АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ГОМІЛКО Олександр Михайлович

МЕТОДИ СУПЕРПОЗИЦІЇ ТА ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ В ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

01.01.03 - математична фізика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Київ - 1993

Робота виконана в Інституті гідромеханіки Академії наук України.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор М.Д. Копачевський

доктор фізико-математичних наук, професор І.Т. Селезов

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник В.А. Троценко

Провідна установа - Фізико-технічний інститут ім. А.Ф. Іоффе Російської АН (м. Санкт-Петербург)

Захист відбудеться " 7 " грудня 1993 р. в 15 годин на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України (252601 Київ 4, вул. Терещенківська, 3).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики АН України.

Автореферат розісланий "27" жовтня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фіз.-мат. наук, професор А.Ю. Лучка

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Досвід нагромадження та систематизації знань в галузі дослідження математичних моделей фізичних явищ демонструє велике значення використання класичних аналітичних методів побудови розв'язків граничних задач математичної фізики. До таких методів відносяться метод суперпозиції (метод Ламе) і метод власних функцій (метод Фур'є), які грунтуються на розділенні змінних. Незважаючи на більш як столітню історію застосування цих методів в граничних задачах математичної фізики, актуальними, як з теоретичної, так і з прикладної точок зору, залишаються питання математичного обгрунтування їх застосування до конкретних граничних задач теорії пружності. До таких питань, в першу чергу відносяться: питання розв'язання і асимптотичної поведінки розв'язків інтегро-алгебраїчних систем лінійних рівнянь, які виникають при використанні методу суперпозиції, питання про характер збіжності аж до границі рядів і інтегралів, що представляють розв'язок граничної задачі. Ефективне застосування методу власних функцій до складних граничних задач математичної фізики пов'язане з подальшим розвитком спектральної теорії звичайних диференціальних операторів і жмутків операторів. В практичному плані кожен із названих двох методів має певні особливості. Так метод суперпозиції більш пристосований для аналізу ближнього поля, в той час як розклади за власними функціями важливі, особливо в динамічних задачах, для аналізу дальнього поля. Тому важливим і актуальним є встановлення аналітичного зв'язку між зображеннями розв'язку граничної задачі за методом суперпозиції і за методом власних функцій.

Як відомо, при дослідженні певних граничних задач математичної фізики велику роль відіграє використання класичних інтегральних перетворень, які являють собою аналітичний апарат сінгулярного випадку застосування методу власних функцій. У 1938 році М.І.Конторовичем і М.М.Лебєдєвим було введене нове інтегральне перетворення, яке зв'язане з циліндричними функціями Беселя. В подальшому це перетворення знайшло широке використання при аналізі граничних задач акустики і теорії пружності для тіл у формі клина чи конуса. Разом з тим на сьогодні актуальним залишається питання про розширення класів функцій, для яких справедливі відповідні інтегральні зображення Конторовича-Лебєдєва.

Метою роботи є розвиток методів суперпозиції та власних функцій щодо задач лінійної теорії пружності та подальша розробка аналітичних апаратів цих методів.

Теоретичне значення і наукова новизна дисертаційної роботи полягають в тому, що

-встановлено аналітичний зв'язок між методами суперпозиції та власних функцій;

-досліджено питання розв'язування і асимптотичних властивостей розв'язків інтегро-алгебраїчних систем лінійних рівнянь, які виникають в процесі побудови розв'язків граничних задач по методу суперпозиції;

-встановлено асимптотики коефіцієнтів розкладу за однорідними розв'язками в задачах теорії пружності для півсмуги, запропоновано способи регуляризації рядів за однорідними розв'язками у випадках їх розбіжності;

-встановлено однозначну розв'язуваність задачі Діріхле в класичній постановці для бігармонічного рівняння в півсмузі з криволінійним торцем;

-проведено аналіз застосування гіпотези Релея до задач теорії пружності для півсмуги з криволінійним торцем;

-встановлено нові результати про розклад за власними функціями жмутків диференціальних операторів та функціонально-диференціальних операторів з отриманням оцінок швидкості збіжності в різних функціональних просторах;

-встановлено нові класи функцій, для яких справедливі інтегральні зображення Конторовича-Лебєдєва.

Практична цінність роботи. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при теоретичному і чисельному аналізі різних граничных задач математичної фізики. Можливість їх застосування до задач теорії пружності показана в самій роботі. Розроблені методи дослідження властивостей розв'язання і асимптотичних властивостей розв'язків певних класів інтегральних рівнянь і нескінченних систем алгебраїчних рівнянь являють собою інтерес для обчислювальної математики.

Апробація роботи. Результати, які викладені в дисертаційній роботі, доповідались на конференції ім. І.Г.Петровського по диференціальних рівняннях (Москва, 1985), 2-й Всесоюзній конференції по теорії пружності (Тбілісі, 1984), на 3-й Всесоюзній конференції по змішаних задачах механіки деформівного твердого тіла (Харків, 1985), на 11-й і 13-й конференціях молодих вчених Інституту механіки АН УРСР (Київ, 1986 та 1988), на 3-й і 4-й Республіканських школах-семінарах по гідродинаміці (Алушта, 1988 та 1990), Воронежській зимовій математичній школі (Воронеж, 1988), Всесоюзній конференції по функціонально-диференціальних рівняннях (Уфа, 1989), на 11 Всесоюзній акустичній конференції (Москва, 1990), на 2-й і 3-й Кримських осінніх математичних школах по спектральних і еволюційних задачах (Ласпі, 1991 та 1992).

Результати роботи обговорювались на наукових семінарах: у Московському державному університеті (керівники семінару проф. А.Г.Костюченко і проф. А.А.Шкаліков), Ростовському державному университеті (керівник семінару академік РАН І.І.Ворович), Фізико-технічному інституті ім. А.Ф.Іоффе Російської АН, м.Санкт-Петербург (керівники семінару проф. М.М.Лебєдєв і д.ф.-м.н. А.С.Зільберглєйт).

В цілому дисертаційна робота доповідалась і обговорювалась на загальному семінарі Інституту гідромеханіки АН України (керівник семінару чл.-кор. АН України В.Т.Грінченко), на семінарі по загальній механіці у Київському університеті (керівники семінару чл.-кор. АН України А.Ф.Улітко і чл.-кор. АН України В.Т. Грінченко), на семінарі по нелінійній теорії оболонок і стійкості багатовимірних систем при Інституті математики АН України (керівник семінару чл.-кор. АН України І.О.Луковський) на семінарі по диференціальних рівняннях при Інституті математики АН України (керівник семінару проф. М.Л.Горбачук), на семінарі кафедри математичного аналізу Сімферопольського університету (керівник семінару проф. М.Д.Копачевський).

Публікації. Основні результати дисертації відображені у публікаціях 1 - 26.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів та списку літератури. Загальний об'єм складає 288 сторінок машинописного тексту, список літератури включає 184 найменувань.

Зміст роботи

У вступі дається короткий зміст дисертаційної роботи, обгрунтовується актуальність теми.

В першому розділі дисертації розглянуті питання, які пов'язані з дослідженням інтегро-алгебраїчних систем лінійних рівнянь, що виникають при аналізі методом суперпозиції граничних задач теорії пружності і теорії потенціалу.

В §1 введено до розгляду клас інтегральних рівнянь на півосі виду

$$X(s) - \int_0^\infty Q(s,t)X(t)dt = F(s),\ s > 0, \tag{1}$$

де комплекснозначне ядро $Q = Q_0 + Q_1$ і "головна" частина ядра має вигляд

$$Q_0(s,t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1\left(\frac{s}{t_n}\right)\varphi_2\left(\frac{t_n}{t}\right)\frac{1}{t_n} \tag{2}$$

із послідовністю $t_n = t_1 + n - 1,\ n = 1, 2, ...,\ t_1 \in (0, 1]$. Функції φ_j передбачаються аналітичними у деякому секторі комплексної площини $\Sigma = \{\lambda : |\Im\lambda| < d\Re\lambda\},\ d > 0$, а $Q_1(s,t)$ - неперервна функція змінних $s \geq 0,\ t \geq 0$, причому справедливі оцінки

$$|\varphi_j(\lambda)| \leq c|\lambda|^{\nu_1}(1 + |\lambda|)^{-(\nu_1+\nu_2)},\ \lambda \in \Sigma,\ j = 1, 2, \tag{3}$$

$$|Q_1(s,t)| \leq cs^{\nu_0}(1+s)^{-(\nu_0+\nu_3)}(1+t)^{-(1+\nu_4)},\ s \geq 0,\ t \geq 0, \tag{4}$$

з деякими показниками $\nu_j > 0,\ j = 1, 2, 3, 4$, і $\nu_0 \geq 0$. До рівнянь такого типу зводиться дослідження методом суперпозиції основних граничних задач статичної теорії пружності у півсмузі. В роботі отримані загальні твердження і приведені конкретні приклади, пов'язані з питаннями розв'язування та асимптотичної поведінки на нескінченності розв'язків інтегральних рівнянь виду (1)-(4). Розроблено загальну методику дослідження таких рівнянь, що заснована на використанні техніки інтегрального перетворення Мелліна та теорії обернень лінійних операторів.

Введемо до розгляду перетворення Мелліна функції $X(s)$:

$$M[X](\gamma) = \int_0^\infty X(s)s^{\gamma-1}ds$$

і функції

$$\Phi_j(\gamma) = M[\varphi_j](\gamma),\ j = 1, 2,\ \ D(\gamma) = 1 - \Phi_1(\gamma)\Phi_2(\gamma). \tag{5}$$

При цьому, згідно із (3) функції Φ_j аналітичні в смузі $\Re\gamma \in (-\nu_1, \nu_2)$ з оцінками $\forall\ \delta > 0$:

$$|\Phi_j(\gamma)| \leq c_\delta e^{-d_1|\Im\gamma|},\ \Re\gamma \in (-\nu_1 + \delta, \nu_2 - \delta),\ d_1 > 0.$$

Для дійсного σ позначимо через H_σ гільбертів простір вимірних на півосі $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ функцій із нормою

$$\| X \| = \| X(s) s^{\sigma - 1/2} \|_{L_2(\mathbb{R}_+)} .$$

Визначальну роль при розгляді питань існування розв'язків та асимптотичної поведінки розв'язків рівняння (1) має таке твердження.

Теорема 1. *Нехай інтегральний оператор* A_0:

$$(A_0 X)(s) = \int_0^\infty Q_0(s,t) X(t) dt, \ s > 0,$$

тоді для кожного $\sigma \in (-\nu_1, \nu_2)$ *у просторі* $L_2(\sigma - i\infty, \sigma + i\infty)$ *справедлива рівність*

$$M[A_0 X](\gamma) = \frac{1}{2} \Phi_1(\gamma) \Phi_2(\gamma) M[X](\gamma) +$$

$$+ \frac{\Phi_1(\gamma)}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi_2(\xi) \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1) M[X](\xi) d\xi, \ \forall X \in H_\sigma,$$

де $\zeta(z, t_1)$*- узагальнена дзета-функція Рімана.*

Нехай I - одиничний оператор, тоді із теореми 1 випливає, що оператор $I - A_0$, як оператор у просторі H_σ, унітарно еквівалентний певному сінгулярному інтегральному оператору $T = T_\sigma$ у просторі $L_2(\sigma - i\infty, \sigma + i\infty)$. При цьому, у випадку виконання умови

$$D(\gamma) \neq 0, \ \Re\gamma = \sigma, \tag{6}$$

оператор T є нетеровим і має індекс

$$\kappa_\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{D'(\gamma)}{D(\gamma)} d\gamma. \tag{7}$$

Використовуючи цей факт, доводиться така теорема про нормальне розв'язання рівняння (1) у просторі H_σ.

Теорема 2. *Нехай для деякого*

$$\sigma \in (-\nu_1, \nu_2) \cap (-min(\nu_0, \nu_4), min(1, \nu_3))$$

виконана умова (6). Тоді рівняння (1) є нетеровим у просторі H_σ *і має індекс* $\kappa = \kappa_\sigma$.

Твердження теореми 1 дає можливість також дослідити мероморфне продовження перетворення Мелліна $M[X](\gamma)$ розв'язку рівняння (1), що в свою чергу, на основі формули обернення Мелліна, дозволяє отримати оцінки на нескінченності $X(s)$. При цьому, особливості $M[X](\gamma)$ визначаються (наскільки це дозволяє "збурена" частина Q_1 ядра Q та мероморфні властивості функцій $\Phi_j(\gamma)$) нулями функції $D(\gamma)$ та особливостями перетворення Мелліна правої частини $F(s)$ рівняння (1)). Так, наприклад, якщо у смузі $\Re\gamma \in (-\nu_1, \nu_2)$ функція $D(\gamma)$ має лише один простий корінь у точці $\gamma = 0$ і $X(s) \in L_\infty(\mathbf{R}_+)$ - розв'язок рівняння (1) з неперервною при $s \geq 0$ правою частиною $F(s) \in L_\infty(\mathbf{R}_+)$, яка допускає оцінку

$$|F(s)| \leq c(1+s)^{-\mu}, \ s \geq 0 \tag{8}$$

для деякого $\mu > 0$, то тоді знайдеться така константа a, що має місце асимптотика

$$X(s) = a + O(s^{-\alpha}), \ s \to \infty, \ \forall \alpha \in (0, min(\mu, \nu_2, \nu_3)). \tag{9}$$

Подальший розгляд § 1 пов'язаний з тим випадком, коли ядро рівняння (1), крім умов (2), (3), задовольняє також умову регулярності

$$1 - \int_0^\infty |Q(s,t)|\, dt > 0, \ \forall s \geq 0. \tag{10}$$

Відзначимо, що умова регулярності (10) виконується для конкретних інтегральних рівнянь методу суперпозиції, які розглянуті у розділі 2. У зв'язку з умовою (10) введемо до розгляду неперервну функцію

$$q_0(s) = 1 - \int_0^\infty Q(s,t)dt, \ s \geq 0.$$

Можна довести, що виконується співвідношення

$$q_0(s) = O(s^{-\alpha}), \ s \to \infty, \ \forall \alpha \in (0, \nu_2) \cap (0, \nu_3).$$

Т е о р е м а 3. *Нехай функція $D(\gamma)$ має у смузі $\Re\gamma \in (-\nu_1, \nu_2)$ лише простий корінь у точці $\gamma = 0$, причому індекс κ_σ визначений згідно із (7), дорівнює нулю для деякого (а значить і для довільного) $\sigma \in (-\nu_1, 0)$. Нехай для показників із (3) мають місце оцінки $\nu_j \geq 1$, $j = 0, 1, 2, 3$ і виконана умова регулярності (10). Тоді:*

1. Рівняння (1) має єдиний розв'язок у просторі H_σ для довільного $\sigma \in (-\min(\nu_0, \nu_1, \nu_4), 0)$.

2. Союзне до (1) однорідне рівняння

$$Y(s) - \int_0^\infty Q(s,t)Y(t)dt = 0, \; s \geq 0$$

має єдиний (з точністю до нормування) розв'язок $Y(s) \in L_\infty(R_+)$ з умовою $sY(s) \in L_\infty(R_+)$, причому

$$(q_0, Y) \equiv \int_0^\infty q_0(t)Y(t)dt \neq 0.$$

3. Для довільної неперервної при $s \geq 0$ функції $F(s)$ з оцінкою (8) знайдеться єдиний розв'язок $X(s)$ рівняння (1) із простору $L_\infty(R_+)$. При цьому функція $X(s)$ неперервна при $s \geq 0$ і має асимптотику (9) з константою

$$\sigma = (F,Y)/(q_0, Y). \tag{11}$$

Результати §1 розділу 1 суттєвим чином використовуються у розділі 2 при застосуванні методу суперпозиції до граничних задач теорії пружності у півсмузі.

У §2 розділу 1 введено до розгляду та досліджено клас нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$x_{1,k} - \sum_{n=1}^\infty a_{kn}^{(1)} x_{2,n} = b_{1,n}, \; x_{2,k} - \sum_{n=1}^\infty a_{kn}^{(2)} x_{1,n} = b_{2,n}, \tag{12}$$

$$a_{kn}^{(j)} = \varphi_j(t_k t_n^{-1}) t_n^{-1} + q_{kn}^{(j)}, \; j = 1,2; \; k,n = 1,2,...,$$

де послідовність t_n і функції φ_j мають такі самі властивості, що і при означенні ядра Q із (1). Для "збуреної" частини $q_{kn}^{(j)}$ коефіцієнтів системи (12) виконуються оцінки

$$| q_{kn}^{(j)} | \leq ck^{-\nu_3} n^{-(1+\nu_4)}, \; j = 1,2; \; k,n = 1,2,... . \tag{13}$$

Для дослідження системи (12), аналогічно §1, використовується апарат перетворення Мелліна. Крім встановлення асимптотики з оцінкою залишку для обмежених розв'язків системи рівнянь (12), такий підхід дозволяє при розгляді системи (12) скористатися теорією систем сінгулярних інтегральних рівнянь з ядром типу Коші. Виявлено, що незбурена система (12), тобто коли коефіцієнти $q_{kn}^{(j)} \equiv 0$, зводиться до розгляду системи сінгулярних інтегральних рівнянь на прямій $\Re\gamma = \sigma \in (-\nu_1, 0)$:

$$T_\sigma M \equiv A(\gamma)M(\gamma) + \frac{B(\gamma)}{\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{M(\xi)}{\xi-\gamma}d\xi + (VM)(\gamma) = F(\gamma), \quad (14)$$

де вектор-функція

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\gamma)\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{\gamma-1}x_{2,n} \\ \Phi_2(\gamma)\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{\gamma-1}x_{1,n} \end{pmatrix}$$

та матриці

$$A(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -\Phi_1(\gamma)/2 \\ -\Phi_2(\gamma)/2 & 1 \end{pmatrix}, B(\gamma) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\Phi_1(\gamma) \\ -\Phi_2(\gamma) & 0 \end{pmatrix},$$

а V - регулярний інтегральний оператор. При цьому функції $\Phi_j(\gamma)$ мають той же самий сенс, що і при розгляді рівняння (1) і можна вважати, що для функції $D(\gamma)$ виконана умова (6) (за рахунок вибору значення параметра $\sigma \in (-\nu_1, 0)$). Тоді система рівнянь (14) є системою нормального типу із сумарним індексом, який визначається виразом (7), так що оператор T_σ є нетеровим оператором з індексом κ_σ у ваговому функціональному просторі

$$\hat{H}^2(\sigma) = L_2((\sigma - i\infty, \sigma + i\infty); e^{d_1|\gamma|}) \oplus L_2((\sigma - i\infty, \sigma + i\infty); e^{d_1|\gamma|}).$$

З цього факту та з встановленого в роботі зв'язку між обмеженими розв'язками "незбуреної" системи (12) та розв'язками системи (14) із простору $\hat{H}^2(\sigma)$ робиться висновок про нормальне розв'язування системи (12) у просторі $l_\infty \oplus l_\infty$ при правих частинах

$$\{b_{j,k}\}_{k=1}^{\infty} \in l_p, \; j = 1,2; \; p \in [1, \infty). \quad (15)$$

Сформулюємо основний результат §2, який відноситься до регулярних систем виду (12), тобто коли додатково виконується умова

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} | a_{kn}^{(j)} | > 0, \; j = 1,2; \; k = 1,2,\ldots .$$

Теорема 4. *Нехай для функції $D(\gamma)$ виконані умови теореми 3 і система (12) є регулярною. Тоді для довільної правої частини системи (12) із умовою (15) існує єдиний розв'язок $\{x_{j,k}\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\infty}$, $j = 1, 2$ системи рівнянь (12). При цьому справедливі асимптотики*

$$x_{j,k} = a_j + b_{j,k} + O(k^{-\alpha}),\ k \to \infty,\ j = 1, 2, \tag{16}$$

де a_j - постійні із співвідношенням $a_2 = \Phi_2(0)a_1$ і α - довільне число з інтервалу $(0, \min(\nu_2, \nu_3, p^{-1}))$.

В §2 наведено застосування теореми 4 до двох конкретних систем алгебраїчних рівнянь, що виникають при розгляді граничних задач теорії пружності у прямокутнику. Крім цього, показано, аналогічно твердженню теореми 3, що питання про апріорне визначення постійних a_j з асимптотичних формул (16) зв'язане з розв'язком однорідної союзної до (12) системи рівнянь з певного простору послідовностей.

В §3 розділу 1 показано, що відомий з теорії систем алгебраїчних рівнянь закон асимптотичних виразів Б.М. Кояловича, а також його різні узагальнення, допускає абстрактне формулювання у рамках теорії функціональних рівнянь в напівупорядкованих K_σ-просторах. Наведемо висновок з цього результату, який відноситься до питання про поведінку на нескінченності обмежених розв'язків абстрактних інтегральних рівнянь. Нехай (T, Σ, μ) - простір з повною σ-скінченною мірою μ:

$$T = \cup_{k=1}^{\infty} T_k,\ T_k \subset T_{k+1},\ \mu(T_k) < \infty,\ \mu(T) = \infty.$$

У дійсному функціональному K-просторі $L_\infty = L_\infty(T, \Sigma, \mu)$ розглядається інтегральний оператор A:

$$(Az)(s) = \int_T A(s,t) z(t) d\mu(t),$$

де $A(s,t)$ — $\nu = \mu \times \mu$—вимірна невід'ємна функція на прямому добутку $T \times T$, причому

$$Az \in L_\infty,\ \forall z \in L_\infty.$$

Тоді має місце таке твердження.

Теорема 5. *Нехай рівняння $z - Az = 0$ не має нетривіальних розв'язків у просторі L_∞ і для деяких невід'ємних функцій*

$z \in L_\infty$, $w \in L_\infty$ має місце рівність $z - Az = w$. Нехай знайдуться такі постійні $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, що для ν-майже усіх $(s,t) \in (T \setminus T_k) \times T_k$ виконується нерівність

$$b_1 w(s) \leq A(s,t) \leq b_2 w(s)$$

та виконані умови

$$\int_T z(s) d\mu(s) = \infty, \quad w(s) > 0 \ (\mu - \text{майже скрізь}).$$

Тоді, якщо функція

$$v \in L_\infty, \ | v(s) | \leq \alpha w(s) \ (\mu - \text{майже скрізь}),$$

то рівняння $x - Ax = v$ має єдиний розв'язок $x \in L_\infty$, причому знайдеться така постійна a, $| a | \leq \alpha$, що

$$\lim_{k \to \infty} \mu - \sup_{s \in T \setminus T_k} |x(s)/z(s) - a| \to 0.$$

У §4 розділу 1 досліджується нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$x_k - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)! x_n}{n! k! \nu^{n+k+1}} = f_k, \ k = 0, 1, \cdots, \tag{17}$$

де постійна $\nu > 2$. Система (17) виникає при розгляді методом суперпозиції граничної задачі про розрахунок електростатичного поля у просторі з двома сферичними провідниками рівного радіуса. Система (17) для довільної обмеженої послідовності $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_\infty$ має єдиний розв'язок $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_\infty$. Цей розв'язок може бути отриманий за методом послідовного наближення. Основні питання, зв'язані з дослідженням системи (17), відносяться до отримання аналітичних виразів для її розв'язків і до дослідження асимптотики розв'язків на нескінченності.

Теорема 6. *Нехай $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ - обмежений розв'язок системи (17) з правою частиною $f_k = \delta_{k0}$ (δ_{kj} - символ Кронекера). Тоді справедлива асимптотика*

$$x_k = -(1-\beta^2)^{1/2} (\ln \beta)^{-1} \beta^k k^{-1/2} \times$$

$$\times \{\sqrt{\pi}/2 + \Re \sum_{n=1}^{\infty} (1-\beta^2)^{\imath a n} \Gamma(1/2 - \imath a n) k^{\imath a n} + O(k^{-1})\}, \ k \to \infty, \tag{18}$$

де числа

$$a = -\pi/\ln\beta, \ \beta = \frac{1}{2}\left(\nu - \sqrt{\nu^2 - 4}\right) \in (0,1).$$

Таким чином, асимптотика розв'язку системи (17) має складний, осцилюючий характер, що пов'язано із геометрією області, де розглядається вихідна гранична задача теорії потенціала.

Позначимо через $x(j) = \{x_k(j)\}_{k=0}^{\infty}$ обмежений розв'язок системи (17) з правою частиною $f_k = \delta_{kj}$.

Т е о р е м а 7. *Мають місце рекурентні формули*

$$mx_k(m) = kx_{k-1}(m-1) + \nu(m-1-k)x_k(m-1) + \\ +(k+1)x_{k+1}(m-1) - (m-1)x_k(m-2),$$

де $m = 1, 2, ..., \ k = 0, 1, 2, ...$ *і* $x_k(-1) = x_{-1}(j) = 0$.

При отриманні твердження теореми 7 виявилося корисним введення до розгляду функцій

$$\Phi_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(j) z^k, \ |z| < 1, \ j = 0, 1, ...$$

з подальшим дослідженням функціональних рівнянь, яким задовольняють ці функції.

В другому розділі дисертаційної роботи розглянуті питання, зв'язані з використанням різних варіантів методу суперпозиції при побудові і аналізі розв'язків граничних задач теорії пружності у півсмузі, в тому числі і з криволінійним торцем.

В основі методу суперпозиції лежить така ідея Г.Ламе (1862). Область U, в якої розглядається гранична задача для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними із сталими коефіцієнтами, зображається як переріз областей U_j таким чином, щоб у кожній із областей U_j була можливість побудови загального розв'язку деякої граничної задачі (тут маємо довільність для вибору) для вихідної системи диференціальних рівнянь. Тоді розв'язок вихідної граничної задачі в U шукається у вигляді лінійної комбінації цих загальних розв'зків і виконання граничних умов зводиться в загальному випадку до системи інтегро-алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій і послідовностей.

Великий внесок у розвиток методу суперпозиції та його практичне застосування в задачах теорії пружності належить таким вченим як L.N.G.Filon, С.П.Тимошенко, Б.М.Коялович, І.Г.Бубнов, Б.Г.Галеркін, П.С.Бондаренко, Б.Л.Абрамян, О.В.Бєлоконь, В.В.Копасенко, В.Т.Грінченко, А.Ф.Улітко, В.В.Мелешко та ін.

Щоб більш конкретно продемонструвати суть та можливості методу суперпозиції, розглянемо близько зв'язану з задачами теорії пружності задачу Діріхле для однорідного бігармонічного рівняння у півсмузі $\Pi = \{(x,y) : x > 0, |y| < 1\}$:

$$\begin{gathered}\Delta^2 u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \Pi,\\ u(x,\pm 1) = u'_y(x,\pm 1) = 0,\ x > 0,\\ u(0,y) = f(y),\ u'_x(0,y) = g(y),\ |y| < 1.\end{gathered} \tag{19}$$

Нехай функції f, g є парними та задовольняють умови

$$f \in W_p^1,\ g \in L_p,\ p > 1,\ f(1) = 0, \tag{20}$$

де $W_p^k = W_p^k[-1,1]$ - простір Соболева, причому

$$\int_{-1}^{1} g(y)dy = 0. \tag{21}$$

Підкреслимо, що умова (21) не зменшує загальності розгляду тому, що завжди може бути виконана із допомогою окремого розв'язку бігармонічного рівняння у півсмузі. При побудові розв'язку граничної задачі (19) за методом суперпозиції використовуємо розклади в ряд Фур'є

$$f(y) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\alpha_n y,\ \ g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos\alpha_n y,\ \ \alpha_n = \pi n.$$

Згідно із загальною схемою методу суперпозиції, зображуючи півсмугу Π як переріз смуги $|y| < 1$ і півплощини $x > 0$, розв'язок граничної задачі (19) шукаємо у вигляді (проміжні перетворення не наводимо):

$$\begin{gathered}u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} X(s)\frac{U(s,y)}{s^3\sinh^2 s}\cos sx ds +\\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(-1)^{n+1}X_n}{2\alpha_n^3} + f_n\right)(1+\alpha_n x) + g_n x\right)e^{-\alpha_n x}\cos\alpha_n y,\end{gathered} \tag{22}$$

де функція

$$U(s,y) = (s\cosh s + \sinh s)\cosh sy - sy\sinh s \sinh sy.$$

При певних умовах на невідомі функцію $X(s)$ та послідовність X_n парна по y функція u із (22) задовольняє бігармонічному рівнянню в П і граничним умовам із (19) для нормальної похідної на границі півсмуги. Виконання інших граничних умов приводить до співвідношення

$$X_n = \frac{4\alpha_n^3}{\pi}\int_0^\infty \frac{X(s)}{(s^2+\alpha_n^2)^2}ds,\ \ n = 1,2,\dots, \tag{23}$$

та інтегрального рівняння відносно функції $X(s)$:

$$X(s) - \frac{16s^3\sinh^2 s}{\pi\Delta(s)}\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n^3 X(t)}{(s^2+\alpha_n^2)^2(t^2+\alpha_n^2)^2}dt = F(s),\ s>0, \tag{24}$$

де функції

$$\Delta(s) = \sinh s\cosh s + s,$$

$$F(s) = \frac{4s^3\sinh^2 s}{\Delta(s)}\left(-2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n\alpha_n^3 f_n}{(s^2+\alpha_n^2)^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n(s^2-\alpha_n^2)g_n}{(s^2+\alpha_n^2)^2}\right).$$

Ядро $Q(s,t)$ із (24) можна записати у вигляді

$$Q(s,t) = Q_0(s,t) + \left(\frac{\sinh^2 s}{\Delta(s)} - 1\right)Q_0(s,t),$$

де $Q_0(s,t)$ має вигляд (2) з функціями

$$\phi_1(\lambda) = \frac{4\pi\lambda^3}{(\lambda^2+\pi^2)^2},\ \phi_2(\lambda) = \frac{4\pi\lambda^3}{(\lambda^2\pi^2+1)^2},\ \Re\lambda > 0$$

і послідовністю $t_n = n,\ n = 1,2,\dots$. Для функції $\mathcal{D}(\gamma)$ із (5) в даному випадку маємо вираз

$$\mathcal{D}(\gamma) = \mathcal{D}_0(\gamma)/\cos^2\pi\gamma/2,\ \ \mathcal{D}_0(\gamma) = \cos^2\pi\gamma/2 - (\gamma+1)^2.$$

При цьому $\mathcal{D}(\gamma)$ мероморфна у всій комплексній площині і у смузі $\Re\gamma \in (-2,\sigma_0)$ для деякого $\sigma_0 \in (1,2)$ має єдиний простий корінь $\gamma = 0$.

Використання результатів §1 розділу 1 разом із умовою регулярності рівняння (24):

$$1-\frac{16s^3\sinh^2 s}{\pi\Delta(s)}\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{\alpha^3}{(s^2+\alpha_n^2)^2(t^2+\alpha_n^2)^2}dt=\frac{2\sinh^2(s)}{s\Delta(s)}>0,\ s\geq 0$$

дозволяє отримати таке твердження.

Т е о р е м а 8. *Нехай $\sigma\in(-2,-1-1/p)$, тоді для довільних f,g з умовами (20), (21) рівняння (24) має єдиний розв'язок $X(s)\in H_\sigma$. Перетворення Мелліна $M(\gamma)=M[X](\gamma)$ цього розв'язку є аналітичною в смузі $\Re\gamma\in(-4,-1-1/p)$ функцією. Для γ з $\Re\gamma>-2$ має місце співвідношення*

$$M(\gamma)=\frac{2\Gamma(\gamma+2)\cos\pi\gamma/2}{\mathcal{D}_0(\gamma)}\times$$

$$\times\Big((\gamma+1)\sin\pi\gamma/2\int_{-1}^1 f'(y)\frac{(1+y)^{\gamma+2}-(1-y)^{\gamma+2}}{(1-y^2)^{\gamma+2}}dy+$$

$$+(\gamma+2)\cos\pi\gamma/2\int_{-1}^1 g(y)\frac{(1+y)^{\gamma+2}+(1-y)^{\gamma+2}}{(1-y^2)^{\gamma+2}}dy\Big)+M_1(\gamma),\quad (25)$$

де $M_1(\gamma)$ - мероморфна у півплощині $\Re\gamma>-2$ функція з полюсами у коренях γ_k функції $\mathcal{D}_0(\gamma)$, $\Re\gamma\geq 0$ і оцінками

$$|M_1(\gamma)|\leq c_\mu e^{-\delta_1|\Im\gamma|},\ \Re\gamma\in(-2+1/\mu,\mu),\ |\gamma-\gamma_k|\geq 1,\forall\mu>0.$$

Теорема 8 і співвідношення

$$X(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}M(\gamma)s^{-\gamma}d\gamma,\ s>0,$$

$$X_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}M(\gamma)\frac{(\gamma+1)}{\cos\pi\gamma/2}\alpha_n^{-\gamma}d\gamma,\ n=1,2,...,$$

де $\sigma\in(-3,-1-1/p)$, мають вирішальне значення для обгрунтування того факту, що функція u із (22) дійсно є розв'язком граничної задачі (19).

Нехай для парних функцій f,g виконано умови (20). Тоді має місце така теорема.

Теорема 9. *Існує єдиний нескінченно диференційований при $x > 0$, $|y| \leq 1$ розв'язок граничної задачі (19) із умовами*

$$|u(x,y)| \leq ce^{-\delta x},\ x \geq 1,\ |y| \leq 1,\ \delta > 0, \qquad (26)$$

$$\|u(x,y) - f(y)\|_{W_p^1} + \|u'_x(x,y) - g(y)\|_{L_p} \to 0,\ x \to 0. \qquad (27)$$

Знайдеться така постійна $c > 0$, що

$$\|u(x,y)\|_{W_p^1} + \|u'_x(x;y)\|_{L_p} \leq c(\|f\|_{W_p^1} + \|g\|_{L_p}),\ x > 0.$$

Якщо для g додатково виконана умова (21), то цей розв'язок дається виразом (22), де функція $X(s)$ і послідовність X_n визначені згідно із теоремою 8 і (23).

Результати, аналогічні твердженням теореми 9, отримано і у випадках, коли функції f, g задовольняють умови гладкості

$$f \in W_p^n,\ g \in W_p^{n-1},\ 1 < p < \infty,\ n = 2,3.$$

Розгляд граничної задачі (19) по методу власних функцій дає такий вираз для її розв'язку

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k(y) e^{i\lambda_k x},\ x > 0, |y| \leq 1,\ \Im\lambda_k > 0, \qquad (28)$$

де a_k - невідомі коефіцієнти, а $z_k(y)$ - власні функції жмутка звичайних диференціальних операторів $\mathcal{L}(\lambda)$:

$$\mathcal{L}(\lambda)z(y) = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \lambda^2\right)^2 z(y),\ |y| \leq 1,\ z(\pm1) = z'(\pm1) = 0, \qquad (29)$$

що відповідають власним значенням λ_k з півплощини $\Im\lambda > 0$ (дійсних власних значень і приєднаних функцій жмуток операторів $\mathcal{L}(\lambda)$ не має). У випадку парної по y задачі (19) власні значення λ_k визначаються як корені цілої функції $\Delta(\lambda) = \sinh\lambda\cosh\lambda + \lambda$ з півплощини $\Im\lambda > 0$, а відповідні власні функції мають вигляд $z_k(y) = U(\lambda_k, y)$. Виконання граничних умов із (19) при $x = 0, |y| < 1$ зводиться до питання про можливість та характер збіжності двократного розкладу

$$\begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \begin{pmatrix} z_k(y) \\ i\lambda_k z_k(y) \end{pmatrix},\ |y| < 1,\ \Im\lambda_k > 0, \qquad (30)$$

по частині власних функцій жмутка операторів $\mathcal{L}(\lambda)$. Це питання не є тривіальним і має самостійний інтерес у рамках спектральної теорії несамоспряжених операторів. У §2 розділу 2 встановлено аналітичний зв'язок між зображеннями розв'язку u граничної задачі (19) за методом суперпозиції (вираз (22)) і за методом власних функцій (вираз (28)).

Т е о р е м а 10. *Функція u із (22) припускає розклад (28) з коефіцієнтами*

$$a_k = \frac{i}{\cosh^2 \lambda_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - (-1)^n(2\alpha_n^3 f_n - (\lambda_k^2 - \alpha_n^2)g_n)}{(\lambda_k^2 + \alpha_n^2)^2}, \quad (31)$$

де послідовність X_n визначена згідно із (23).

З теореми 10 випливає, що в (26) можна покласти

$$\delta = min \Im \lambda_k, \ \ k = 1, 2, \dots .$$

Розвинутий у §2 підхід до отримання розкладу (28) на основі використання зображення розв'язку u у вигляді (22), дає можливість дослідити збіжність двократного розкладу (30) по частині власних функцій жмутка операторів (29). Ця можливість здійснена у розділі 3. Міркування із §1, §2, які відносяться до граничної задачі Діріхле для бігармонічного рівняння, мають загальний характер і дозволяють отримувати аналогічні результати при дослідженні граничних задач теорії пружності.

У §3, §4 розглядаються на основі методу суперпозиції дві типові граничні задачі статики пружних тіл: задача про деформування пружної півсмуги під дією силового навантаження на торці і змішана гранична задача для пружної півсмуги з вільними від напружень бічними сторонами і заданими зміщеннями на торці. Дається обгрунтування застосування методу суперпозиції. На основі результатів розділу 1 з'ясовано питання про асимптотику на нескінченності розв'язків інтегро-алгебраїчних систем рівнянь, які виникають. Встановлено, в рамках методу суперпозиції, характер локальної поведінки поля напружень в околах кутових точок півсмуги. Встановлено аналітичний зв'язок між зображеннями розв'язків розглянутих граничних задач за методом суперпозиції та за методом власних фучкцій.

У §5, §6 розглянуто в класичній постановці граничну задачу Діріхле для однорідного бігармонічного рівняння в півсмузі Π з криволінійним торцем Г:

$$\Pi = \{(x, y) : x > l(y), | y |< 1\}, \ \ \Gamma = \{(x, y) : x = l(y), | y |< 1\},$$

де $l(y)$ - двічі неперервно диференційовна на відрізку $[-1, 1]$ функція і $l(\pm 1) = l'(\pm 1) = 0$. Розглядається гранична задача

$$\Delta^2 u(x, y) = 0, \ (x, y) \in \Pi, \ u \in C^4(\Pi) \cap C^1(\bar{\Pi}),$$

$$u(x, \pm 1) = u'_y(x, \pm 1) = 0, \ x \geq 0, \ u \, |_\Gamma = f, \ \frac{\partial u}{\partial n} \, |_\Gamma = g, \tag{32}$$

$$\| u \|_{C^1(\bar{\Pi})} = \sup_{(x,y) \in \bar{\Pi}} (| u(x, y) | + | \nabla u(x, y) |) < \infty.$$

Таким чином, шукана функція u припускається, на відміну від узагальненої постановки задачі Діріхле, неперервно диференційовною у замиканні $\bar{\Pi}$ області Π. На функції f, g накладаються природні умови

$$f \in C^1[-1, 1], \ g \in C[-1, 1], \ f(\pm 1) = f'(\pm 1) = g(\pm 1) = 0. \tag{33}$$

Тут використання загальної ідеї Г.Ламе потребує залучення до розгляду бігармонічних потенціалів, які зосереджені на кривій Г. При цьому півсмуга Π може бути уявлена як зв'язна компонента перерізу смуги $| y |< 1$ і зовнішності кривої Г.

В розділі 2 гранична задача (32) зведена до системи інтегральних рівнянь на кривій Г. Доведено, що ця система, як система інтегральних рівнянь на відрізку $[-1, 1]$, має єдиний розв'язок у банаховому просторі неперервних функцій

$$B = \Big\{(q_1, q_2) \in C[-1, 1] \oplus C[-1, 1] :$$

$$q_1(\pm 1) = q_2(\pm 1) = 0, \ \int_{-1}^{1} (q_1(t) + l'(t) q_2(t)) dt = 0\Big\}.$$

Запропонований у дисертаційній роботі спосіб зведення граничної задачі (32) до системи інтегральних рівнянь на граничній кривій Г ґрунтується на перенесенні відомої конструкції Шермана-Лауричели, яка використовується у задачах теорії пружності в областях із скінченною границею, на область із нескінченною границею - півсмугу. Щоб позбутися необхідності виконання граничних умов із (32) на бокових сторонах півсмуги та на нескінченності, використовується функція Гріна для бігармонічного рівняння у смузі $|y| < 1$ (з однорідними умовами Діріхле на сторонах $|y| = 1$).

Нехай $G(y,t;\lambda)$, $-1 \le y,t \le 1$ - функція Гріна звичайного диференціального оператора $\mathcal{L}(\lambda)$ (див. (29)), яка при фіксованих y,t є парною мероморфною по $\lambda \in \mathbf{C}$ функцією з простими полюсами у точках $\pm\lambda_k$. По функції Гріна $G(y,t;\lambda)$ введемо до розгляду при $y \ne t$ функції

$$H_1(y,t;\lambda) = 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2\right) G(y,t;\lambda),$$

$$H_2(y,t;\lambda) = -2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2\right) G(y,t;\lambda),$$

$$H_3(y,t;\lambda) = 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3\lambda^2\right) G(y,t;\lambda),$$

і нехай функції

$$Q_1(x,y;t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_1(y,t;\lambda)\lambda^{-1}\sin\lambda(x - l(t))d\lambda -$$
$$-\frac{1}{2}H_1(y,t;0) + \frac{l'(t)}{\pi}\int_0^\infty H_2(y,t;\lambda)\cos\lambda(x - l(t))d\lambda,$$

$$Q_2(x,y;t) = \frac{l'(t)}{\pi}\int_0^\infty H_3(y,t;\lambda)\lambda^{-1}\sin\lambda(x - l(t))d\lambda -$$
$$-\frac{l'(t)}{2}H_3(y,t;0) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty H_2(y,t;\lambda)\cos\lambda(x - l(t))d\lambda,$$

де

$$H_j(y,t;0) = y(3 - y^2)/2 - sign(y - t), \ j = 1,3.$$

Т е о р е м а 11. *Для довільних f,g з умовами (33) існує єдиний розв'язок u граничної задачі (32). Цей розв'язок має вигляд*

$$u(x,y) = \int_{-1}^1 Q_1(x,y;t)q_1(t)dt + \int_{-1}^1 Q_2(x,y;t)q_2(t)dt, \ x > l(y), |y| < 1,$$

де вектор-функція $q = \{q_1, q_2\} \in B$ однозначно визначається із відповідної системи інтегральних рівнянь. Знайдеться така постійна

$c > 0$, що для розв'язків граничної задачі (32) має місце оцінка

$$|\nabla u(x,y)| + |u(x,y)| \le c(\|f\|_{C^1} + \|g\|_C)e^{-\delta x},\ (x,y) \in \bar{\Pi}, \quad (34)$$

де $\delta = min \Im \lambda_k,\ k = 1, 2, \ldots$.

Підкреслимо, що оцінка (34) є узагальненням принципу максимуму Міранда-Агмона на нескінченну область - півсмугу. З неї маємо оцінку для норм

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Pi})} \le c(\|f\|_{C^1} + \|g\|_C).$$

Твердження теореми 11 є новим і у випадку прямолінійного торця, тобто коли $l(y) \equiv 0$.

При використанні методу суперпозиції у динамічних задачах виникають труднощі, які пов'язані з необхідністю урахування умов випромінювання на нескінченності. У §7 розділу 2 роботи розглянута задача про збудження поздовжних хвиль у напівскінченному пружному шарі $X > 0$, $|Y| < d$ при дії на торці гармонічного по часу навантаження. Показано, що використання принципу граничного поглинання дає можливість провести коректну алгебраїзацію функціональних рівнянь методу суперпозиції. Тут система інтегро-алгебраїчних рівнянь має інтеграли типу Коші з особливостями у дійсних коренях дисперсійного рівняння Релея-Лемба для шару. Приведено розрахункові формули та показана ефективність запропонованого алгоритму розрахунку поля напружень. Отримано перерозклад розв'язку граничної задачі по методу суперпозиції у ряд зао нормальними хвилями Релея-Лемба. Інтерес до розглянутої у §7 задачі обумовлений необхідністю подальшої розробки методів чисельного розв'язку складних граничних задач динаміки пружних тіл.

Третій розділ дисертації присвячено питанням розкладу за власними функціями в задачах теорії пружності та для звичайних функціонально-диференціальних операторів на скінченному відрізку. Метод власних функцій (метод однорідних розв'язків) у застосуванні до задач теорії пружності бере свій початок від класичних робіт П.А.Шиффа (1883), В.А.Стеклова (1892). У подальшому він використовувався в роботах таких відомих вчених як J.Dougall, L.N.G.Filon, А.І.Лур'є, П.Ф.Папкович, В.К.Прокопов, І.І.Ворович, Ю.А.Устінов, та інші. У розділі 3, на основі встановленого у розділі 2 зв'язку між методами суперпозиції та власних функцій, отримано нові суттєві результати, які пов'язані з питаннями збіжності рядів за однорідними розв'язками на граничних поверхнях. У випадках розбіжності рядів (відповідні приклади наведено у дисертаційній роботі) розглянуто питання їх регуляризації. Отримано оцінки для коефіцієнтів та оцінки швидкості збіжності рядів у різних функціональних просторах.

У §1, §2 розділу 3 докладно вивчається питання про двократний розклад (30) по частині власних функцій жмутка диференціальних операторів $\mathcal{L}(\lambda)$. Як вже відмічалося, задача про розклад (30) зв'язана із використанням методу власних функцій до граничної задачі Діріхле для бігармонічного рівняння у півсмузі. Ця задача про розклад була поставлена П.Ф.Папковичем (1941), а потім І.І.Воровичем (1964) як одна з математичних проблем теорії пластин , а її розв'язок було отримано (у різних функціональних просторах і різними методами) у роботах R.D.Gregory (1980), А.А.Шкалікова (1983), О.М.Гомілка і В.В.Мелешка (1987). У §1 отримано нові результати про збіжність розкладу (30) з урахуванням оцінок швидкості збіжності. Для формулювання результатів відносно розкладу (30) введемо деякі означення. Нехай функція $v(y) \in L_p[-1,1]$, $1 < p < \infty$, тоді, якщо вважати $v(y) = 0, \forall y : |\, y \,| > 1$, означимо її інтегральний модуль неперервності

$$\omega_p(\delta, v) = \Big\{ \sup_{|h|<\delta} \int_{-1}^{1} |\, v(y+h) - v(y) \,|^p \, dy \Big\}^{1/p}, \ \delta > 0,$$

тоді $\omega_p(\delta, v) \to 0$, $\delta \to 0$. Нехай парні функції f, g задовольняють умовам

$$f \in W_p^{n+1},\ g \in W_p^n,\ 1 < p < \infty,$$

де $n = 2$, або $n = 3$ і

$$f(1) = f'(1) = g(1) = g'(1) = 0.$$

Тоді має місце така теорема.

Теорема 12. *Пара функцій f, g допускає розклад (30), який збігається у просторі $C^{n-1}[-1,1] \oplus C^{n-2}[-1,1]$. При цьому для вектор-функцій*

$$\mathbf{V}_m(y) = \begin{pmatrix} f(y) - \sum\limits_{|\lambda_k| < \pi(m+1/4)} a_k z_k(y) \\ g(y) - \sum\limits_{|\lambda_k| < \pi(m+1/4)} a_k i \lambda_k z_k(y) \end{pmatrix}$$

де a_k - коефіцієнти відповідного розкладу, мають місце оцінки

$$\| V_m(y) \|_{W^l_r \oplus W^{l-1}_r} \le c \frac{(\omega_p(m^{-1}, f^{(n+1)}) + \omega_p(m^{-1}, g^{(n)})}{m^{n-1-l}(\ln m + 1)^{1/r}}, \ m = 1, 2, ...,$$

де $1 \le r \le \infty$, і $l = 1$ у випадку $n = 2$ та $l = 1, 2$ коли $n = 3$. У випадку $k = 3$ розклад (33) абсолютно збігається у просторі $C^1[-1, 1] \oplus C[-1, 1]$ і для коефіцієнтів розкладу має місце оцінка

$$| a_k | \le c(\| f \|_{W^4_p} + \| g \|_{W^3_p})(\ln k + 1)^{1/p-1} k^{-4}.$$

Відзначимо, що коли в умовах теореми 12 функція $g(y)$ задовольняє також умові (21), то коефіцієнти розкладу a_k визначаються із виразу (31). Якщо умова (21) не виконується, то для визначення коефіцієнтів a_k замість пари функцій f, g слід ввести до розгляду пару функцій

$$\begin{pmatrix} f_1(y) \\ g_1(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} - \tilde{a}_1 \begin{pmatrix} z_1(y) \\ i\lambda_1 z_1(y) \end{pmatrix},$$

де

$$\tilde{a}_1 = -i\lambda_1^{-1} \int_{-1}^1 g(y)dy \left(\int_{-1}^1 z_1(y)dy \right)^{-1}, \ \int_{-1}^1 z_1(y)dy = 4\lambda_1^{-1} \sinh^2 \lambda_1.$$

У §2 встановлено такий результат відносно можливої розбіжності розкладу (30).

Т е о р е м а 13. *Нехай пара функцій f, g має вигляд*

$$f(y) \equiv 0, \ g(y) = \begin{Bmatrix} (y_0^2 - y^2)^{\beta - 1}, | y | < y_0 \\ 0, | y | \in [y_0, 1] \end{Bmatrix}, \qquad (35)$$

де $y_0 \in (1 - 1/p, 1)$, $1 < p < \infty$ і $\beta \in (2 - 1/p, 1 + y_0)$. Тоді знайдуться такі коефіцієнти a_k, що ряд з (30) є збіжним до пари f, g у сенсі Абеля:

$$\begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} = W_p^2 \oplus W_p^1 - \lim_{x \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \begin{pmatrix} z_k(y) \\ i\lambda_k z_k(y) \end{pmatrix} e^{i\lambda_k x},$$

але

$$\| a_k \lambda_k z_k(y) \|_{L_p} \to \infty, \ k \to \infty,$$

так що цей ряд є розбіжним у звичайному сенсі в просторі $W_p^1 \oplus L_p$.

Підкреслимо, що функція $g(y)$ з (35) належить простору W_p^1, а при $\beta \to 2$ функція $g \in W_r^1$ для довільного, наперед заданого $r < \infty$.

Інші результати про розбіжність рядів за власними функціями, які зв'язані з розв'язанням бігармонічного рівняння у півсмузі при різних граничних умовах, були отримані у роботах R.D.Gregory (1980), D.D.Josef, L.D.Sturges, W.H.Warner (1982), D.A.Spence (1983) (на основі використання співвідношень біортогональності П.Ф.Папковича).

У §3, §4 розділу 3 в рамках методу власних функцій розглянуто дві задачі статичної теорії пружності для півсмуги, аналіз яких на основі методу суперпозиції було проведено у §3, §4 розділу 2. Досліджено відповідні розклади за власними функціями на торці півсмуги, особливу увагу приділено випадкам розбіжності рядів для напружень. В цих випадках запропоновано алгоритми регуляризації, що дозволяють мати розрахункові формули в рамках методу власних функцій, незважаючи на розбіжність прямого варіанту цього методу. При отриманні цих результатів важливе значення мають асимптотичні формули для коефіцієнтів розкладу a_k, $k \to \infty$. Наведемо один з отриманих результатів. При розгляді змішаної граничної задачі для пружної півсмуги з вільними від напружень бічними сторонами і заданими зміщеннями на торці

$$u_x(o,y) = f(y) \in W_p^3,\ u_y(o,y) = g(y) \in W_p^3,\ p > 1,$$

де парна функція f і непарна функція g набувають дійсні значення, отримано, що ряди за однорідними розв'язками для зміщень збігаються на торці $x = 0$ з оцінкою

$$\| f(y) - a_0 - \sum_{|\lambda_k^+| < \pi(m+1/4)} 2\Re\{a_k^+ U_x(\lambda_k^+, y)\} \|_{C[-1,1]} +$$

$$+ \| g(y) - \sum_{|\lambda_k^+| < \pi(m+1/4)} 2\Re\{i a_k^+ U_y(\lambda_k^+, y)\} \|_{C[-1,1]} \le c m^{-\alpha},$$

де $m = 1, 2, \dots$ і λ_k^+ - відповідні корені $\Delta(\lambda)$ з чверть площини $\Re\lambda > 0$, $\Im\lambda > 0$. Доведено, що для коефіцієнтів розкладу має місце асимптотика

$$a_k^+ = \tilde{a}(\lambda_k^+)^{-\alpha} \cosh^{-2} \lambda_k^+ + O(k^{-2}(\ln k)^{-1+1/p}),\ k \to \infty, \qquad (36)$$

де $\tilde{a}$ - постійна і $\alpha = \alpha(\nu) \in (1/2, 1)$ ($\nu \in (0, 1/2)$ - коефіцієнт Пуасона матеріалу пружної півсмуги) - єдиний корінь функції

$$\mathcal{D}_0(\gamma) = (3 - 4\nu)\cos^2 \pi\gamma/2 - (1 - 2\nu)^2 + \gamma^2$$

у смузі $\Re\gamma \in [0, 1]$. На основі (36) доводиться, що (при $\tilde{a} \neq 0$) відповідні ряди для напружень на торці $x = 0$ виявляються розбіжними при $|\, y \,| \in [2\alpha - 1, 1)$. Раніш цей факт (без доведення) відмічався R.D.Gregory, I.Gladwell (1982). Встановлена асимптотика (36) дає можливість привести розрахункові формули для напружень на торці півсмуги. Так, наприклад, для зсувного напруження відповідний вираз має вигляд

$$\frac{1}{2G}\tau_{xy}(0, y) =$$

$$= -\frac{b \sin \pi\alpha/2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(s \sinh s - \cosh s)\sinh sy - sy \cosh s \cosh sy}{s^\alpha(\sinh s \cosh s + s)} ds +$$

$$+ \frac{b(2 + \alpha - 2\nu)}{\pi} \int_0^\infty \frac{(s \sin s + \cos s)\sin sy + sy \cos s \cos sy}{s^\alpha(\sin s \cos s + s)} ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^\infty \Re\{a_{1,k}^+ (\frac{d}{dy} U_x(\lambda_k^+, y) - \lambda_k^+ U_y(\lambda_k^+, y))\}, \; |\, y \,| < 1,$$

де

$$a_k^+ = \tilde{a}(\lambda_k^+)^{-\alpha} \cosh^{-2} \lambda_k^+ + a_{1,k}^+,$$

і постійна b певним чином зв'язана з постійною $\tilde{a}$ із (36).

Твердження про асимптотику коефіцієнтів розкладу за однорідними розв'язками, явище розбіжності рядів на торці, спосіб регуляризації рядів, що розбігаються, отримано також при розгляді статичної задачі в напруженнях для півсмуги з заданими негладкими навантаженнями на торці.

У §5 розділу 3 розглянуто питання про достатні умови справедливості гіпотези Релея при побудові розв'язку граничної задачі (32) за методом власних функцій. Розв'язок u задачі (32) допускає при $x > L = \max l(y)$, $|\, y \,| \leq 1$ розклад (28) і виникає питання про умови на функції l і f, g, при яких має місце збіжність цього розкладу аж до самої граничної кривої Г. Таким чином, мова йде про справедливість двократного розкладу на відрізку $[-1, 1]$:

$$\begin{pmatrix} f(y) \\ n(y)g(y) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^\infty \begin{pmatrix} z_k(y) \\ \imath\lambda_k z_k(y) - l'(y) z_k'(y) \end{pmatrix} e^{\imath\lambda_k l(y)}, \; \Im\lambda_k > 0, \quad (37)$$

де функція $n(y) = (1 + l'^2(y))^{1/2}$.

При дослідженні розкладу (37) в роботі використано загальний підхід, який запропоновував R.F.Millar (1969, 1971) в аналогічних задачах акустики. Цей підхід грунтується на вивченні властивостей аналітичного продовження розв'язку граничного інтегрального рівняння, до якого попередньо зводиться вихідна гранична задача математичної фізики. При цьому, коефіцієнти відповідного розкладу виражаються у вигляді інтегралів від розв'язку граничного інтегрального рівняння і можливість його аналітичного продовження дозволяє отримати оцінки для коефіцієнтів розкладу, які є достатніми для збіжності ряду Фур'є аж до граничної кривої. При реалізації такого підходу стосовно до розкладу (37) в дисертаційній роботі суттєво використано результати §5, §6 розділу 2, що відносяться до питання зведення граничної задачі (32) до системи інтегральних рівнянь на відрізку $[-1, 1]$.

Нехай функція l є аналітичною в деякому околі $V \subset \mathbf{C}$ відрізку $[-1, 1]$ і $l(\pm 1) = l'(\pm 1) = 0$, означимо функції

$$\chi_{\pm}(\mu) = l(\mu) \mp \imath\mu.$$

Припустимо, що симетрична відносно дійсної осі однозв'язна область U з $\bar{U} \subset V$ і $(-1, 1) \subset U$ має властивості: границя ∂U є простою кривою Жордана, яка перетинається з відрізком $[-1, 1]$ у точках $\mu = \pm 1$ і

$$\Re(1 \mp \mu) \geq c \mid \Im\mu \mid, \ \forall \mu \in U, \ \mid \mu \mp 1 \mid < \epsilon,$$

для деяких $c > 0$ і $\epsilon > 0$. Нехай

$$\chi_{+}(\mu) \neq \chi_{+}(t), \ \forall t \neq \mu \in \bar{U}, \ t \in [-1, 1]$$

і виконана оцінка

$$\mid \Im\chi_{+}(\mu) \mid < 1, \ \forall \mu \in \bar{U}, \ \mu \neq \pm 1.$$

В цих умовах справедлива така теорема.

Т е о р е м а 14. *Нехай*

$$l'(\mu) \neq \imath, \ \forall \mu \in \bar{U}, \ l(y) > 0, \mid y \mid < 1$$

і справедлива оцінка

$$\Re\chi_{+}(\mu) \leq 0, \ \forall \mu \in \partial U, \Im\mu \leq 0.$$

Тоді для довільної пари функцій f, g, що аналітичні у U і $f(\pm 1) = f'(\pm 1) = g(\pm 1) = 0$, має місце двократний розклад (37), що збігається у просторі $C^n[-y_0, y_0] \oplus C^n[-y_0, y_0]$ для довільних $y_0 \in (0,1)$ та $n = 1, 2, \dots$.

Розглянуто питання про справедливість гіпотези Релея в залежності від величини параметра $\delta > 0$, який задає відхилення кривої $\Gamma = \Gamma_\delta$ від прямолінійного торця $x = 0$, $|y| < 1$. Нехай функція $l(y) = \delta l_1(y)$, де l_1 - аналітична в деякому околі V відрізку $[-1, 1]$ функція і $l_1(\pm 1) = l_1'(\pm 1) = 0$, $l_1(y) > 0, |y| < 1$, а $\delta > 0$ - параметр.

Т е о р е м а 15. *Знайдеться таке $\delta_0 > 0$, що для усіх значень $\delta \in (0, \delta_0)$ для довільної пари функцій f, g, що аналітичні у V і $f(\pm 1) = f'(\pm 1) = g(\pm 1) = 0$, має місце двократний розклад (37) з $l(y) = \delta l_1(y)$ (у сенсі збіжності із твердження теореми 14).*

Розглянуто приклад на застосування теореми 14.. А саме, нехай функція

$$l(y) = \delta(1 + \cos \pi y), \ |y| \le 1 \tag{38}$$

з параметром $\delta > 0$. Тоді використовуючи результати, які отримав R.F.Millar, можна довести, що функція l задовольняє умовам теореми 14 при $\delta \in (0, \delta_0)$, де $\pi\delta_0 = 2\nu(\nu^2 - 1)^{-1}$, а ν - єдиний корінь рівняння

$$\ln \nu = (\nu + 1)(\nu - 1)^{-1}, \ \nu > 1, \tag{39}$$

і $\pi\delta_0 \approx 0,448$. Область $U = U_\delta$ із теореми 14 описується нерівностями

$$\delta(1 + \cosh \pi\tau \cos \pi s) < |\tau|, \ \mu = s + i\tau, \ |s| < 1.$$

Таким чином, аналогічно відповідним результатам для рівнянь Лапласа і Гельмгольца з граничними умовами Діріхле або періодичними граничними умовами на сторонах $y = \pm 1$ (R.F.Millar, Н.А.Чебанова та інші) отримано, що при аналітичних у $U = U_\delta$ функціях f, g з умовами (33) для розв'язку u граничної задачі (32) має місце розклад (28) для всіх $x \ge l(y), |y| \le 1$, якщо $\delta \in (0, \delta_0)$, $\pi\delta_0 \approx 0,448$.

У §6 розглянуто питання про необхідні умови справедливості гіпотези Релея для задачі про відбиття гармонічної повздовжньої хвилі Релея-Лемба від криволінійного торця напівскінченного пружного шару $X > Hl(Y/d)$, $|Y| < d$, де l - парна аналітична функція експоненціального типу з $l(\pm 1) = 0$. Безліч застосувань задач про розсіювання хвиль різної природи на поверхнях неканонічної форми зумовлює неперервний інтерес до таких задач. Як вже відмічалося, припущення про те, що відповідні ряди за власними функціями зображують розв'язок вихідної граничної задачі аж до криволінійної ділянки границі, прийнято в задачах математичної фізики називати гіпотезою Релея. Значний внесок в теоретичне дослідження про застосування гіпотези Релея до різних задач акустики і електродинаміки внесли такі вчені як R.F.Millar, R.Petit, M.Cadilhac, В.П.Апельцин, Р.Г.Баранцев, О.Г.Кюркчан та інші.

При певних умовах на функцію l у §6 отримано результат про те, що знайдеться таке $\delta_0 > 0$, що для значень $H/d > \delta_0$ гіпотеза Релея в розглянутій задачі теорії пружності не є справедливою. Застосування цього абстрактного результату до конкретного прикладу функції (38) (з $\delta = H/d$) приводить до значення $\pi\delta_0 \approx 0,448$, яке визначається з рівняння (39). Це твердження принципового характеру є аналогічним відомому твердженню (R.Petit, M.Cadilhac - 1966) про необхідні умови справедливості гіпотези Релея у задачі про розсіювання електромагнітної хвилі на синусоїдній поверхні.

А.Г.Костюченко і М.Б.Оразов (1981) показали, що задача про нормальні коливання пружного напівскінченного циліндра з закріпленою границею у випадку розділення змінних зводиться до дослідження спектральних властивостей самоспряженого квадратичного жмутка операторів

$$M(\lambda, \omega^2) = \lambda^2 A + \lambda B + I - \omega^2 R \tag{40}$$

у гільбертовому просторі трьохвимірних вектор-функцій $L_2(\Omega)$, де $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ - обмежена область, яка є поперечним перерізом циліндра. В (40) $\lambda \in \mathbf{C}$ - спектральний параметр, а $\omega \geq 0$ - частота коливань циліндра. Нехай $N(\omega)$ - кількість дійсних власних значень жмутка $M(\lambda, \omega^2)$, тоді

$$N(\omega) \geq a\omega^2, \ \omega \geq 0$$

(А.Г.Костюченко, М.Б.Оразов). У §7 розділу 3 отримано точну по порядку ω оцінку зверху

$$N(\omega) \leq a_1\omega^2 + b, \ \omega \geq 0,$$

де a_1, $b > 0$ - деякі постійні.

Як відомо, багато питань теорії граничних задач математичної фізики приводять до задачі визначення власних значень і власних функцій диференціальних та більш загальних функціонально-диференціальних операторів і до питань розкладу довільної функції в ряд за власними функціями таких операторів. У §§ розділу 3 розглянуто спектральні питання для функціонально-диференціальних операторів на скінченному відрізку з інтегральними крайовими умовами. Для таких операторів вивчено базисні властивості їх власних функцій у просторах L_p, $1 < p < \infty$, асимптотика спектру, побудовано резольвенту. Раніш подібні питання в різних випадках, але в основному для простору L_2, розглядались в роботах таких вчених як В.П.Михайлов, Г.М.Кесельман, М.А.Наймарк, В.О.Ільїн та його учні, А.А.Шкаліков, H.E.Benzinger, N.Dunford, M.Krall, та інші.

Розглянемо спектральну задачу

$$
\begin{gathered}
y^{(n)}(x) + (Fy)(x) = \lambda y(x),\ x \in [0,1],\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \geq 2, \\
U_l(y) \equiv a_l y^{(k_l)}(0) + b_l y^{(k_l)}(1) + \sum_{j=0}^{k_l-1} \left(a_{l,j} y^{(j)}(0) + b_{l,j} y^{(j)}(1)\right) + \\
+ \int_0^1 y^{(k_l)}(x) d\sigma_l(x) = 0,\ l = 1, \dots, n,
\end{gathered} \tag{41}
$$

де цілі невід'ємні числа $k_l < n$ і функції обмеженої варіації $\sigma_l(x)$ неперервні в точках $x = 0$, $x = 1$. Лінійний оператор F неперервно діє із простору Гельдера $C^\gamma[0,1]$ у простір $L_1[0,1]$ і $\gamma < n-1$. Припускаємо, що крайові умови $U_l(y) = 0$, $l = 1, \dots, n$ є регулярними. Вираз $y^{(n)}(x) + (Fy)(x)$ та умови $U_l(y) = 0$, $l = 1, \dots, n$ визначають у просторі L_1 лінійний оператор $\mathcal{L}$. Встановлено існування такої дійсної послідовності

$$R_N = 2\pi N + O(1),\ N \to \infty,$$

для якої визначені скінченновимірні проектори Ріса

$$P_N = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = R_N^n} (\mathcal{L} - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Т е о р е м а 16. *Знайдуться такі постійні c_p, $1 < p < \infty$, що для довільної функції $g \in L_p$:*

$$
\begin{gathered}
\| g - P_N g \|_{L_p} \leq c_p \{ N^{-\alpha_1} (\ln N) \| g \|_{L_p} + \omega_p(N^{-1}, g) + \\
+ (\max_{l=1,\dots,n} var \sigma_l) \omega_p(N^{-1/p}, g) \},\ N = 1, 2, \dots,
\end{gathered}
$$

де число $\alpha_1 = min(n-\gamma-1, 1)$ *і* $\omega_p(\delta, g)$ *- інтегральний модуль неперервності функції* $g \in L_p$, *яка вважається рівною нулю поза відрізком* $[0, 1]$.

Означимо проектори

$$\tilde{P}_N = P_N - P_{N-1},\ N = 1, 2, ...,\ P_0 = 0.$$

Тоді з теореми 16 випливає, що скінченновимірні підпростори

$$\tilde{P}_N L_p,\ N = 1, 2, ...,$$

що не залежать від p і є лінійними оболонками власних та приєднаних функцій задачі (41) з власними значеннями λ_k :

$$R^n_{N-1} \leq |\lambda_k| < R^n_N,\ R_0 = 0,$$

утворюють базис з підпросторів простору L_p, $\forall p \in (1, \infty)$.

У §8 доведено також, що у випадку $n-\gamma > 3/2$ підпростори $\tilde{P}_N L_2$ утворюють базис з підпросторів, який еквівалентний ортогональному. У випадку, коли F- диференціальний оператор порядку $n-2$, таке твердження раніш було встановлено А.А.Шкаліковим (1982).

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено інтегральному перетворенню Конторовича-Лебєдєва. Це перетворення було введено М.І.Конторовичем і М.М.Лебєдєвим у 1938 р. в зв'язку із розглядом задачі про дифракцію плоскої електромагнітної хвилі на напівскінченній щілині і в подальшому знайшло широке застосування до різних граничних задач математичної фізики (М.М.Лебєдєв, Г.А.Грінберг, Я.С.Уфлянд, А.Ф.Улітко, A.Ben-Menahem та інші). Однак, ефективне використання перетворення Конторовича-Лебєдєва в граничних задачах статики і динаміки пружних тіл потребує подальшого розвитку математичної теорії цього перетворення. Труднощі та важливість вивчення властивостей перетворення Конторовича-Лебєдєва зумовлені також тією обставиною, що це перетворення зв'язане з розкладом за узагальненими власними функціями звичайного сингулярного диференціального оператора l_μ:

$$(l_\mu g)(\rho) = (-(\rho\frac{d}{d\rho})^2 + \mu^2\rho^2)g(\rho),\ \rho > 0,$$

у просторі $L_2(\mathbb{R}_+; \rho^{-1})$, де $\mu \neq 0$ із $\Re\mu \geq 0$ - параметр перетворення. У випадку $\Re\mu = 0$ для визначення оператора l_μ задається також умова на нескінченності $g'(\rho) + \mu g(\rho) = o(\rho^{-1/2})$, $\rho \to \infty$.

Інтегральне перетворення Конторовича-Лебедєва K_μ та його обернення K_μ^{-1} мають вигляд

$$K_\mu g = \int_0^\infty K_{i\tau}(\mu\rho)g(\rho)d\rho,\ \tau \in \mathbb{R},$$

$$K_\mu^{-1} f = \frac{2}{\pi^2 \rho}\int_0^\infty \tau \sinh \pi\tau K_{i\tau}(\mu\rho) f(\tau) d\tau,\ \rho > 0,$$

де $K_{i\tau}(z)$ - циліндрична функція Макдональда. Класична теорема Конторовича-Лебедєва стверджує, що якщо число $\mu = |\mu| e^{i\alpha} \neq 0$ з $|\alpha| < \pi/2$ і f - парна аналітична в смузі $|\Im\tau| < \delta,\ \delta > 0$, функція, що задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^\infty |f(s + i\sigma)(s + i\sigma)| e^{(\pi/2+|\alpha|)|s|} ds \le c(\sigma_1) < \infty, \forall \sigma_1 \in (0, \delta), \quad (42)$$

то тоді для f при τ з $|\Im\tau| < \delta$ має місце інтегральне зображення

$$f(\tau) = (K_\mu K_\mu^{-1} f)(\tau). \quad (43)$$

У §2 розділу 4 дається поширення зображення (43) при дійсних τ на суттєво більш ширший клас функцій, ніж у теоремі Конторовича-Лебедєва. Для формулювання відповідного твердження введемо деякі означення. По дійсному числу $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ означимо функцію

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{t}{\tanh t} \cosh(\pi/2 + |\alpha|)t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Для довільної функції $u(t),\ t \in \mathbb{R}$ нехай її друга різниця

$$\Delta_h^2 u(t) = u(t + h) - 2u(t) + u(t - h),\ h > 0.$$

Введемо до розгляду банахів функціональний простір Нікольского з вагою $\varphi_\alpha(t)$ - простір $H_{1,\alpha}^r = H_{1,\alpha}^r(\mathbb{R}; \varphi_\alpha(t))$, так що норма у $H_{1,\alpha}^r$ має вигляд

$$\| u \|_{H_{1,\alpha}^r} = \| \varphi_\alpha u \|_{L_1} + \sup_{|h|>0} |h|^{-\beta} \| \varphi_\alpha \Delta_h^2 u^{(k)} \|_{L_1},$$

де число $r = k + \beta$ і $k \geq 0$ - ціле, а $\beta \in (0, 1]$.

Т е о р е м а 17. *Нехай число $\mu = |\mu| e^{i\alpha} \neq 0$, $|\alpha| \leq \pi/2$ і парна функці $f \in H_{1,\alpha}^r$, $r > 1$. Тоді для f має місце інтегральне* *зображення (43) при всіх дійсних $\tau \neq 0$. Якщо показник $r > 2$, то зображення (43) має місце для всіх $\tau \in \mathbb{R}$.*

Методами теорії аналітичних функцій доводиться, що, якщо аналітична у смузі $| \Im \tau |< \delta$ функція f задовольняє (42), то тоді $f \in H^r_{1,\alpha}$, $\forall r > 0$. Як додаток до теореми 17 в роботі приведено твердження про спосіб регуляризації інтегрального зображення (43) у випадку функції $f \in L_{1,\alpha}$, тобто, коли на f відсутні будь-які умови гладкості.

Результати про "пряме" інтегральне зображення

$$g(\rho) = (K_\mu^{-1} K_\mu g)(\rho),\ \rho > o \tag{44}$$

були раніш отримані лише у випадку дійсного $\mu > 0$ (М.М.Лебєдєв, С.Б.Якубович і Ву Кім Туан, A.H.Zemanian, R.S.Pathak and J.N.Pandey). В наступній теоремі із §3 розділу 4 даються умови на функцію $g(\rho)$, при виконанні яких має місце зображення (44) у випадку $\Re\mu > 0$.

Т е о р е м а 18. *Нехай число $\mu =| \mu | e^{i\alpha} \neq 0$, $| \alpha |< \pi/2$ і функція $g(\rho)$ аналітична у секторі*

$$S_\alpha = \{\rho \in \mathbb{C} : arg\rho \in (-2\alpha, 0)\}$$

і неперервна в його замиканні, причому вірні оцінки

$$\int_{\partial S_\alpha} | g^{(k)}(\rho) | e^{1/2|\mu\rho \sin 2\alpha|} \, | d\rho |< \infty, \ k = 0, 1, 2, 3,$$

$$\int_{\partial S_\alpha} | g^{(3)}(\rho)\rho^2 | e^{1/2|\mu\rho \sin 2\alpha|} \, | d\rho |< \infty.$$

Тоді для $g(\rho)$ при $\rho > 0$ має місце інтегральне зображення (44).

Підкреслимо, що (44) дає розклад в інтеграл Фур'є за узагальненими власними функціями сінгулярного диференціального оператора l_μ. В умовах теореми 18 у §3 також отримано твердження, яке зв'язує поміж собою інтегральні перетворення Конторовича-Лебєдєва і Фур'є. Доведено також, що умова аналітичності $g(\rho)$ при $\Im\mu \neq 0$ з теореми 18 в певному сенсі є необхідною для справедливості зображення (44).

У §4 розділу 4 розглянуто питання про сумовність зображення (44) при $\mu > 0$ у сенсі середніх Абеля. Наведемо один з отриманих результатів (достатньо розглянути випадок $\mu = 1$). Нехай для $g \in L_1(\mathbb{R}_+)$ і $\epsilon \in (0, \pi)$ функції

$$g_\epsilon(r) = \frac{2}{\pi^2 r} \int_0^\infty (K_1 g)(\tau) \tau \sinh(\pi - \epsilon)\tau K_{i\tau}(r) d\tau.$$

Т е о р е м а 19. *Нехай функція $g \in L_1(\mathbb{R}_+) \bigcap L_p(\mathbb{R}_+)$ з деяким $p \in (1, \infty)$. Тоді*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \| g(r) - g_\epsilon(r) \|_{L_p[a,b]} = 0$$

для довільних $0 < a < b < \infty$ і

$$\lim_{\epsilon \to 0} g_\epsilon(r_0) = g(r_0) \quad .$$

для довільної точки $r_0 > 0$, яка належить до множини Лебега функції $g(r)$.

Основні результати дисертаційної роботи можна сформулювати таким чином:

1. Розроблено методику дослідження існування та асимптотичних властивостей розв'язків інтегро-алгебраїчних систем рівнянь методу суперпозиції.

2. Здійснено математичне обгрунтування використання методу суперпозиції при дослідженні плоских задач теорії пружності.

3.Встановлено нові результати про розклад за власними функціями в задачах теорії пружності з зазначенням оцінок і асимптотик коефіцієнтів розкладів та оцінок швидкості збіжності відповідних рядів за власними функціями в різних функціональних просторах. У випадках розбіжності рядів за власними функціями зазначено способи їх регуляризації з доведенням до розрахункових схем.

4. Встановлено важливий в теоретичному та прикладному значеннях зв'язок між методами суперпозиції та власних функцій.

5. Розроблено ефективні алгоритми для розрахунків граничних задач теорії пружності, які грунтуються на зв'язку між методами суперпозиції та власних функцій і асимптотичних властивостях розв'язків інтегро-алгебраїчних систем рівнянь методу суперпозиції.

6. Проведено аналіз використання гіпотези Релея до задач теорії пружності, виявлено, що мають місце результати, які аналогічні

відповідним твердженням про гіпотезу Релея в задачах акустики і електродинаміки.

7. Дано зведення задачі Діріхле в класичній постановці для однорідного бігармонічного рівняння у півсмузі з криволінійним торцем до системи інтегральних рівнянь на відрізку. Встановлено, що ця гранична задача є однозначно розв'язуваною.

8. Отримано нові результати про базисні властивості власних функцій звичайних функціонально-диференціальних операторів з інтегральними крайовими умовами на скінченному відрізку, отримано оцінки швидкості збіжності спектрального розкладу в термінах інтегрального модуля неперервності функції, що розкладається.

9. Розширено рамки використання інтегрального перетворення Конторовича-Лебедєва щодо граничних задач математичної фізики.

Автор висловлює щиру подяку член-кореспонденту АН України В.Т.Грінченку, доктору фізико-математичних наук В.В.Мелешку, професору Г.В.Радзієвському за постановку ряду задач та плідне наукове співробітництво.

Основні результати дисертації опубліковано в таких роботах:

1. Гомилко А.М. О спектре, примыкающем к вещественной оси в одной задаче теории упругости // Функц. анализ и его прилож.- 1982.- 16, вып. 1.- С. 70-71.

2. Гомилко А.М. Оценка сверху числа собственных значений пучка операторов, зависящего от параметра // Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук.- 1982.- 4.- С. 19-23.

3. Гомилко А.М., Мелешко В.В. Гармонические волны в полубесконечном упругом слое // Докл. АН УССР, сер. А.- 1985.- N 2.- С. 28-32.

4. Гомилко А.М. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в области типа полуполосы // Успехи матем. наук.- 1985.- 40, вып. 5.- С. 225-226.

5. Гомилко А.М. Асимптотика неизвестных в задаче о ж стко защемленной пластинке // Тр. 11 научн. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР. Ч.2.- 1986.- С. 290-295.- Рук. деп. ВИНИТИ 28.07.86, N 5507-В86.

6. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. О методах

однородных решений и суперпозиции в статических граничных задачах для упругой полуполосы // Прикл. механика.- 1986.- 22, N 8.- С. 84-93.

7. Гомилко А.М., Мелешко В.В. О методе Файлона разложения функций в ряды по однородным решениям в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. Механика тв. тела.- 1986.- N 4.- С. 48-53.

8. Гомилко А.М. Закон асимптотических выражений в теории функциональных уравнений в K_σ-пространствах // Укр. матем. журн.- 1987.- 39, N 5.- С. 551-554.

9. Гомилко А.М., Мелешко В.В. Задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе // Докл. АН СССР.- 1987.- 294, N 5.- С. 1045-1048.

10. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. О возможностях метода однородных решений в смешанной задаче теории упругости для упругой полуполосы // Теоретич. и прикл. механика.: Донецк. - 1987.- 18.- С. 3-8.

11. Гомилко А.М. Асимптотика коэффициентов разложения по однородным решениям в смешанной задаче для упругой полуполосы // Тр. 13-й научн. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР. Ч.2. - 1988.- С. 332-335.- Рук. деп. ВИНИТИ 27.12.88, N 9072-В88.

12. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Асимптотика неизвестных при решении методом суперпозиции плоской задачи о продольной деформации упругой полуполосы // Прикл. механика. - 1988.- 24, N 7. - С. 77-83.

13. Гомилко А.М., Гринченко В.Т. Метод однородных решений в случае негладких нагрузок // Теоретич. и прикл. механика.: Донецк.- 1988.- 19.- С.111-116.

14. Гомилко А.М., Диденко Ю.Ф., Ковальчук В.Ф. Точное решение задачи пространственной теории потенциала для двух сфер.- Киев, 1988.- 40 с.- Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.44.

15. Гомилко А.М., Гринченко В.Т. О сходимости разложений по однородным решениям в плоской задаче для полуполосы с негладкими нагрузками // Прикл. механика.- 1989.- 25, N 4.- С. 76-82.

16. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Метод однородных решений в смешанной задаче для упругой полуполосы // Прикл. механика.- 1990.- 26, N 2.- С. 98-108.

17. Гомилко А.М., Радзиевский Г.В. Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн.- 1990.- 42, N 11.- С. 1460-1469.

18. Гомилко А.М., Городецкая Н.С., Мелешко В.В. Продольные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое // Прикл. механика.- 1991. - 27, N 6.- С. 53-59.

19. Гомилко А.М., Городецкая Н.С. Краевой резонанс при вынужденных колебаниях волновода // Тез. докл. 11 Всес. акустической конф. Москва, 1991.- С. 127-130.

20. Гомилко А.М. Об интегральном преобразовании Конторовича-Лебедева // Укр. матем. журн.- 1991.- 43, N 10.- С. 1372-1377.

21. Гомилко А.М., Радзиевский Г.В. Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. ур.- 1991.- 27, N 3.- С. 384-396.

22. Гомилко А.М. Об обращении интегрального преобразования Конторовича-Лебедева // Матем. заметки.- 1992.- 51, вып. 5.- С. 27-34.

23. Гомилко А.М. Гипотеза Рэлея в задаче об отражении волны Рэлея-Лэмба от криволинейного торца волновода // Изв. РАН. Механика тв. тела.- 1993.- N 2.- С. 61-66.

24. Гомилко А.М. Об одном классе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Журн. выч. матем. и матем. физики.- 1993.- 33, вып. 7.- С. 979-995.

25. Гомилко А.М. Интегральные уравнения метода суперпозиции // Годичный отчет Ин-та гидромеханики АН Украины. Киев: Институт гидромеханики АН Украины.- 1993.- С. 51-52.

26. Гомілко О.М. Розкладання за частиною власних функцій жмутка диференціальних операторів, зв'язаного з бігармонічним рівнянням у напівсмузі // Спектральні та еволюційні задачі.: Сімферопольський держуніверситет.- 1993.- вип. 2.- С. 76-77.

Подписано к печати 24.09.1993г. Формат 60х84/16
Бумага офсетная Усл.-печ.лист,2,0. Уч.-изд.лист 2,0.
Тираж 100. Заказ 878. Бесплатно

Полиграф. уч-к Института электродинамики АН Украины,
252057, Киев-57, проспект Победы, 56.

18. Гомилко А.М., Городецкая Н.С., Мелешко В.В. Продольные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое // Прикл. механика.- 1991.- 27, N 6.- С. 58-63.

19. Гомилко А.М., Гринченко В.Т. Краевой резонанс при вынужденных колебаниях пластинок // Тез. докл. 15 Всес. научн.-техн. конф. Москва, 1991.- С. 127-130.

20. Гомилко А.М. Об интегральном преобразовании Конторовича-Лебедева // Укр. матем. журн.- 1991.- 43, N 10.- С. 1373-1377.

21. Гомилко А.М., Радзиевский Г.В. Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. ур.- 1991.- 27, N 3.- С. 384-395.

22. Гомилко А.М. Об обращении интегрального преобразования Конторовича-Лебедева // Матем. заметки.- 1992.- 51, вып. 5.- С. 27-34.

23. Гомилко А.М. Гипотеза Рэлея в задаче об отражении волны Рэлея-Лэмба от криволинейного торца волновода // Изв. РАН. Механика тв. тела.- 1993.- N 3.- С. 61-69.

24. Гомилко А.М. Об одном классе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Журн. выч. матем. и матем. физики.- 1993.- 33, вып. 7.- С. 979-995.

25. Гомилко А.М. Интегральные уравнения метода суперпозиции // Годичный отчет Ин-та гидромеханики АН Украины.- Киев: Институт гидромеханики АН Украины.- 1992.- С. 51-52.

26. Гомилко О.М. Розкладання за частиною власних функцій жмутків диференціальних операторів, пов'язаних з бігармонічним рівнянням у напівсмузі // Спектральні та еволюційні задачі.- Сімферопольський держуніверситет.- 1993.- вип. 2.- С. 75-77.

Подписано к печати 24.09.1993 г. Формат 60х84/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. лист. 2,0. Уч.-изд. лист 2,0.
Тираж 100. Заказ 272. Бесплатно.

Полиграф. уч-к Института электродинамики АН Украины,
252057, Киев-57, проспект Победы, 56.