \tag{6}$$

В §I.2 побудовано операційним методом узагальнене інтегральне перетворення Конторовича-Лебедєва:

$$\phi(\tau) = W_\mu[f(x), \tau] = \int_0^\infty \mathfrak{w}_{\mu,i\tau}(\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi, \tag{7}$$

$$f(x) = W_\mu^{-1}[\phi(\tau), x] = \frac{1}{\pi^3}\int_0^\infty \tau\operatorname{sh}(2\pi\tau)\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} + i\tau\right]\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} - i\tau\right] \times$$

$$\times\, \mathfrak{w}_{\mu,i\tau}(x)\phi(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Доведено основну тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора:

$$W_\mu\left\{ V_\mu[f(x),x],\ \tau \right\} = -\tau^2 W_\mu\left[f(x),\ \tau\right], \tag{9}$$

де $\quad V_\mu[f(x),\ x] = x^2\dfrac{d^2 f}{dx^2} + x\dfrac{df}{dx} - \left[x^2 - \mu\, x\right]f$.

В §I.3 методом асимптотичних оцінок доведено теорему про розгорнення абсолютно сумовної з точно визначеною вагою функції, що справджує умови Діріхле, в інтеграл типу Фур'є з ядром узагальненого інтегрального перетворення Конторовича-Лебедєва. Доведено теорему про існування оберненого узагальненого інтегрального перетворення Конторовича-Лебедєва, одержано узагальнену рівність Парсеваля та композиційні співвідношення:

$$L_x\{x^q \overset{-1}{W}_\mu[f(\tau),2x],\ s\} =$$

$$= 2^{q+\frac{1}{2}}(s+1)^{-\frac{q+1+\mu}{2}}(s-1)^{-\frac{q+1-\mu}{2}}\,\Phi^{\mu+q+1,\,\mu-q-1}[f(\tau),s] , \tag{10}$$

$$I_y^\mu\left\{x^{k-1}e^{-\frac{x}{2}}\,\overset{-1}{W}_{k+\mu}[f(\tau),\ x]\right\} = y^{k+\mu-1}e^{-\frac{y}{2}}\,\overset{-1}{W}_k[f(\tau),\ y] , \tag{11}$$

де L_x - перетворення Лапласа, $\Phi^{\alpha,\beta}$ - узагальнене інтегральне перетворення Мелера-Фока, що містить узагальнену приєднану функцію Лежандра першого роду $P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$, I_y^μ - дробовий інтеграл Вейля.

В §I.4 подано застосування узагальненої рівності Парсеваля та одержаних композиційних співвідношень для обчислення нових невласних інтегралів від спеціальних функцій. Розв'язано парні інтегральні рівняння з функціями

Віттекера в ядрах:

$$\int\limits_0^\infty \phi(t)W_{k,it}(x)t\,sh2\pi t\Gamma\left[\frac{1}{2}-k-it\right]\times$$

$$\times\Gamma\left[\frac{1}{2}-k+it\right]dt = f_1(x), \quad 0 < x < a,$$

$$\int\limits_0^\infty \phi(t)W_{k+\mu,it}(x)t\,sh2\pi t\Gamma\left[\frac{1}{2}-k-\mu-it\right] \tag{12}$$

$$\times\Gamma\left[\frac{1}{2}-k-\mu+it\right]dt = f_2(x), \quad x > a.$$

Другий розділ присвячено побудові гібридних інтегральних перетворень в модифікованими фукціями Віттекера в ядрах.

В §2.1 доведено теорему про інтегральну тотожність на складеному проміжку. А саме, якщо функції $y_k(x,\tau)$ є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\left[p_k(x)y_k'(x,\tau)\right]' - \left[q_k(x)+\tau^2 r_k(x)\right]y_k(x,\tau) = 0,\ x \in I_k, \tag{13}$$

де $I_k = (a_{k-1}, a_k)$, $k=\overline{1,n+1}$, та стверджують умовам спряження

$$\gamma_{i1}^k y_k(a_k,\tau) + \delta_{i1}^k y_k'(a_k,\tau) =$$

$$= \gamma_{i2}^k y_{k+1}(a_k,\tau) + \delta_{i2}^k y_{k+1}'(a_k,\tau),\ k=\overline{1,n},\ i=1,2, \tag{14}$$

то для всіх $\tau_1 \neq \tau_2$ має місце інтегральна тотожність

$$\frac{\Delta_{01}^1\cdots\Delta_{01}^n\ p_2(a_1)\cdots p_{n+1}(a_n)}{\Delta_{10}^1\cdots\Delta_{10}^n\ p_1(a_1)\cdots p_n(a_n)}\int\limits_{a_0}^{a_1} r_1(x)y_1(x,\tau_1)y_1(x,\tau_2)dx +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$

$$+\frac{\Delta_{01}^k\cdots\Delta_{01}^n\ p_{k+1}(a_k)\cdots p_{n+1}(a_n)}{\Delta_{10}^k\cdots\Delta_{10}^n\ p_k(a_k)\cdots p_n(a_n)}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} r_k(x)y_k(x,\tau_1)y_k(x,\tau_2)dx +$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+\frac{\Delta_{01}^{n}\,p_{n+1}(a_n)}{\Delta_{10}^{n}\,p_n(a_n)}\int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} r_n(x)y_n(x,\tau_1)y_n(x,\tau_2)dx\,+$$

$$+\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} r_{n+1}(x)y_{n+1}(x,\tau_1)y_{n+1}(x,\tau_2)dx =$$

$$=\frac{p_{n+1}(a_{n+1})}{\tau_1^2-\tau_2^2}\,\Omega_{n+1}(\tau_1,\tau_2,a_{n+1})\,-$$

$$-\frac{\Delta_{01}^{1}\cdots\Delta_{01}^{n}\,p_2(a_1)\ldots p_{n+1}(a_n)}{\Delta_{10}^{1}\cdots\Delta_{10}^{n}\,p_1(a_1)\ldots p_n(a_n)}\,\frac{p_1(a_0)}{\tau_1^2-\tau_2^2}\,\Omega_1(\tau_1,\tau_2,a_0), \qquad (15)$$

де $\Omega_k(\tau_1,\tau_2,x) = y_k'(x,\tau_1)y_k(x,\tau_2) - y_k(x,\tau_1)y_k'(x,\tau_2)$, (16)

та $\Delta_{01}^{k}=\gamma_{11}^{k}\delta_{21}^{k}-\gamma_{21}^{k}\delta_{11}^{k}\neq 0$, $\Delta_{10}^{k}=\gamma_{12}^{k}\delta_{22}^{k}-\gamma_{22}^{k}\delta_{12}^{k}\neq 0$. (17)

Функції $y_k(x,\tau)$ побудовано у явному вигляді. А саме, якщо функції $\phi_k(x,\tau)$ і $\psi_k(x,\tau)$ складають фундаментальні системи розв'язків диференціальних рівнянь (13), $v_k(\tau)$ - їх визначники Вронського, тоді

$$y_k(x,\tau) = \frac{p_k(a_k)\ldots p_n(a_n)}{\Delta_{01}^{k}\cdots\Delta_{01}^{n}v_k(\tau)\ldots v_n(\tau)}\Big[\Delta_1^k(\tau)\psi_k(x,\tau) - \Delta^k(\tau)\phi_k(x,\tau)\Big], \qquad (18)$$

де
$$\begin{aligned}\Delta_1^{k+1}(\tau) &= O_k(\phi,\psi,\tau)\Delta^k(\tau) - O_k(\psi,\phi,\tau)\Delta_1^k(\tau)\,,\\ \Delta^{k+1}(\tau) &= O_k(\phi,\phi,\tau)\Delta^k(\tau) - O_k(\psi,\phi,\tau)\Delta_1^k(\tau)\,,\end{aligned} \qquad (19)$$

$$O_k(\phi,\phi,\tau) = \Delta_{11}^{k}\,\phi_k(a_k,\tau)\,\psi_k(a_k,\tau) + \Delta_{12}^{k}\,\phi_k(a_k,\tau)\,\psi_k'(a_k,\tau)\,+$$

$$+\,\Delta_{21}^{k}\,\phi_k'(a_k,\tau)\,\psi_k(a_k,\tau) + \Delta_{12}^{k}\,\phi_k'(a_k,\tau)\,\psi_k'(a_k,\tau), \qquad (20)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{11}^{k}&=\gamma_{11}^{k}\gamma_{22}^{k}-\gamma_{21}^{k}\gamma_{12}^{k}\,, & \Delta_{12}^{k}&=\gamma_{11}^{k}\delta_{22}^{k}-\gamma_{21}^{k}\delta_{12}^{k}\,,\\ \Delta_{21}^{k}&=\delta_{11}^{k}\gamma_{22}^{k}-\delta_{21}^{k}\gamma_{12}^{k}\,, & \Delta_{12}^{k}&=\delta_{11}^{k}\delta_{22}^{k}-\delta_{21}^{k}\delta_{12}^{k}\,.\end{aligned} \qquad (21)$$

В §2.2 операційним методом отримано структуру ядер гібридних інтегральних перетворень з однією точкою спряження. Методом асимптотичних оцінок за допомогою інтегральної тотожності (I5) та асимптотичних формул (3)-(6) доведено теорему про розгорнення абсолютно сумовної з точно визначеною вагою функції, що справджує умови Діріхле, в інтеграл типу Фур'є з кусково-неперервним ядром гібридного інтегрального перетворення з однією точкою спряження. Отримані результати дозволили запровадити гібридні інтегральні перетворення співвідношеннями:

$$\phi(\tau) = W^{a}_{\mu_1,\mu_2}[f_1(x),\ f_2(x),\ \tau] =$$

$$= \int_0^a V_1(\xi,\tau)\ \frac{f_1(\xi)}{\xi}\ d\xi + \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{01}}\int_a^\infty V_2(\xi,\tau)\ \frac{f_2(\xi)}{\xi}\ d\xi\ , \quad (22)$$

$$f_i(x) = \overset{-1}{W}{}^{a}_{\mu_1,\mu_2}[\phi(\tau),\ x] = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\Delta^2_{01}}{a^2\Delta^2(i\tau)}\ \tau\ \mathrm{sh}(\pi\tau)\ \upsilon_{\mu_1}(i\tau)\ \times$$

$$\times\ V_i(x,\tau)\phi(\tau)d\tau\ \ ,\ i=1,2\ . \quad (23)$$

Доведено основну тотожність інтегрального перетворення диференціальних операторів:

$$W^{a}_{\mu_1,\mu_2}\Big\{\ \nabla_{\mu_1}[f_1(x),x],\ \nabla_{\mu_2}[f_2(x),x],\ \tau\ \Big\} =$$

$$= -\ \tau^2 W^{a}_{\mu_1,\mu_2}\Big[f_1(x),\ f_2(x),\ \tau\Big]\ . \quad (24)$$

В §2.3 операційним методом отримано структуру ядер гібридних інтегральних перетворень з двома точками спряження. Методом асимптотичних оцінок доведено теорему про розгорнення абсолютно сумовної з точно визначеною вагою функції, що справджує умови Діріхле, в інтеграл типу Фур'є з кусково-неперервним ядром гібридного інтегрального перетворення з двома точками спряження. Отримані результати дозволили запровадити гібридні інтегральні перетворення співвідношеннями:

$$\phi(\tau) = W_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}[f_1(x), f_2(x), f_3(x), \tau] =$$

$$= \int_0^{a_1} y_1(\xi,\tau)\frac{f_1(\xi)}{\xi}\,d\xi + \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{01}}\int_{a_1}^{a_2} y_2(\xi,\tau)\frac{f_2(\xi)}{\xi}\,d\xi +$$

$$+ \frac{\Delta_{10}^1\Delta_{10}^2}{\Delta_{01}^1\Delta_{01}^2}\int_{a_2}^{\infty} y_3(\xi,\tau)\frac{f_3(\xi)}{\xi}\,d\xi \quad , \tag{25}$$

$$f_i(x) = \overset{-1}{W}{}_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}[\phi(\tau), x] = \frac{2}{\pi}\left(\Delta_{01}^1\Delta_{01}^2\right)^2\int_0^{\infty}\frac{\tau sh(\pi\tau)}{a_1^2a_2^2|\Delta^1(i\tau)|^2}\times$$

$$\times\, v_{\mu_1}(i\tau)v_{\mu_2}^2(i\tau)\, y_3(x,\tau)\phi(\tau)d\tau\ , \quad i=\overline{1,3} \quad . \tag{26}$$

Доведено основну тотожність інтегрального перетворення диференціальних операторів:

$$W_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}\left\{ V_{\mu_1}[f_1(x),x],\ V_{\mu_2}[f_2(x),x],\ V_{\mu_3}[f_3(x),x],\ \tau \right\} =$$

$$= -\tau^2 W_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}\left[f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \tau\right] . \tag{27}$$

Методом асимптотичних оцінок, за допомогою інтегральної тотожності (16) та формул (3)-(8) доведено теорему про розгорнення абсолютно сумовної з точно визначеною вагою функції, що справджує умови Діріхле, в інтеграл типу Фур'є з кусково-неперервним ядром гібридного інтегрального перетворення в N точками спряження. Це дозволило запровадити відповідне гібридне інтегральне перетворення в N точками спряження. Для нього доведено основну тотожність інтегрального перетворення диференціальних операторів.

Подано приклад застосування гібридного інтегрального перетворення в N точками спряження для розв'язання крайової задачі, яка полягає в знаходженні обмеженої в неоднорідному складеному клині $0 \leqslant \rho < \infty$, $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$, $0 \leqslant z \leqslant l$ (ρ, ϕ, z - циліндричні координати) функції $u(\rho,\phi,z)$, що справджує у цьому клині диференціальному рівнянню:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\nu(\rho)}{\rho} u + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,, \tag{28}$$

де

$$\nu(\rho) = \nu_i,\ \alpha_{i-1} < \rho < \alpha_i,\ i=\overline{1,n+1},\ \alpha_0 = 0,\ \alpha_{n+1} = \infty\ , \tag{29}$$

граничним умовам:

$$u(\rho,\phi,z)\Big|_{z=0} = u(\rho,\phi,z)\Big|_{z=l} = 0, \tag{30}$$

$$u(\rho,\phi,z)\Big|_{\phi=\phi_1} = F_1(\rho,z),\ u(\rho,\phi,z)\Big|_{\phi=\phi_2} = F_2(\rho,z) \tag{31}$$

та умовам спряження:

$$\left[\gamma_{i1}^k + \delta_{i1}^k \frac{\partial}{\partial \rho}\right] u(\rho,\phi,z)\Big|_{\rho=a_k-0} =$$

$$= \left[\gamma_{i2}^k + \delta_{i2}^k \frac{\partial}{\partial \rho}\right] u(\rho,\phi,z)\Big|_{\rho=a_k+0},\quad i=1,2\ ,\ k=\overline{1,n}\ , \tag{32}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{01}^k &= \gamma_{11}^k \delta_{21}^k - \gamma_{21}^k \delta_{11}^k \neq 0\ , \\ \Delta_{10}^k &= \gamma_{12}^k \delta_{22}^k - \gamma_{22}^k \delta_{12}^k \neq 0\ . \end{aligned} \tag{33}$$

Розв'язок цієї задачі одержано у вигляді:

$$u(\rho,\phi,z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(j\frac{\pi z}{l}\right) \int_0^{\infty} \left[C_1^j(\tau)\,\mathrm{sh}(\phi_2-\phi)\tau + \right.$$

$$\left. + C_2^j(\tau)\,\mathrm{sh}(\phi-\phi_1)\tau\right] W_j\left(j\pi\rho\,\frac{1}{l},-\tau^2\right)\frac{d\tau}{\mathrm{sh}(\phi_2-\phi_1)\tau}\,. \qquad (34)$$

Третій розділ присвячено побудові гібридних інтегральних перетворень з приєднаними функціями Лежандра та модифікованими функціями Віттекера в ядрах.

В §3.I запроваджено функції $p_{\mu,\nu}(x)$ і $q_{\mu,\nu}(x)$, які зв'язані з приєднаними функціями Лежандра співвідношеннями:

$$q_{\mu,\nu}(x) = \frac{e^{-i\frac{\mu}{2}\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\nu\right)}\, Q^{\frac{\mu}{2}}_{-\frac{1}{2}+\nu}(x), \qquad (35)$$

$$p_{\mu,\nu}(x) = \frac{\pi}{2}\, P^{\frac{\mu}{2}}_{-\frac{1}{2}+\nu}(x) \quad , \qquad (36)$$

досліджено деякі їх асимптотичні властивості. Операційним методом та методом асимптотичних оцінок отримано структуру ядер гібридних інтегральних перетворень Віттекера-Лежандра-Віттекера з двома точками спряження, доведено теорему про розгорнення абсолютно сумовної з точно визначеною вагою функції, що справджує умови Діріхле, в інтеграл типу Фур'є з кусково-неперервним ядром. Отримані результати дозволили запровадити гібридні інтегральні перетворення Віттекера-Лежандра-Віттекера співвідношеннями:

$$\Phi(\tau) = W_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}[f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \tau] =$$

$$= \int\limits_0^{a_1} y_1(\xi,\tau)\ \frac{f_1(\xi)}{\xi}\, d\xi - \frac{\Delta^1_{10}a_1}{\Delta^1_{01}(1-a_1^2)} \int\limits_{a_1}^{a_2} y_2(\xi,\tau) f_2(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{\Delta^1_{10}\Delta^2_{10}a_1(1-a_2^2)}{\Delta^1_{01}\Delta^2_{01}(1-a_1^2)a_2} \int\limits_{a_2}^{\infty} y_3(\xi,\tau)\ \frac{f_3(\xi)}{\xi}\, d\xi\ . \tag{37}$$

$$f_i(x) = \overset{-1}{W}{}_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}[\Phi(\tau),\ x] =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left(\Delta^1_{01}\Delta^2_{01}\right)^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{\tau \operatorname{sh}(\pi\tau)}{a_1^2(1-a_2^2)^2|\Delta^1(i\tau)|^2}\ v_{\mu_1}(i\tau) v^2_{\mu_2}(i\tau)\ \times$$

$$\times\ y_i(x,\tau)\Phi(\tau)d\tau\ ,\quad i=\overline{1,3}\ . \tag{38}$$

Доведено основну тотожність інтегрального перетворення диференціальних операторів:

$$W_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}\left\{ \Lambda_{\mu_1}[f_1(x),x],\ B_{\mu_2}[f_2(x),x],\ \Lambda_{\mu_3}[f_3(x),x],\ \tau \right\} =$$

$$= -\tau^2 W_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}\left[f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \tau\right]\ , \tag{39}$$

де $B_\mu[f(x),\ x] = (1-x^2)\dfrac{d^2f}{dx^2} - 2x\dfrac{df}{dx} - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\mu}{4(1-x^2)} \right)f\ .$ (40)

В §3.2 операційним методом отримано структуру ядер гібридних інтегральних перетворень Лежандра-Віттекера-Лежандра з двома точками спряження. Методом асимптотичних оцінок доведено теорему про розгортання абсолютно сумовної з точно визначеною вагою функції, що справджує умови Діріхле, в інтеграл типу Фур'є з кусково-неперервним ядром.

Отримані результати дозволили запровадити гібридні інтегральні перетворення Лежандра-Віттекера-Лежандра співвідношеннями:

$$\phi(\tau) = \mathcal{L}_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}[f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \tau] =$$

$$= \frac{\Delta_{01}^{1}\Delta_{01}^{2}a_1(1-a_2^2)}{\Delta_{10}^{1}\Delta_{10}^{2}(1-a_1^2)a_2}\int\limits_{1}^{a_1} y_1(\xi,\tau)f_1(\xi)d\xi -$$

$$- \frac{\Delta_{01}^{2}(1-a_2^2)}{\Delta_{10}^{2}a_2}\int\limits_{a_1}^{a_2} y_2(\xi,\tau)\frac{f_2(\xi)}{\xi}\,d\xi + \int\limits_{a_2}^{\infty} y_3(\xi,\tau)f_3(\xi)d\xi \ . \qquad (41)$$

$$f_i(x) = \overset{-1}{\mathcal{L}}{}_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}[\phi(\tau),\ x] =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left[\Delta_{10}^{1}\Delta_{10}^{2}\right]^2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)}{a_1^2(1-a_2^2)^2|\Delta^3(i\tau)|^2}\,v_{\mu_2}^{2}(i\tau)u_{\mu_3}(i\tau)\ \times$$

$$\times\ y_i(x,\tau)\phi(\tau)d\tau\ ,\quad i=\overline{1,3}\ . \qquad (42)$$

Доведено основну тотожність інтегрального перетворення диференціальних операторів:

$$\mathcal{L}_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}\left\{ \Lambda_{\mu_1}[f_1(x),x],\ V_{\mu_2}[f_2(x),x],\ \Lambda_{\mu_3}[f_3(x),x],\ \tau \right\} =$$

$$= -\tau^2\mathcal{L}_{\mu_1;\mu_2;\mu_3}^{a_1;a_2}\left[f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \tau\right]\ . \qquad (43)$$

За допомогою інтегральної тотожності (15) та завдяки асимптотичним властивостям функцій $\psi_{\mu,\nu}(x)$, $\mathrm{u}_{\mu,\nu}(x)$, $p_{\mu,\nu}(x)$, $q_{\mu,\nu}(x)$ доведено теорему про розгортання абсолютно сумовної в точно визначеною вагою функції, що справджує умови Діріхле, в інтеграли в кусково-неперервним ядром гібридного інтегрального перетворення в N точками спряження.

яке містить приєднані функції Лежандра та модифіковані функції Віттекера.

Отримані результати дозволили запровадити відповідне гібридне інтегральне перетворення. Подано приклад його застосування для розв'язання однієї крайової задачі.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Вирченко Н.А., Гамалея Р.В. О некоторых новых типах парных интегральных уравнений // Тез. докл. науч. конф. фак. мат. знаний, посвященной 400-летию г.Куйбышева (14-19 мая 1986г.) - Куйбышев, 1986. - С. 10.
2. Вирченко Н.А., Гамалея Р.В. Некоторые вопросы теории парных интегральных уравнений и их приложения // Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными: Межвуз. сб. науч. работ. - Куйбышев, 1988. - С. 128-133.
3. Гамалея Р.В. Об одной системе парных интегральных уравнений для задач электрофизики // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. "Математическое моделирование в энергетике" (23-25 октября 1990г.) - Киев, 1990. - С. 16-17.
4. Вирченко Н.А., Гамалея Р.В. Об одном интегральном преобразовании // Мат. физика и нелинейн. механика. - 1991. - Вып. 16.- С. 21-29.
5. Гамалея Р.В. Об одном N-арном интегральном уравнении // Тез. докл. науч.-техн. конф. " Памяти академика М.П.Кравчука" (12-15 мая 1992г.) - Киев, 1992. - С. 28-29.
6. Гамалея Р.В. О некоторых гибридных интегральных преобра-

зованиях с функциями

13 с. - Рукопись деп. в УкрИНТЭИ 13.11.92, №1836 - Ук92.

7. Гамалея Р.В. Об одном интегральном преобразовании с функциями Уиттекера и Лежандра в ядрах. - Киев, 1992. - 13 с. - Рукопись деп. в УкрИНТЭИ 13.11.92, №1837 - Ук92.

8. Гамалея Р.В. Гибридные интегральные преобразования по индексу Уиттекера-Лежандра-Уиттекера. - Киев, 1992. - 13 с. - Рукопись деп. в УкрИНТЭИ 16.11.92, №1838 - Ук92.

9. Гамалея Р.В. Об одном приложении метода парных интегральных уравнений // Тез. докл. Междунар. науч. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции" (24-31 мая 1992г.) - Самара, 1992. - С. 66-67.

10. Gamaleja R. On one application H-function to the partial differential equations // Abstracts of Invited Lectures and Short Communications Delivared at the Third International Colloquium on Differential Equations. - Plovdiv, Bulgaria, 1992. - P. 63.

Підп. до друку 22.04.93. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,16 . Ум. фарбо-відб. 1,16 обл.-вид. арк. 1,0 . Тираж 100 пр. Зам. 168

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3