

Академія наук України  
Інститут математики

На правах рукопису

ПАВЛОВ Євген Олександрович

ОПЕРАЦІЯ ЗГОРТКИ ТА ОПЕРАТОРИ ТИПУ  
ЗГОРТКИ В БАНАХОВИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ  
ПРОСТОРАХ

ОІ. ОІ. ОІ - математичний аналіз

А в т о р е ф е р а т  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1993



Робота виконана на кафедрі вищої математики  
Луганського машинобудівного інституту

## Офіційні опоненти:

заслужений діяч науки Росії,  
доктор технічних наук,  
професор КРЕЙН С.Г.,

доктор фізико-математичних  
наук, професор СЕМЕНОВ В.М.,

доктор фізико-математичних  
наук, п.н.с. МЕЛЬНИК В.І.

Провідна установа: Київський державний університет

Землет відбудеться 26 10 1993 р.  
о 13 годині на засіданні спеціалізованої Ради  
Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за ад-  
дресою: 252601 Київ-, ГСП, вул. Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці  
інституту

Автореферат розіслано 25 09 1993р.

Вчений секретар  
спеціалізованої Ради,  
доктор фізико-математичних наук

*Гусяк* ГУСЯК Д.В.

AB-28.565

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Бінарна операція згортки має важливі застосування в гармонічному аналізі, теорії банахових алгебр (нормованих кілець), теорії узагальнених функцій, математичній фізиці, теорії лінійних операторів у функціональних просторах, теорії ймовірностей, теорії міри, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь та ін.

Бінарна операція згортки, введена для кожної пари функцій банахового простору, перетворює цей простір на банахову алгебру.

Бінарна операція згортки, означена на декартовому добутку банахових функціональних просторів, породжує білінійний оператор згортки, який, в свою чергу (при одному фіксованому елементі), породжує лінійний оператор згортки.

Луассон ще до 1820 року у своїх роботах записував інтегральні рівняння теплопровідності у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-s)}{4t}\right) f(s) ds,$$

аналогічні інтегральні вирази у своїх дослідженнях використовує П. Дюбуа-Реймонд, П. Чебишев, П. Даніель та інші математичні діячі (історичний огляд Н. Вурбаки).

Одними з перших робіт, в яких почалось вивчення інтегрального оператора згортки у лебегових та інших просторах, були роботи У. Юнга, Д. Гільберта, А.Н. Колмогорова, А. Безикевича, С. Титчмарта, М. Рісса, Г. Харді, Дж. Літтлвуда, С.Л. Соболева, Р. Сялама, А. Зігмунда.

В подальшому важливі результати по використанню операції

згортки в гармонічному аналізі, теорії сингулярних інтегральних операторів, теорії інтегральних операторів згортки, теорії інтегральних рівнянь з різницевиими ядрами та ін., були одержані в роботах У. Рудіна, П. Кола, Л. Жермандера, І. Стейна, Г. Вейс, Ж. Марцинкевича, А. Кальдерона, І. Хіршмана, Р. Едвардса, С. Хьвіта, А. Бенедіка, Р. Гансона, С. Беннета, Д. Вайда, Р. Ханта, А. Блосінського, М. Тейблсона, Х. Трібеля, С.Г. Міхліна, П.І. Лізорніна, М.Г. Крейна, Л.А. Сахновича, С.Г. Крейна, С.М. Семенова, С.Г. Самю, І. Фефермана, Г. Сзмисона, Р. Едвардса, В.Б. Короткова, В.Д. Степанова, П. Халмоша, М.П. Конейчука, Н.І. Ахієзера, Р. Шарлії, О'Нейла, М. Мільмана, Д. Лавитана та інших математиків.

Незважаючи на велику кількість робіт з цієї важливої тематики, залишались нерозв'язаними багато таких важких проблем як отримання критеріїв неперервності та регулярності інтегральних операторів типу згортки в парах симетричних просторів, умов неперервності інтегральних операторів згортки у просторах зі змішаною нормою, питання про в'ясування умов неперервності сингулярних інтегральних операторів, критерії обмеженості операторів типу Харді-Літльвуда, операторів Кальдерона та ін.

Залишалась нерозв'язаною проблема факторизації функцій в симетричних просторів, проблема про видуження в симетричних просторів класу симетричних просторів, які є банаховими алгебрами відносно згортки, та ін. задачі.

**Мета роботи:** провести дослідження в теорії інтегральних операторів типу згортки, зокрема операторів мультиплікативної згортки в класах симетричних просторів, введених С.М. Семеновим та В. Лаксембургом незалежно один від одного. Одержати критерії обмеженості операторів Харді-Літльвуда, операторів типу Харді-

Літльвуда, оператора Кальдерона в парах симетричних просторів. Дослідити властивість неперервності сингулярних інтегральних операторів. Вирішити проблему факторизації в класі симетричних просторів. Побудувати теорію симетричних банахових алгебр. Вивчити властивості нової операції згортки функціональних просторів, введеної автором. Дослідити деякі питання теор. і рядів Фур'є в симетричних просторах та більш загальних  $P$ -просторах, які введені до розгляду автором даної роботи.

Методи дослідження. В роботі застосовуються методи теорії інтерполяції операторів у класі симетричних просторів, які вивчені у роботах С.Г.Крейна, Є.М.Семенова, та автора, методи теорії інтегральних операторів, методи теорії рядів Фур'є, методи теорії апроксимації.

Наукова новизна, практична та теоретична цінність.

Всі основні результати дисертації є новими. Вільні є результати, одержаних у класі симетричних просторів, в розв'язанні деяких проблем, що поставлені у роботах П. Халмша, В. Сандера, С.Г. Крейна, Є.М. Семенова, Р. Едвардса та ряду інших математиків.

В роботі проведені дослідження по вивченню властивостей інтегральних операторів типу згортки в класах симетричних просторів, операторів типу Харді-Літльвуда і Кальдерона, операторів мультиплікативної згортки та їх застосування до теорем вкладавання. Одержано посилення теореми Л.В. Канторовича про неперервність операторів у класах Лоренцевських просторів  $L_{p,q}$  класах Марцинкевича  $M_{p,q}$ . Одержані критерії неперервності операторів типу згортки в деяких парах симетричних просторів.

Одержане розв'язання проблеми факторизації функцій із симетричних просторів.

Побудована теорія операторів, до якої входить клас інтегральних і сингулярних інтегральних операторів, діючих в симетричних просторах, побудована змістовна теорія симетричних згорткових алгебр. Вивчені властивості нової операції згортки банахових функціональних просторів, які введені автором дисертації. Проведено дослідження в теорії рядів Фур'є та згортки періодичних функцій у нових  $P$ -просторах. Досліджені умови неперервності операторів  $K$ -Пітре, одержані результати застосовані до посилення відомої теореми про неперервність операторів Стеклова. Одержано ряд інших результатів.

Результати дисертації можуть мати застосування в гармонічному аналізі, математичній фізиці, теорії апроксимації, теорії ймовірності, теорії складних систем.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-12].

Апробація роботи. Результати дисертації по мірі їх отримання доповідались на семінарі академіка В.О. Марченка в Харківському держуніверситеті, та семінарі Інституту математики Академії Наук України під керівництвом академіка Д.М. Березанського, на семінарі відділу теорії функцій Інституту математики Академії Наук України під керівництвом професора О.І. Степанця, семінарі Інституту кібернетики Академії Наук України, Міжнародному семінарі з теорії інтерполяції лінійних операторів та її застосування під керівництвом професорів С.Г. Крейна та Б.М. Семенова у Воронежському держуніверситеті та інших семінарах.

Доповіді та наукові повідомлення, які базуються на результатах дисертації, були неодноразово зроблені на Всесоюзних Во-

ронежських математичних школах /1977-1991 р.р./, Всесоюзній Новосибірській школі з теорії операторів у функціональних просторах в 1986 р. в м. Міассі, на міжнародному симпозиумі у 1992 р. в м. Ласпі, на ювілейній науковій конференції, присвяченій 75-річчю професора, заслуженого діяча науки Росії С.Г. Крейна у Воронежському університеті в 1992 р.

Автор висловлює глибоку вдячність академіку В.М. Версанському за обговорення результатів дисертації, цінні зауваження та підтримку.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох глав, та списку літератури, що містить 105 найменувань. Об'єм роботи - 202 сторінок машинописного тексту.

#### ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступній частині дисертації обґрунтовано актуальність теми, дано короткий огляд результатів, які одержані відомими математиками, починаючи з Пуассона, У. Бюга та інших.

Подано виклад основних результатів дисертації по частинах.

# Г Л А В А I

## ІНТЕГРАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ ТИПУ ЗГОРНИ В СИМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

I.I. Основний результат складає теорема I.I.I. Нехай ядро  $K(s, t)$  - вимірне на добутку  $((0, 1); dx) \times ((0, 1); dx)$ , де  $((0, 1); dx)$  - простір з лінійною мірою Лебега. Нехай  $K(s, t)$  таке, що при майже кожному фіксованому  $s \in (0, 1)$  воно, як функція від  $t$ , належить простору  $M\varphi_{0*}(t)$ , а при майже кожному фіксованому  $t \in (0, 1)$  воно, як функція від  $s$ , належить простору  $M\varphi_{1*}(s)$ ,  $\varphi_{0*}(t) = t/\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_{1*}(t) = t/\varphi_1(t)$ . Крім того, виконані умови:

$$\|K(s, t)\|_{M\varphi_{0*}(t)} \leq C_0 < \infty, \quad (1)$$

$$\|K(s, t)\|_{M\varphi_{1*}(s)} \leq C_1 < \infty. \quad (2)$$

Рівняння

$$\varphi_1(\delta(t)) = \varphi_0(t) \quad (3)$$

має хоча б одне вимірне рішення  $\delta(t)$ . Тоді, якщо симетричний простір  $E((0, 1); dx)$  такий, що

$$1 > \beta_E \geq \alpha_E > \beta_{L\varphi_{0*}}, \quad (4)$$

то інтегральний оператор з ядром  $K(s, t)$ , який ми позначимо  $T_K$ , обмежено діє з  $E$  в  $E$ , де

$$\|y\|_E = \|y^{**}(\delta(t))\varphi_{0*}^{-1}(t)\|_E$$

Висновок I (Посилення теореми Л.В. Канторовича).

Нехай виконані умови

$$\|K(s,t)\|_{M_t^{1-1/\alpha}} \leq C_1 < \infty \quad (\alpha > 1), (5)$$

$$\|K(s,t)\|_{M_s^{1-1/\beta}} \leq C_2 < \infty \quad (\beta > 1), (6)$$

$$\alpha \geq p, \alpha \geq \beta, (1-\beta/\alpha)p' \leq \alpha, p \geq 1, \alpha \geq 1, \\ p' > \alpha, 1/p + 1/p' = 1.$$

Тоді інтегральний оператор  $T_K$  обмежено діє з  $L_p$  в  $L_{\alpha,p}$ .

Зауваження. Висновок I є суттєвим посиленням теореми Л.В. Канторовича. Посилення міститься у тому, що на ядро накладаються більш слабкі умови (5) і (6), замість умов

$$\|K(s,t)\|_{L_2(t)} \leq C_1 < \infty, \quad (5')$$

$$\|K(s,t)\|_{L_2(s)} \leq C_2 < \infty. \quad (6')$$

Одержане більш сильне твердження

$$T_K: L_p \rightarrow L_{\alpha,p} \subset L_\alpha,$$

ніж твердження  $T_K: L_p \rightarrow L_\alpha$ .

1.2. Основний результат складають такі твердження.

Теорема 1.2.1 (Критерій неперервності).

Нехай ядро  $K(s)$  визначене та інтегроване на кожному відрізку  $[-a, a] \subset (-1, 1)$ , невід'ємне, симетричне на  $(-1; 1)$  та складає на  $(0, 1)$ . Тоді для того, щоб інтегральний оператор згортки з ядром  $K(s)$  обмежено діяв з  $L_p$  в  $L_q$ , необхідно і достатньо виконання співвідношень

$$\|K(s-t)\|_{M_t^{1-1/2}} \leq C_1 < \infty, \quad (8)$$

$$\|K(s-t)\|_{M_s^{1-1/2}} \leq C_2 < \infty, \quad (9)$$

де

$$1 + 1/q = 1/p + 1/2, \quad p > 1, q > 1, 2 > 1.$$

Зауваження. Теорема 1.2.1, зокрема, виявляє, що умови (1) і (2) теореми 1.1.1. точні (неполіпшувальні) у тому значенні, що існує клас інтегральних операторів - інтегральні оператори згортки і клас просторів - лебегові простори  $L_p$ , для яких умови (1) та (2) є необхідними.

Теорема 1.2.2 (критерій неперервності).

Нехай  $E((-\infty, \infty); dx)$  - ідеальна структура, яка має властивість Фату і є інтерполяційною між  $L_1$  та  $L_\infty$  просторами.

Тоді для того, щоб інтегральний оператор згортки з ядром  $K$  обмежено діяв з  $L_1$  в  $E$ , необхідно та достатньо, щоб  $K \in E$ .

1.3. Основні результати містяться у таких теоремах.

Теорема 1.3.1. Нехай  $E_1((0,1); dt)$ ,  $E_2((0,1); dt)$  і  $E_3((0,1); dt)$  - симетричні простори такі, що індекси Фойда цих просторів зв'язані нерівностями:

$$1) \beta_{E_3} + \beta_{E_1} < 1 + \alpha_{E_2};$$

$$2) \alpha_{E_1} + \beta_{E_3} > 1.$$

Тоді інтегральний оператор типу згортки

$$(T_K x)(t) = \int_0^1 K(t-s) x(s) ds$$

обмежено діяє з  $E_1 \times E_2$  в  $E_3$ .

Теорема 1.3.2. Нехай симетричні простори  $E_1((0,1); dt)$   $E_2((0,1); dt)$  і  $E_3((0,1); dt)$  такі, що:

$$1) \alpha E_3 + \beta E_1 = 1 + \alpha E_2,$$

$$2) \alpha E_1 + \alpha E_3 > 1.$$

Тоді знайдеться така додатна, ввігнута функція  $\varphi(t)$ , що  $M\varphi_* \in E_3$  і оператор типу згортки обмежено діє з  $E_1 \times M\varphi_*$  в  $E_2$ .

Теорема 1.3.3. Нехай симетричні простори  $E_1((0,1); dt)$  і  $E_2((0,1); dt)$  такі, що виконується нерівність

$$a) \alpha E_2 < \beta E_1 = \alpha E_1.$$

Тоді існує ненульовий оператор типу згортки, <sup>що</sup> обмежено діє з  $E_1((0,1); dt)$  в  $E_2((0,1); dt)$ .

Теорема 1.3.4. Нехай симетричний простір  $E((0,1); dt)$  і додатна ввігнута функція  $\varphi(t)$  такі, що  $\alpha E + \alpha \varphi > 1$ . Тоді інтегральний оператор типу згортки обмежено діє з  $E_{t,1} \times M\varphi_*$  в  $E_{t,\varphi(t)}/t$ .

Зауваження. Дана теорема містить, як окремий випадок, відому теорему С.Г. Крейна і Є.М. Семенова про неперервність інтегрального оператора типу згортки

$$(T_K x)(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds.$$

1.4.1. Основним результатом цього параграфа є

Теорема 1.4.1. Нехай  $E_x$  і  $E_y$  - симетричні простори.

Нехай додатні вимірзувальні функції  $\varphi$  та  $\psi$  такі, що:

- 1)  $\alpha\varphi + \alpha E_x > 1$ ,      2)  $\alpha\psi + \alpha E_y > 1$ ,  
 3)  $\beta E_x < 1$ ,      4)  $\beta E_y < 1$ .

Тоді інтегральний оператор згортки

$$T_K f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s, y-t) f(s, t) ds dt$$

обмежено діє з простору  $E_y(E_x) \times M_{\psi(y)}(M_{\varphi(x)})$  в  $F(G)$ , де

$$\|f\|_F = \left\| \frac{\psi(y)}{y} f^{**}(x, y) \right\|_{E_y},$$

$$\|f\|_G = \left\| \frac{\varphi(x)}{x} f^{**}(x, y) \right\|_{E_x}.$$

Згадування. Доведена теорема істотно посилює основний результат К. Бенедіка та К. Пансона про нерівність Дюга в просторах  $L_p(L_2)$ .

### 1.5. Присвячений сингулярним інтегральним операторам.

В даному параграфі розглядається новий клас операторів

$$(A_K f)(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \int_{|t-s| \geq s} K(s, t) f(t) dt. \quad (5.1)$$

...ий містить клас сингулярних інтегральних операторів.

Досліджується клас сингулярних інтегральних операторів з ядрами, що залежать від різниці аргументів

$$(Tf)(x) = \int K(x-y) f(y) dy, \quad f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$$

в  $E((-\infty, \infty); dt)$  - сепарабельний симетричний простір

тір. Інтеграл, в загальному випадку, розуміється як головне значення.

Теорема I.5.1. Нехай  $K \in \mathcal{L}_2((-\infty, \infty); dt)$

а)  $|\hat{K}(x)| \leq B < \infty$ ,    в)  $K(x) \in C^1$ ,

с)  $|K'(x)| \leq B/|x|^2$ .

Тоді оператор  $T$  обмежено діє з  $E$  в  $E$ , де  $E$  таке, що:

1)  $\|G_t\|_E = o(1)$     при  $t \rightarrow 0$ ,

2)  $\|G_t\|_E = o(t)$     при  $t \rightarrow \infty$ ,

означає оператор, вже розширений за неперервності на все  $E$ .

Зауваження. Умови на ядро  $K$ , накладені у попередній теоремі, можна послабити.

Теорема I.5.1. Нехай ядро  $K$  задовольняє умову

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B; |y| > 0.$$

Тоді  $T$  - оператор сильного типу  $(E, E)$ .

Теорема I.5.2. Нехай ядро  $K(x)$  задовольняє умови:

1)  $|K(x)| \leq B|x|^{-1}; |x| > 0;$

2)  $\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B; |y| > 0;$

$$3) \int K(x) dx = 0; \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty, \\ R_1 < |x| < R_2$$

Покладемо

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) K(y) dy; \quad \varepsilon > 0$$

Тоді справедлива нерівність

$$\|T_\varepsilon f\|_E \leq A_E \|f\|_E.$$

Крім того, існує границя в  $E$ .

Виникує нерівність

$$\|Tf\|_E \leq A_E \|f\|_E,$$

де  $E$  задовольняє умови теореми 1.5.1.

Зауваження. Доведені теореми є узагальненням відповідних теорем І. Стейна та Г. Вейо.

Теорема 1.5.3. Нехай сингулярний оператор  $T$  задовольняє умови теореми 1.5.2 і виконані умови

$$1) \beta_{E_1} < 1, \quad 2) \beta_{E_2} < \alpha_{E_1}.$$

Тоді оператор  $T$  обмежено діє з симетричного простору  $E_1((-\infty, \infty); dx)$  в сепарабельний симетричний простір  $E_2((-\infty, \infty); dx)$ .

Теорема 1.5.6. Нехай оператор  $A_K$ , заданий рівнянням

$$(A_K x)(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} K(s,t) x(t) \frac{dt}{t},$$

яке визначене на всіх  $x \in \mathcal{L}_p(R_1)$  і комутує додатним реактом. Тоді  $A_K$  є оператором мультиплікативної алгебри.

Теорема 1.5.10. Нехай оператор  $A_K$ , заданий рівнянням (5.1), комутує зі зсувом, додатними розтягами та антикомутує з відображеннями. Тоді оператор  $A_K$ , заданий рівнянням (5.1), відвізняється від сингулярного інтегрального оператора Гільберта на постійний множник.

1.6. В даному параграфі вивчене питання про апроксимацію одиничного оператора розтягненням згортки.

Класична теорема Фейєра стверджує, що середнє арифметичне перших  $n$  сум Фур'є функції  $f(\cdot)$  рівномірно прямує до  $f(t)$  при  $n \rightarrow \infty$ , якщо  $f(t)$  - неперервна з періодом в  $2\pi$ .

Відомо, що

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(t) = \int_0^{2\pi} f(t-u) \varphi_n(u) du, \quad (6.1)$$

$$\text{де } \varphi_n(u) = \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du = 1.$$

Н.І. Ахізаєром було введено до розгляду більш загальний, ніж (6.1), оператор

$$(K_\lambda f)(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) K[\lambda(x-u)] du, \quad \lambda > 0, \quad (6.2)$$

$$K(-x) = K(x); \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1$$

$K(x)$  обмежена на  $[-1; 1]$ ,  $x^2 K(x)$  обмежена на  $(-\infty, \infty)$ .

Основним результатом даного параграфу є

Теорема 1.6.1. Нехай  $E((-\infty, \infty); dx)$  - сепарабельний симетричний простір. Тоді справедливе співвідношення

$$\|K_\lambda f(x) - f(x)\|_E \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty. \quad (6.3)$$

Одержано ряд інших результатів.

1.7. присвячений мультиплікативним згорткам та їх застосуванню до теорем вкладення.

Основною в цьому параграфі є

Теорема 1.7.1. Нехай максимальний ідеальний простір

$E((0, \infty); \frac{dt}{t})$  такий, що:

$$1) \sigma_t: E \rightarrow E;$$

$$2) \chi_{[0,1]}(t) + \frac{1}{t} \chi_{[1,\infty)}(t) \in E^1((0, \infty); dt/t)$$

$$3) \|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E((0, \infty); dt/t)} \in F((0, \infty); dt/t)$$

Тоді справедливе включення

$$(A_0, A_1)_E^K \subset (A_0, A_1)_F^K.$$

Теорема 1.7.2. Оператор  $T_g$  обмежено діє в  $\mathcal{L}_{p,*}$

$$\mathcal{L}_{(q,p),*} \text{ де } \|x\|_{\mathcal{L}_{p,*}} = \left( \int_0^\infty |x(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}$$

$$(T_g f)(t) = \int_0^\infty g\left(\frac{t}{s}\right) f(s) ds, \quad g(t) \in \mathcal{L}_{2,*}$$

Крім того,

$$1/q + 1 = 1/p + 1/2, \quad \|x\|_{\mathcal{L}_{p,*}} = \|x\|_{\mathcal{L}_p((0, \infty); \frac{dt}{t})}$$

$$= \|x(e^t)\|_{\mathcal{L}_p((-\infty, \infty); dt)}$$

Наслідок. Справедливе включення

$$(A_0, A_1)_{\theta, p, * } \subset (A_0, A_1)_{\theta, (q, p), * } \subset (A_0, A_1)_{\theta, q, * },$$

де

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q}} = \left( \int_0^{\infty} [t^{-\theta} K(t, a)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Зауваження. Твердження наслідку є посиленням відомої теореми Ж.Л. Ліонса та Ж. Петре про включення

$$(A_0, A_1)_{\theta, p} \subset (A_0, A_1)_{\theta, q},$$

якщо  $p \leq q$ .

1.8. Оператор Харді-Літльвуда у симетричних просторах.

В математичному аналізі важливу роль відіграє оператор Харді-Літльвуда, який задається формулою

$$Hx(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds.$$

Цей оператор можна вважати неперервним аналогом чезарівських середніх для функціональних рядів.

Теорема 1.8.1. Нехай симетричний простір  $E$  та мультиплікативна функція  $\rho(t)$  задовольняють умову

$$\beta_{\rho} + \beta_E < 1.$$

Тоді оператор Харді-Літльвуда обмежено діє в  $E_{\rho}$ , де

$$\|x\|_{E_{\rho}} = \|x(t) \rho(t)\|_E.$$

Теорема 1.8.2. Нехай симетричний простір та напівмультиплікативна функція  $\rho(t)$  такі, що  $\alpha_E + \alpha_\rho > 0$ .

Тоді оператор

$$H_1 x(t) = \int_t^\infty \frac{x(s)}{s} ds$$

обмежено діє в  $E_\rho$ .

Наведено нове просте доведення теореми Т. Шимогаки про неперервність оператора Харді-Літльвуда в  $E$ .

Доведені ряд інших теорем.

1.9. В даному параграфі вивчаються оператори, близькі до операторів Харді-Літльвуда. Наведемо більш загальний вигляд операторів такого типу

$$(H_\psi x)(t) = \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x(s) d\psi(s). \quad (9.1)$$

Однією з основних теорем даного параграфу є

Теорема 1.9.2 (Критерій неперервності оператора  $H_\psi$ ).

Для того, щоб оператор  $H_\psi$  обмежено діяв в симетричному просторі  $E((0, \infty); dt)$  такому, де  $\alpha_E = \beta_E$ , необхідно і достатньо виконання співвідношення

$$\beta_E < \alpha_\psi.$$

Доведені деякі інші теореми.

1.10. В теорії інтерполяції лінійних операторів важливу роль відіграє оператор Кальдерона, що задається формулою

$$Sx(t) = \int_0^\infty x(s) d \min_{i=0,1} \left\{ \frac{\varphi_i(s)}{\varphi_i(t)} \right\},$$

де  $\varphi_i(t), \psi_i(t)$  — внігнуті додатні функції.

Теорема 1.10.1. Нехай симетричні простори  $E_1, E_2$  та функції  $\varphi_i(t), \psi_i(t)$  ( $i=0,1$ ) задовольняють умови:

$$1) \varphi_\theta(t) \cdot \psi_\theta^{-1}(t) \| \partial_{1/t} \|_{E_1} \in E_2, \theta \in (0,1).$$

$$\varphi_\theta(t) = \varphi_0^\theta(t) \cdot \varphi_1^{1-\theta}(t); \psi_\theta(t) = \psi_0^\theta(t) \psi_1^{1-\theta}(t);$$

$$2) (M\varphi)_\theta'(s) \in E_1^1, (M\varphi)_\theta(+0) = 0,$$

$$(M\varphi)_\theta(s) = M\varphi_0^\theta(s) \cdot M\varphi_1^{1-\theta}(s),$$

$E_1^1$  — двоїстий до  $E_1$  простір.

Тоді оператор  $S$  обмежено діє з  $E_1$  в  $E_2$ .

Наслідок. Нехай виконані умови попередньої теореми. Тоді будь-який лінійний оператор слабких типів  $(\varphi_0, \psi_0)$  і  $(\varphi_1, \psi_1)$  одночасно обмежено діє з  $E_1$  в  $E_2$ .

## Г Л А В А 2

## БІНАРНА ОПЕРАЦІЯ ЗГОРТКИ В БАНАХОВИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

В 2.1 негативно вирішується (у випадку симетричних просторів) проблема факторизації. Суть цієї проблеми складається в можливості розкладу функції  $f \in E$  у вигляді  $f = g * h$ , де  $g, h \in E$ ,  $E$  - простір  $2\pi$ -періодичних функцій.

Класичний результат розкладу

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_1$$

був опублікований У. Рудінім та П. Коеном, хоч раніше був відомий Салему та Зігмунду. Рудінім та Коеном був доведений розклад вигляду

$$E = \mathcal{L}_1 * E,$$

де  $E = \mathcal{L}_p$  або  $E = C^k$ .

Р. Едвардсом було поставлене питання. Чи вірний розклад вигляду

$$\mathcal{L}_p * \mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p, \quad p > 1,$$

де  $\mathcal{L}_p$  - простір  $2\pi$ -періодичних функцій таких, що

$$\|x\|_{\mathcal{L}_p} = \left( \int_0^{2\pi} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Була одержана негативна відповідь на це питання.

Очевидне вивчення

$$\mathcal{L}_p * \mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_p.$$

Природно виникає питання, чи не можна замінити  $\mathcal{L}_p$  на інший простір (з невизначеного класу)  $F$  так, щоб виконувалась рівність

$$E = F * E$$

Зокрема, чи вірна рівність

$$E = E * E, \quad E \neq \mathcal{L}_1.$$

Основним результатом в даному параграфі є

Теорема. Нехай  $E$  та  $F$  - симетричні простори на  $(0, 2\pi)$ .  $\tilde{E}$  та  $\tilde{F}$  - простори  $2\pi$ -періодичних функцій таких, що

$$\|x\|_{\tilde{E}} = \|x(t) \chi_{(0, 2\pi)}\|_E,$$

$$\|x\|_{\tilde{F}} = \|x(t) \chi_{(0, 2\pi)}\|_F.$$

Тоді рівність

$$\tilde{E} * \tilde{F} = \tilde{E}$$

можлива тоді і тільки тоді, коли  $F \approx \mathcal{L}_1$ .

Наслідок 1. Нехай  $E$  - сепарабельний симетричний простір. Тоді справедлива рівність

$$\tilde{E} * \mathcal{L}_1 = \tilde{E}.$$

Наслідок 2. Рівність

$$\tilde{E} * \tilde{E} = \tilde{E}$$

можлива тоді і тільки тоді, коли  $E \approx \mathcal{L}_1$ .

Одержані інші результати, пов'язані з проблемою факторизації.

## 2.2. Згортки множин періодичних функцій.

Позначимо через  $M_p$  підмножину в  $M_{2\pi}$  вигляду

$$g(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} \quad (2.1)$$

де  $C_n = \frac{1}{2} a_{|n|}$  таких, що:

$$1) n^{1-1/p} a_n = O(1),$$

$$2) n^{2-1/p} \Delta a_n = O(1),$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} n^{2-1/p} |\Delta^2 a_n| < \infty,$$

де  $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ ,  $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$ .

Умови 1) - 3) назвемо  $\mathcal{F}$ -умовами. Відомо, що справедливі вclusions

$$M_p \subset \tilde{\mathcal{L}}_p, \quad p > 1. \quad (2.2)$$

В даному параграфі встановлюється включення

$$M_p \subset \tilde{\Lambda}_t^{1/p}, \quad p > 1, \quad (2.3)$$

яке є значним посиленням включення (2.2) та є точним в класі симетричних просторів  $E$  з фундаментальною функцією

$$\varphi_E(t) = t^{1/p}.$$

Основний результат даного параграфу складається у виконанні включення

$$M_p * M_q \subset \tilde{\Lambda}_t^{1/2}, \quad (2.4)$$

Доведення цього результату засновується, зокрема, на таких оцінках ядер Діріхле та Фейєра, одержаних в дисертації:

$$\|D_N\|_E = O[(2N+1) \| \sigma_{\frac{1}{2N+1}} \|_E], \quad (2.5)$$

$$\|F_N\|_E = O[(N+1) \| \sigma_{\frac{1}{N+1}} \|_E], \quad (2.6)$$

де  $E((0, 2\pi), dt)$  - симетричний простір.

2.3. В даному параграфі введена до розгляду нова бінарна операція - згортка банахових функціональних просторів.

Означення. Згорток просторів  $E_1$  та  $E_2$  відносно простору  $E_3$  називається простір, який позначається  $E_1 *_{E_3} E_2$  і є замиканням в  $E_3$  лінійної оболонки множини

$$(E_1 * E_2) \stackrel{dt}{=} \{f * g \mid f \in E_1, g \in E_2\}.$$

Зауваження. Простір  $E_1 *_{E_3} E_2$  є банаховим.

Властивість 1. Справедливе неперервне влючення

$$E_1 *_{E_3} E_2 \subset E_3.$$

Властивість 2. Операція згортки просторів переставна.

Властивість 3. Операція згортки просторів асоціативна.

Властивість 4. Якщо один з просторів  $E_1$  або  $E_2$  інваріантний відносно зсувів, то  $E_1 *_{E_3} E_2$  - інваріантний відносно зсувів.

Теорема 3.2. Нехай  $E_1, E_2, E_3$  - сепарабельні симетричні простори на  $(-\infty, +\infty)$ . Тоді справедлива рівність

$$E_1 *_{E_3} E_2 = E_3.$$

Теорема 3.3. Нехай  $E$  - симетричний сепарабельний простір на  $(-\infty, \infty)$ . Тоді для того, щоб існувала згортка  $E *_{E} E$ , необхідно і достатньо виконання співвідношення

$$\varphi_E(t) \geq ct,$$

де  $\varphi_E(t)$  - фундаментальна згортка симетричного простору.

Теорема 3.4. Нехай існує згортка  $E_1 *_{E} E_2$ , тоді спра-

вещива нерівність

$$t \varphi_p(t) \leq C \varphi_{E_1}(t) \varphi_{E_2}(t).$$

Наслідок. Для того, щоб існувала згортка  $L_p * L_q$ ,  
необхідно і достатньо виконання рівності

$$1/p + 1/q = 1 + 1/r, \quad p > 1, q > 1, r > 1.$$

Одержано ряд інших результатів.

## СИМЕТРИЧНІ АЛГЕБРИ

3.1. Цікавою і важливою є така задача. Чи буде той чи інший функціональний простір банаховою алгеброю відносно операції згортки?

Так, наприклад,  $\mathcal{L}_1(R_1)$  - алгебра відносно операції згортки, а  $\mathcal{L}_p(R_1)$ , де  $p > 1$  - ні.  $\mathcal{L}_1(R_1)$  і  $\mathcal{L}_p(R_1)$  - симетричні простори. Виникає природне цікаве і важливе питання. Чи існує симетричний простір  $E(R_1)$ , що відрізняється від  $\mathcal{L}_1(R_1)$  і що є банаховою алгеброю відносно операції згортки? Яка будова цих алгебр - який простір максимальних ідеалів і т. ін.?

Теорема 3.1.1. Нехай  $\tilde{E}$  - простір вимірюваних,  $2\pi$ -періодичних функцій з нормою  $\|x\|_{\tilde{E}} = \|x(t)\chi_{(0, 2\pi)}\|_{\tilde{E}}$ , де  $E$  - симетричний простір на  $(0, 2\pi)$ , інтерполяційний між  $\mathcal{L}_1$  та  $\mathcal{L}_\infty$ ; тоді  $\tilde{E}$  - алгебра.

Теорема 3.1.4. Нехай  $E$  - симетричний простір на  $(-\infty, \infty)$ .  $E$  є банаховою алгеброю відносно операції згортки тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення

$$\varphi_E(t) \geq ct, \quad t \in (0, +\infty).$$

Теорема 3.1.5. Нехай  $E$  - симетричний простір на  $(-\infty, \infty)$

$E$  є банаховою алгеброю відносно операції згортки оді і тільки тоді, коли

$$E((-\infty, \infty); dt) \subset \mathcal{L}_1((-\infty, \infty); dt).$$

3.2 присвячений вивченню структурних властивостей банахових алгебр.

Теорема 3.2.1. Нехай  $E$  - банахова алгебра відносно операції згортки, де  $E$  - сепарабельний симетричний простір на  $(-\infty, \infty)$ . Тоді простір максимальних ідеалів для  $E$  складається з мультиплікативних функціоналів вигляду

$$\varphi_t(f) = \hat{f}(t).$$

Теорема 3...2. Радикал алгебри  $E((-\infty, \infty); dt)$ , де  $E((-\infty, \infty); dt)$  - сепарабельний симетричний простір, складається з одного нуля, тобто  $\Xi$  - наівпроста алгебра.

Теорема 3.2.3. Нехай  $f \in E$ , де  $E$  - симетричний сепарабельний простір, який є банаховою алгеброю відносно згортки. Тоді для кожного  $t \in \mathbb{R}_1$ ,  $\varepsilon > 0$  існує функція  $h \in E$  така, що виконується співвідношення

$$a) \|h\|_E < \varepsilon, \quad b) \hat{h}(s) = \hat{f}(t) - \hat{f}(s)$$

для всіх  $s$  в деяким околом точки  $t$ .

Теорема 3.2.4. Нехай  $\varphi \in E^\perp$ ,  $\mathcal{J}$  - деякий підпростір в  $E$ . Якщо виконується співвідношення

$$f * \varphi = 0 \quad \forall f \in \mathcal{J},$$

тоді множина

$$Z(\mathcal{J}) = \bigcap_{f \in \mathcal{J}} \{s \in \mathbb{R}_1 : \hat{f}(s) = 0\}$$

містить носій розподілу  $\hat{\varphi}$ .

Теорема 3.2.5 (узагальнена теорема Вінара).

Нехай  $\mathcal{J}$  - замкнутий підпростір в  $E$ , інваріантний відносно зсувів, і якщо множина  $Z(\mathcal{J})$  спільних нулів перетворень Фур'є функцій з  $\mathcal{J}$  порожня, то  $\mathcal{J} = E$ .

Теорема 3.2.6. Нехай  $E((-\infty, \infty); dt)$  - сепарабельний симетричний простір, який є банаховою алгеброю відносно спе-

рації згортки. Замкнений простір в  $E((-\infty, \infty); dt)$  тоді і тільки тоді інваріантний відносно зсувів, коли він - замкнений ідеал в  $E$ .

### 3.3. Структурні властивості алгебри $\widehat{E}$ .

Теорема 3.3.1. Будь-який нетривіальний комплексний гомоморфізм  $\widehat{E}$  в  $\mathbb{C}$  має вигляд

$$\delta_n(f) = \hat{f}(n), f \in \widehat{E},$$

$E((0, 2\pi); dt)$  сепарабельний симетричний простір.

Теорема 3.3.2. Нехай алгебра  $\widehat{E}$  така, що

$$E((0, 2\pi); dt) \not\cong \mathcal{L}_1((0, 2\pi); dt).$$

Тоді в  $\widehat{E}$  є прості елементи.

Теорема 3.3.3. Ідемпонентами в  $\widehat{E}$  будуть елементи вигляду

$$e(x) = \sum_{n=1}^N e_n(x), N < \infty,$$

де  $e_n(x) = e^{inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , і тільки вони.

Теорема 3.3.4. Підмножина алгебри  $\widehat{E}$  є замкненим, інваріантним відносно зсувів підпростором тоді і тільки тоді, коли воно - замкнений ідеал в  $\widehat{E}$ .

## ГЛАВА 4

ФУНКЦІОНАЛЬНІ БАНАХОВІ ПРОСТОРИ, ІНВАРІАНТНІ  
ВІДНОСНО ЗСУВІВ, РОЗТЯГІВ ТА ВІДОБРАЖЕНЬ

Класичні лебегові простори були детально досліджені до середини тридцятих років. В 1939 р. Л. Марцинкевичем для формулювання інтерполяційної теореми були введені нові простори, які потім були названі просторами Марцинкевича. В 1950р. Г. Лоренцем були введені нові простори - простори Лоренца.

Незалежно один від одного С.М. Семеновим та В. Люксембургом були введені симетричні (переставно-інваріантні) простори, які містять в собі вище названі класи. Симетричні простори мають ряд властивостей:

- 1) інваріантність відносно зсувів;
- 2) інваріантність відносно розтягів;
- 3) інваріантність відносно відображень (для симетричних просторів з симетричним відносно нуля носієм).

Якщо симетричний простір сепарабельний, то справедливі ще і властивості:

$$4) \lim_{h \rightarrow 0} \| \tau_h f - f \|_E = 0, f \in E;$$

$$5) \sup_{x \in E} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\| x(t+h) - x(t) \|_E}{\| x \|_E} = C(E) < \infty.$$

Ідеальні простори, введені Л.В. Канторовичем та М.Г. Крейном, розглядалися і вивчалися різними авторами: з властивістю 1) розглядалися Н.І. Ахієзером, з властивістю 3) - М.П. Корнішчуком та ін. Банахові простори  $2\pi$ -періодичних функцій, інваріантні

відносно зсувів, які мають властивість 4), розглядалися Кацнельсоном для узагальнення деяких результатів теорії рядів Фур'є. Однак, аксіом, введених Кацнельсоном, виявилось недостатньо для формулювання багатьох важливих питань теорії рядів Фур'є.

В даній главі вводиться новий клас  $\mathcal{P}$  - просторів, який містить, зокрема, всі сепарабельні симетричні простори.

4.1 присвячений вивченню деяких властивостей лінійних операторів, що діють в ідеальних структурах, інваріантних відносно зсувів. Доведено, зокрема, узагальнення теореми Я. Хермандера про зображуваність оператора, інваріантного відносно зсувів у вигляді згортки з узагальненою функцією.

В 4.2 вивчений  $K$  - оператор Пітре, що діє в парях ідеальних структур. Доведена нова інтерполяційна теорема, яка використовується до посилення класичної теореми про неперервність оператора Стєклова.

4.3. присвячений вивченню деяких питань теорії рядів Фур'є у нових  $\mathcal{P}$  - просторах.

Наведемо деякі результати.

Теорема 4.3.1. Нехай  $E((-\infty, \infty); dt)$  є  $\mathcal{P}$ -простором. Тоді справедливе співвідношення

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|_E = 0,$$

$$\|x\|_E = \|x(t) \chi_{(0, 2\pi)}\|_E.$$

Теорема 4.3.2. Нехай  $E((-\infty, \infty); dt)$  є  $\mathcal{P}$ -простором і справедливе співвідношення

$$\|S_t\|_E = O(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Тоді для ядер Діріхле  $D_N(x)$  та Фейєра  $F_N(x)$  справедливі оцінки

$$\|D_N\|_{\tilde{E}} = O\left[(2N+1) \|G_{\frac{1}{2N+1}}\|_{\tilde{E}}\right]$$

при  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\|F_N\|_{\tilde{E}} = O\left[(N+1) \|G_{\frac{1}{N+1}}\|_{\tilde{E}}\right].$$

при  $N \rightarrow \infty$ .

Теорема 4.3.3. Нехай  $E((-\infty, \infty); dt)$  є  $P$ -простором. Тоді, якщо для додатної послідовності  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  виконані співвідношення:

$$1/ \quad a_n \cdot n \|G_{\frac{1}{n}}\|_{\tilde{E}} = O(1);$$

$$2/ \quad \Delta a_n \cdot n^2 \|G_{\frac{1}{n}}\|_{\tilde{E}} = O(1);$$

$$3/ \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|G_{\frac{1}{n}}\|_{\tilde{E}} |\Delta^2 a_n| < \infty,$$

то послідовність  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  є послідовністю коефіцієнтів Фур'є деякої функції в  $E$ .

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах.

1. Павлов Е.А. Некоторые свойства оператора Харди-Литтльвуда// Мат. заметки. - 1979. - 26, вып. 6. - С. 909-912.
2. Павлов Е.А. К оператору Кальдерона//Укр. мат. журн. - 1981. - 33, №1. - С. 142-143.
3. Павлов Е.А. Об ограниченности операторов свертки в симметричных пространствах//Изв. вузов. - 1982. - №2. - С. 36-40.
4. Павлов Е.А. Об интерполяции операторов сильного типа//Теория операторов в функциональных пространствах.- Воронеж: Воронеж. ун-т, 1983. - С. 67-72.
5. Павлов Е.А. О неравенствах Хаусдорфа-Динга в пространствах со смешанной нормой// Успехи мат. наук.-1984.-39, вып. 2.-С.57-58
6. Павлов Е.А. Об интегральных операторах свертки//Мат. заметки.- 1985. - 38, вып. 1. - С. 74-79.
7. Павлов Е.А. Об одной теореме вложения пространств вещественной интерполяции//Укр. мат. журн.- 1987.- 39, №2.- С. 257-260.
8. Павлов Е... Характеристики для некоторых классов банаховых пространств и их приложения// Укр. мат. журн.- 1987.- 39, № 4. - С. 531-534.
9. Павлов Е.А. О проблеме факторизации функций на симметричных пространствах// Успехи мат. наук.- 1988. - 43, вып. 3.- С.165-166.
10. Павлов Е.А. Об одном классе сингулярных интегральных операторов// Укр. мат. журн. - 1991.- 43, № 1. - С. 105-110.
11. Павлов Е.А. Операция свертки банаховых пространств// Теория функций. Функцион. анализ и их приложение.- 1991. - Вып. 55. С. 80-84.
12. Павлов Е.А. Об операции свертки в симметричных пространствах// Мат. заметки. - 1992. - 52, вып. 6. - С. 63-74.

464/181

Ав 28.365

---

Нідл. до друку 18.05.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.  
Ум. друк арк. 1,86. Ум. фарбо-відб. 1,86. Обл.-вид. арк. 1,5.  
Тираж 100 пр. Зам. 260. Безкоштовно.

---

Віддруковано в Інституті математики АН України  
252601 Київ 4, ІУЦ, вул. Терещенківська, 3