

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ і м. ТАРАСА ШВЕЧЕНКА

На правах рукопису

СЕРГЕЙЧУК Володимир Васильович

КЛАСИФІКАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

01.01.06 - математична логіка, алгебра і теорія чисел

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Київ - 1993

AB 28.372

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00802846 (S)

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті

Офіційні опоненти - доктор

професор ГУДИВОК П.М.

доктор фізико-математичних наук,

професор ЗАВАДСЬКИЙ О.Г.

доктор фізико-математичних наук

професор КИРИЧЕНКО В.В.

Провідна організація - Санкт-Петербурзький університет

Захист відбудеться 22 листопада 1993 року о 14-й годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.01.01 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ-127, проспект Академіка Глушкова 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці університету (вул. Володимирська, 62).

Автореферат розісланий 19 жовтня 1993 року.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради

ОВСІЄНКО С.А.

43 - 20, 5 та

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В дис. таці розглядаються задачі про класифікацію систем форм і лінійних відображень.

1. Систематичне вивчення систем лінійних відображень бере свій початок з роботи Габріеля [1], в якій вводиться поняття колчану і його зображень. Колчан - орієнтований граф. Вважаємо, що зображення колчану задано, якщо з кожною його вершиною співставляється скінченновимірний векторний простір, з кожною стрілкою - лінійне відображення відповідних просторів. Габріель показав, що зв'язний колчан, який має скінченне число неізоморфних нерозкладних зображень, можна одержати орієнтацією ребер схеми Динкіна без кратних зв'язків і розмірності його нерозкладних зображень співпадають з додатними коренями асоційованої напівпростої алгебри Ді.

Д.А.Назарова [2] і, незалежно, Донован і Фройсліх [3] знайшли аналогічну відповідність між недикими (тобто такими, що не містять в собі задачу про класифікацію пар лінійних операторів

$\begin{matrix} \circ & \bullet \\ \circ & \circ \end{matrix}$) колчанами, які мають нескінченне число неізоморфних нерозкладних зображень, і розширеними схемами Динкіна.

Несподіваним став отриманий В.Г.Кадом [4] опис всіх розмірностей нерозкладних зображень будь-якого колчану.

Клас матричних задач, які задаються колчанами, недостатньо широкий: якщо привести до канонічного вигляду одну з матриць зображення колчану і зберігаючими її допустимими перетвореннями приводити інші матриці, то для них, як правило, отримуємо задачу, що не задається жодним колчаном. Тому необхідно вивчати більш широкі класи матричних задач (див. [5]).

2. Вільямсон, Рім і Р.Шарлеу [6 - 7] з кожною не виродженою білінійною формою B співставили визначуване двою $B(u, \sigma_B u) = B(u, u)$ лінійне відображення σ_B , так звану асиметрію, і послідовність $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ симетричних, або кососиметричних, або ермітових форм, і довели, що форми B і C еквівалентні тоді і тільки тоді, як подібні асиметрії σ_B, σ_C і подар-

но еквівалентні відповідні ім форми: $b_1 \sim c_1, \dots, b_m \sim c_m$.
Випадок виродженої нерозкладної білінійної форми розглянув Габр'єль [8].

Системи форм розглядалися лише для пар форм, кожна з яких симетрична або кососиметрична, або ермітова. Відмітимо, що вже задачі про класифікацію пар білінійних форм а з трійок квадратичних форм є дикими.

3. Системи форм і лінійних відображень вивчалися, як правило, коли одна з форм визначає скалярний добуток.

В низці робіт (див. огляд Х.Шапіро [9]) пропонуються алгоритми зведення до канонічного вигляду матриці лінійного оператора в унітарному просторі. Системи самоопражених операторів вивчалися В.Л.Датковським і Ю.С.Самойленком [10].

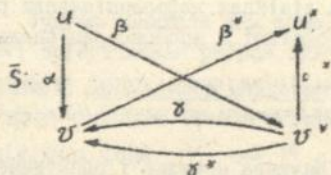
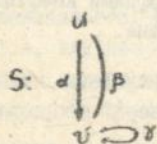
В монографії В.Шарлау [11] показано, що класифікація наборів (V, B, A_1, \dots, A_n) , які складаються з невиродженої білінійної форми B і самоопражених лінійних операторів A_1, \dots, A_n в просторі (V, B) , зводиться до класифікації ϵ -ермітових форм і n -ок лінійних операторів.

Першою змістовною роботою з довільних систем форм і лінійних відображень є стаття А.В.Ройтера [12]. В ній проведено вивчення вольтаєвим колчаном називається колчан

Q , в якому кожній вершині v ставиться у відповідність вершина v^* , кожній стрілці $\alpha: u \rightarrow v$ — стрілка $\alpha^*: v^* \rightarrow u^*$, причому $v^* \neq v = v^*, \alpha^* \neq \alpha = \alpha^*$. Самоопраженим зображенням такого колчану називається зображення, яке зі спряженою вершиною співставляє спряжений простір, зі спряженою стрілкою — спряжене лінійне відображення. Ізоморфізм $\varphi: A \rightarrow B$ самоопражених зображень A і B називається конгруентністю, якщо $\varphi_{v^*} = \varphi_v^{*-1}$ для кожної вершини v . Показано, що над алгебраїчно замкненим полем характеристики $\neq 2$ із ізоморфізму самоопражених зображень випливає їх конгруентність.

Цей результат таким чином пов'язаний з системами форм і лінійних відображень.

Орхемою назвемо граф з ребрами трьох типів: неорієнтованими, орієнтованими і двічі орієнтованими (вигляду \longleftrightarrow). Зображенням A орхеми S над полем K назвемо набір, який складається з векторних просторів A_v (v - вершина S), лінійних відображень $A_\alpha: A_u \rightarrow A_v$ ($\alpha: u \rightarrow v$ - орієнтоване ребро), білінійних форм $A_\beta: A_u \times A_u \rightarrow K$, $A_\gamma: A_v \times A_v \rightarrow K$ ($\beta: u \rightarrow v$, $\gamma: u \leftrightarrow v$ - неорієнтоване і двічі орієнтоване ребра). За орхемою S побудуємо простий інволютивний колчан \bar{S} , змінивши кожному вершині v парю вершин v, v^* , кожне ребро $\alpha: u \rightarrow v$ або $\beta: u \rightarrow v$, або $\gamma: u \leftrightarrow v$ - парю стрілок $\alpha: u \rightarrow v$, $\alpha^*: v^* \rightarrow u^*$, або $\beta: u \rightarrow v$, $\beta^*: v \rightarrow u^*$, або $\gamma: u \leftrightarrow v$, $\gamma^*: v^* \rightarrow u$, відповідно. Наприклад,



Очевидно, зображенням A орхеми S взаємно однозначно відповідають самоопражені зображення \bar{A} колчану \bar{S} (білінійна форма $A_\beta: A_u \times A_u \rightarrow K$ визначає пару взаємно опражених відображень $A_\beta: x \in A_u \mapsto A_\beta(x, ?) \in A_v^* = A_{v^*}$, $A_{\beta^*}: y \in A_v \mapsto A_{\beta^*}(y, ?) \in A_u^* = A_{u^*}$). Ізоморфні зображення орхеми S будемо називати конгруентними, вони відповідають конгруентним зображенням колча \bar{S} .

Мета роботи: звести класифікацію зображень орхеми S над тілом K характеристики $\neq 2$ до класифікації зображень колчану \bar{S} над тілом K і ермітових форм над тілами, що є скінченновимірними розширеннями центрального тіла K .

- перенести на зображення орохом закон інерції для квадратичної форми і теорему В.Г.Каца про розмірності нерозкладних зображень колчану,

- застосувати отримане зведення до задач про класифікацію півторалінійних форм, пар ермітових форм, самоспряжених і ізометричних операторів в просторах з невиродженою ермітовою формою, отримати їх канонічні матриці над \mathbb{H} , \mathbb{C} , \mathbb{R} ,

- дати аналогічне зведення для самоспряжених зображень лінійної категорії з інволюцією і симетричних зображень алгебр з інволюцією,

- отримати алгоритми зведення до канонічного вигляду матриць як звичайного, так і унітарного (з вершиною опівставляється унітарний простір) зображення колчану, описати машину розмірностей і число параметрів нерозкладних унітарних і евклідових зображень колчану,

- перенести на поле з диференціюванням теорему Кронекера про пучок матриць, довести голоморфну еквівалентність в крузі системи лінійних диференціальних рівнянь з мероморфними коефіцієнтами системи з дробово-раціональними коефіцієнтами.

Методика досліджень. В дисертації використовуються поняття і методи лінійної алгебри, теорії категорій і теорії зображень.

Наукова новизна і практичне значення. Результати, отримані в дисертації, є новими і можуть бути корисними для математиків, які цікавляться питаннями класифікації в лінійній алгебрі, теорії зображень, теорії груп, теорії диференціальних рівнянь, а також при викладанні загальних і спеціальних курсів з алгебра.

Апробація роботи. Результати дисертації неодноразово доповідались на семінарі з теорії зображень в Інституті математики АН України, на алгебраїчних семінарах в Київському, Московському і Ужгородському університетах, доповідались або були представлені на 5, 16, 17, 19 всеукраїнських алгебраїчних конференціях, 5 і 6 всеукраїнських симпозиумах з теорії кілець, алгебр і модулів, на міжнародних алгебраїчних конференціях в Новосибірську і Барнаулі, а також використовувались при читанні загального і спеціального курсів з алгебри в Київському університеті.

Публікації. Результати дисертації опубліковані в роботах [17 - 28].

Об'єм і структура роботи. Дисертація обсягом 236 сторінок машинопису. Складається зі вступу, трьох розділів, розбитих на 14 параграфів. Список літератури містить 107 найменувань.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

В першому розділі розробляється метод класифікації систем форм і лінійних відображень, який базується на роботі А.В.Ройтера [12]. Основна теорема отримана в § 1 (нумерація параграфів, теорем і лем в кожному розділі своя).

Зафіксуємо тіло K характеристика $\neq 2$ з інволюцією $\sigma \mapsto \bar{\alpha}$ (якщо K - поле, то інволюція може бути тривіальною). Зображення сферами над тілом K будемо задавати так само, як і раніше, але неорієнтованим і двічі орієнтованим ребрам будемо ставити у відповідність півторалінійні форми, напівлінійні по першому аргументу і лінійні по другому. Спряженням до простору V вважаємо простір V^* всіх напівлінійних форм $V \rightarrow K$.

Нехай M - зображення, $f: M \rightarrow N$ - морфізм зображень інволютивного колчану \bar{S} . Означимо спряжене зображення f^0 і спряжений морфізм $f^0: N^0 \rightarrow M^0$, поклавши $M_v^0 = M_v^*$, $M_\lambda^0 = M_\lambda^*$, $f_v^0 = f_v^*$ для всіх вершин v і стрілок λ .

Зафіксуємо повну систему $ind(\bar{S})$ неізоморфних нерозкладних зображень колчану \bar{S} . Кожне зображення із $ind(\bar{S})$ ізоморфне самоспряженому, замінимо на самоспряжене. Їх множини позначимо $ind_0(\bar{S})$. В множині $ind_0(\bar{S})$ включимо всі зображення з $ind(\bar{S})$, ізоморфні спряженому, але не самоспряженому, і по одному з кожної пари $\{M, N\} \in ind(\bar{S})$, $M \neq M^0 \approx N$

За кожним зображенням $M \in \text{ind}_1(\bar{S})$ визначимо зображення M^+ орохеми S , поклавши $M^+_{\nu} = M_{\nu} \oplus M^0_{\nu}$.

$$M^+_{\nu} = \begin{pmatrix} M_{\nu} & 0 \\ 0 & M^0_{\nu} \end{pmatrix}, \quad M^+_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & M^0_{\beta} \\ M_{\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad M^+_{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & M_{\gamma} \\ M^0_{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

для всіх вершин ν і ребер $\alpha: u \rightarrow v$, $\beta: u \rightarrow v$, $\gamma: u \leftrightarrow v$.

За кожним зображенням $N \in \text{ind}_0(\bar{S})$ і його самоопраженим автоморфізмом $f = f^0$ визначимо зображення N^f орохеми S і ізоморфізм $g: \bar{N}^f \rightarrow N$, поклавши $N^f_{\nu} = N_{\nu}$, $g_{\nu} = f_{\nu}$, $g_{\alpha} = 1$ (ν - вершина S), $N^f_{\alpha} = g_{\nu}^{-1} N_{\alpha} g_{\mu}$ ($\alpha: u \rightarrow v$ - стрілка \bar{S}).

Множина R незворотніх елементів кільця ендоморфізмів $\Lambda = \text{End}(N)$ ($N \in \text{ind}_0(\bar{S})$) є його радикалом, а тому $T(N) = \Lambda^0$ - тіло з інволюцією $(f+R)^0 = f^0+R$. Для кожного елемента $0 \neq t = t^0 \in T(N)$ зафіксуємо автоморфізм $f_t = f_t^0 \in t$ і визначимо $N^t = N^{f_t}$. Множину $\{N^t \mid 0 \neq t = t^0 \in T(N)\}$ назвемо орбітою зображення N . Для кожної брїтської форми

$$\varphi(x) = x_1^0 t_1 x_1 + \dots + x_n^0 t_n x_n, \quad 0 \neq t_i = t_i^0 \in T(N),$$

позначимо $N^{\varphi(x)} = N^{t_1} \oplus \dots \oplus N^{t_n}$.

Основна теорема. Кожне зображення орохеми S над тілом K характеристики $\neq 2$ конгруентне прямій сумі

$$J_j^+ \oplus \dots \oplus M_m^+ \oplus N_1^{\varphi_1(x)} \oplus \dots \oplus N_n^{\varphi_n(x)}$$

де $M_j \in \text{ind}_1(\bar{S})$, $N_j \in \text{ind}_0(\bar{S})$.

$N_j \neq N_{j'}$ при $j \neq j'$. При цьому сума ви-

значається однозначно з точністю до перестановки доданків і заміня $N_j, \varphi_j(x)$ на $N_j, \psi_j(x)$, де $\varphi_j(x)$ і $\psi_j(x)$ - еквівалентні ермітові форми над тілом $T(N_j)$.

Категорія шляхів на інволютивному колчані \bar{S} є лінійна категорія з інволюцією, а тому основна теорема - частинний випадок теореми 1.1, в якій класифікація з точністю до конгруентності самоспряжених зображень лінійної категорії з інволюцією зводиться до класифікації звичайних зображень цієї категорії і ермітових форм над тілами.

Наслідок (закон інерції для зображень орхем). Нехай K - одне з таких тіл:

а) поле \mathbb{C} з тривіальною інволюцією або тіло кватерніонів \mathbb{H} зі стандартною інволюцією $a + bi + cj + dk \mapsto a - bi - cj - dk$,

б) поле \mathbb{C} з тривіальною інволюцією або тіло \mathbb{H} з нестандартною інволюцією,

в) поле \mathbb{R} .

Тоді над тілом K кожне зображення орхеми \bar{S} конгруентне визначеній однозначно з точністю до перестановки доданків прямій сумі зображень вигляду, відповідно, $(M \in \text{ind}_+(S),$

$N \in \text{ind}_-(S))$:

а) M^+, N^+ ,

б) M^+, N^+, N^{-1} ,

в) M^+, N^t , де $t = 1$ у випадку, коли $T(N)$ - поле \mathbb{C} з тривіальною інволюцією або тіло \mathbb{H} з нестандартною інволюцією, $t \in \{1, -1\}$ в усіх інших випадках.

В теоремі 1.2 також розглядається випадок скінченного поля K , в п. 2.6 § 2 - випадок $K = \mathbb{O}$.

В багатьох конкретних класифікаційних задачах розглядаються не всі зображення орхеми S , а лише такі, що задовольняють певні співвідношення. Ці співвідношення мають вигляд рівностей лінійних комбінацій відображень, які співставляються стрілками кол-

чана \bar{S} . Наприклад, зображення орхем зі співвідношеннями

$$v \circ \quad (1)$$

$$\alpha \subset v \supset \beta \quad \alpha = \varepsilon \alpha^* \quad \beta = \delta \beta^* \quad (2)$$

$$\alpha \subset v \begin{array}{l} \supset \beta \\ \circlearrowright \end{array} \quad \begin{array}{l} \beta = \alpha^* \beta^* \\ \gamma \beta = 1_v \end{array} \quad \begin{array}{l} \beta = \varepsilon \beta^* \\ \beta \gamma = 1_{v^*} \end{array} \quad (3)$$

$$\alpha \subset v \begin{array}{l} \supset \beta \\ \circlearrowleft \end{array} \quad \begin{array}{l} \beta \alpha = \alpha^* \beta^* \\ \gamma \beta = 1_v \end{array} \quad \begin{array}{l} \beta = \varepsilon \beta^* \\ \beta \gamma = 1_{v^*} \end{array} \quad (4)$$

(ε, δ - елементи центра тіла K , $\varepsilon \bar{\varepsilon} = \delta \bar{\delta} = 1$) е, відповідно, -

- а) півгоралінійні форми над тілом K (орхема (1)),
- б) пара форм, одна з яких ε -ермітова, а друга - δ -ермітова (орхема (2)),
- в) ізометричні (3) і самоспряжені (4) оператори в просторі з невиродженою ε -ермітовою формою.

Для зображень орхем зі співвідношеннями справедлива основна теорема, необхідно тільки при означенні множин $ind_0(\bar{S})$, $ind_1(\bar{S})$ обмежуватись зображеннями колчану \bar{S} , які задовольняють співвідношенням орхеми і їх спряженим (наприклад, співвідношенню $\gamma \beta = 1_v$ спряжене співвідношення $\beta^* \gamma^* = 1_{v^*}$).

В § 2 - 3 над полем K характеристики $\neq 2$ дається класифікація з точністю до класифікації ермітових форм над скінченним розширенням поля K зображень орхем (1) - (4), а також пар підпросторів в просторах зі скалярним добутком (вони відповідають зображенням орхеми $\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \circ \lambda, \lambda = \varepsilon \lambda^*$).

Наведемо отриману класифікацію для орхеми (1) (для інших орхем зона аналогічна).

За многочленом $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in K[x]$ визначимо многочлен $f^v(x) = \bar{a}_n^{-1} (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \dots + \bar{a}_n x^n)$. Для клітини Фробеніуса φ над полем K через $\chi_\varphi(x)$ і $\rho_\varphi(x)$ позначимо характеристичний многочлен і його незвідна дільник, через $\hat{\varphi}$ - фіксовану невироджену матрицю, яка вдовольняє умову $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^v \varphi$ (в теоремі 2.1 отримано її вигляд і умови існування: $\chi_\varphi(x) = \chi_\varphi^v(x)$ і, якщо інволюція на K тривіальна, то $\rho_\varphi(x) \neq x - (-1)^{d \in_0} \chi_\varphi(x)$).

Лема 2.2. Нехай $p(x) = p^v(x)$ - незвідний многочлен степеня $2r$ або $2r+1$ над полем K . Тоді кожний неврухомий елемент поля $K(\varrho) = K[x]/p(x)$ з інволюцією $f(\varrho)^0 = \bar{f}(x^{-1})$ може бути представлений одним чином у вигляді $q(x)$, де

$$q(x) = \bar{a}_r x^{-r} + \dots + a_0 + \dots + a_r x^r. \quad (5)$$

$a_0 = \bar{a}_0, a_1, \dots, a_r \in K$, причому у випадку $\deg p(x) = 2r$ виконується умова: якщо інволюція на полі K тривіальна, то $a_r = 0$; якщо ж нетривіальна, то $a_r = \bar{a}_r$. при $p(0) \neq 1, a_r = -\bar{a}_r$ при $p(0) = 1$.

Теорема 2.1. В скінченновимірному векторному просторі над полем K характеристики $\neq 2$ для кожної півторалінійної форми знайдеться базис, в якому її матриця є пряма сума матриць наступних типів:

- 1) вироджена клітина Фробеніуса,
- 2) $\begin{pmatrix} 0 & E \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}$, де φ - невироджена клітина Фробеніуса, для якої не існує $\hat{\varphi}$, клітини φ і E одного розміру.

3) $\hat{\varphi} q(\varphi)$, де $q(x) \neq 0$ вигляду (5).

Доданки визначаються з такою точністю:

типу 1) - однозначно,

типу 2) - з точністю до заміни клітини φ клітиною Фробеніуса ψ , де $\chi_\psi(x) = \chi_\varphi^\vee(x)$.

типу 3) - з точністю до заміни всієї групи доданків $\oplus \hat{\varphi} q_i(\varphi)$ з однаковою клітиною φ на $\oplus \hat{\psi} q'_i(\varphi)$,

де $\sum_i q_i(\alpha) x_i^\circ x_i$ і $\sum_i q'_i(\alpha) x_i^\circ x_i$ - еквівалентні

етмітові форми над полем $K(\alpha) = K[x]/P_\varphi(x)$ з інволюцією $f(\alpha)^\circ = \bar{f}(\alpha^{-1})$. Зокрема, якщо K - алгебраїчно замкнене поле з тривіальною інволюцією, то доданки типу 3) можна взяти рівними $\hat{\varphi}$. Якщо ж K - алгебраїчно замкнене поле з нетривіальною інволюцією або дійсне замкнене поле, то доданки типу 3) можна взяти рівними $\pm \hat{\varphi}$. Такі доданки за півторалінійною формою визначаються однозначно.

В § 4 отримана класифікація зображень орехом (1) - (4) над тілом кватерніонів. Зокрема, для зображень орехами (1) доведена

Теорема 4.1. Вкладемо поле \mathbb{C} в тіло \mathbb{H} таким чином, щоб фіксована в \mathbb{H} інволюція діяла на \mathbb{C} спряженням. В скінченновимірному просторі над \mathbb{H} для кожної півторалінійної форми знайдеться базис, в якому її матриця є пряма сума матриць такого вигляду:

- 1) вироджена клітина Фробеніуса,
- 2) $\begin{pmatrix} 0 & E \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}$, де φ - клітина Фробеніуса над полем \mathbb{C} з власним числом $\lambda_\varphi = a + bi$, $b \geq 0$, $|\lambda_\varphi| > 1$,
- 3) $\varepsilon \hat{\varphi}$, де φ - клітина Фробеніуса над полем \mathbb{C} з власним числом $\lambda_\varphi = a + bi$, $b \geq 0$, $|\lambda_\varphi| = 1$, причому $\varepsilon = \pm 1$ при стандартній інволюції на \mathbb{H} , і $\varepsilon = 1$ при нестандарт-

ній інволюції. Пряма сума за півторалінійною формою визначається однозначно з точністю до перестановки доданків.

В § 5 проводиться класифікація білінійних форм над алгебраїчно замкненим полем характеристики 2. Показано, що над таким полем для кожної білінійної форми знайдеться база, в якій її матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ \varphi_i & 0 \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} 0 & E \\ \varphi_j & 0 \end{pmatrix} \oplus \hat{\Psi}_1 \oplus \dots \oplus \hat{\Psi}_q \oplus J_1 \oplus \dots \oplus J_r$$

де φ_i, φ_j - невироджені клітини Жордана, $\varphi_i \neq \varphi_j$ для всіх i, j , J_k - вироджена клітина Жордана. Така пряма сума за білінійною формою визначається однозначно з точністю до перестановки доданків і заміни в клітині φ_i власних чисел λ на λ^{-1} . Матриця $\hat{\Psi}$ - фіксований розв'язок рівняння $X = X^T \Psi$ і існує тоді і тільки тоді, коли Ψ непарного розміру з власним числом 1.

В § 6 вивчаються зображення орехом зі співвідношеннями вигляду $\alpha = \varepsilon \alpha^*$ (або з пустою множиною співвідношень), де $\varepsilon \in \{1, -1\}$ при тривіальній інволюції на поле K , $\varepsilon = 1$ при нетривіальній інволюції. Співвідношення $\alpha = \varepsilon \alpha^*$ будемо задавати, розмістивши в петлі α число ε , такі орехи будемо називати відміченими. Множину вершин орехами S будемо позначати S_0 , множину ребер - S_1 . Ореху S назвемо ручною, якщо її қолчан зі співвідношеннями \bar{S} ручний.

Формою Тітса відміченої орехами S назвемо квадратичну форму

$$\varphi_S(\alpha) = \sum_{\alpha \in S_0} x_\alpha^2 - \sum_{\alpha \in S_1} k_\alpha x_{\alpha_1} x_{\alpha_2}$$

де α_1, α_2 - вершини, з'єднані ребром $\alpha \in S_1$, $k_\alpha = 1$ при невідміченому α , $k_\alpha = 1/2$ при відмічено-

мірності Z .

б) Якщо Z - корінь типу $1/2$, то є точно одне крихке зображення розмірності Z і або ж точно одна орбіта зображень розмірності Z , або ж (лише для орхем міткою - 1) точно одне крихке зображення розмірності $2Z$.

в) Якщо Z - корінь типу 0 , то є хоча б одне крихке зображення розмірності Z і можуть бути орбіти зображень розмірності Z .

г) Всі крихкі зображення і орбіти зображень орхеми S перераховані в пунктах а) - в).

В пп. 6.2 - 6.3 § 6 повністю перераховані крихкі зображення і орбіти зображень ручних відмічених схем.

В § 7 теорема В.Г.Каца про розмірності нерозкладних зображень колчану узагальнюється на орхеми без співвідношень. Через $\Delta_+^{re}(S)$ і $\Delta_+^{im}(S)$ позначимо множини додатних дійсних і додатних уявних коренів графа S .

Теорема 7.1. Нехай K - алгебраїчно замкнене поле характеристики $\neq 2$, S - орхеми без співвідношень, $Z = (Z_v)_{v \in S_0}$ - вектор з невід'ємними цілчисловими коефіцієнтами. Тоді

а) для $Z \notin \Delta_+^{re}(S) \cup \Delta_+^{im}(S)$ не існує нерозкладного зображення розмірності Z ,

б) для $Z \in \Delta_+^{re}(S)$ існує єдине з точністю до конгруентності нерозкладне зображення розмірності Z ,

в) для $Z \in \Delta_+^{im}(S)$ існують хоча б два неконгруентних нерозкладних зображень розмірності Z .

В § 8 вивчаються зображення $\varphi : \Lambda \rightarrow \text{End}(V)$ алгебри Λ з інволюцією над полем K операціями векторного

простору V над K зі скалярним добутком, що задається невідрідженою ε -ермітовою формою, при яких спряжений елемент переходить в спряжений оператор: $\varphi(\lambda^*) = \varphi(\lambda)^*$. Такі зображення називаються симетричними і з'являються, наприклад, при вивченні унітарних зображень груп.

Нехай алгебра Λ задається твірними $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ і визначальними співвідношеннями $f_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = 0$, де f_i - некомутативні многочлени. Інволюція в алгебрі може бути задана співвідношеннями $\lambda_j^* = g_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Тоді симетричні зображення алгебри Λ можна ототожнити з зображеннями орохеми



$$f_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = 0,$$

$$\lambda_j^* \beta = \beta g_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots),$$

$$\beta = \varepsilon \beta^*, \quad \delta \beta = 1_v, \quad \beta \delta = 1_v$$

Внаслідок основної теореми це дозволяє класифікацію симетричних зображень алгебри з інволюцією звести до класифікації її звичайних зображень і класифікації ермітових форм (теорема 8.1).

В § 9 робляться намітки підходу до вивчення систем тензорів довільної валентності (системами тензорів валентності 2 - зображення схем). Наводиться наступне узагальнення закону інерції: система тензорів валентності ≥ 2 над полями \mathbb{R} і \mathbb{C} однозначно з точністю до ізоморфізму доданків може бути представлена у вигляді прямої суми нерозкладних підсистем.

Другий розділ містить такі результати.

В § 1 вивчаються унітарні (евклідові) зображення калчану, тобто набори унітарних (евклідових) просторів, які складають-

ося у відповідність вершинам колчану, і лінійних відображень, які отримуються у відповідність стрілкам.

В п. 1.1 дається алгоритм зведення до канонічного вигляду матриць унітарного зображення колчану.

В п. 1.2 вивчається будова канонічної матриці лінійного оператора в унітарному просторі.

В п. 1.3 описується множина розмірностей нерозкладних унітарних зображень колчану. Нехай Q - зв'язний колчан з вершинами $1, 2, \dots, n$, відмінний від однієї точки \bullet і від

$\bullet \rightarrow \bullet$. Існує нерозкладне унітарне зображення розмірності $z \in \mathbb{N}^n$ тоді і тільки тоді, коли $Az \geq z$, де $A = (a_{ij})$, a_{ij} - число стрілок вигляду $i \rightarrow j$ і $i \leftarrow j$. Число дійсних параметрів в цьому зображенні порівняє:

$\sum_i z_i - 1$, максимальне число комплексних параметрів дорівнює $1 - \varphi_Q(z) + \frac{1}{2} \sum_i z_i (z_i - 1)$, де $\varphi_Q(x)$ - форма Тітта.

В п. 1.4 вивчаються евклідові зображення колчану. Виберемо повну систему неізоморфних нерозкладних унітарних зображень колчану, які задані матрицями лінійних відображень, що отримуються у відповідність його стрілкам. Якщо в цій системі кожен пар $\{A, \bar{A}\}$, $A \neq \bar{A}$, взаємно спряжених зображень замінити на їх пряму суму $A \oplus \bar{A}$, то отримаємо повну систему нерозкладних неізоморфних евклідових зображень колчану. Множини розмірностей нерозкладних унітарних і нерозкладних евклідових зображень колчану співпадають.

В § 2 пропонується алгоритм зведення до канонічного вигляду квадратної матриці відносно перетворення Λ -подібності, що базується на роботі Г.Р.Беміцького [13]. Дві матриці $M, N \in K^{n \times n}$ називаємо Λ -подібними (Λ - підалгебра алгебри $K^{n \times n}$ матриць розмірності $n \times n$ над алгебраїчно замкненим полем K), якщо $S^{-1}MS = N$ для деякої неваріо-

деної матриці $S \in \Lambda$. Алгоритм дозволяє матриці зображень колчану, звичайної або доповненої частково впорядкованої множини, боксу, модуля над категорією тощо зводити до канонічного вигляду. Матриці канонічного вигляду представлені у вигляді прямої суми нерозкладних, а тому алгоритм зручний у застосуваннях, якщо потрібно перевірити нерозкладність зображення.

У р о з д л і ІІ розглянуті три задачі з теорії диференціальних рівнянь.

Канонічний вигляд системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами $Ay' + By = 0$ відносно множення на невідроджену матрицю R^{-1} і заміни $y = Sz$:

$$(R^{-1}AS)z' + (R^{-1}BS)z = 0$$

отриманий Кронекером (задача про лучок матриць, див. с 14 з).

В § 1 розглядається аналогічна задача для систем лінійних диференціальних рівнянь з мероморфними коефіцієнтами. В цьому випадку перетворення мають вигляд

$$(A, B) \mapsto (R^{-1}AS, R^{-1}(BS + AS'))$$

Покажимо, що пара (A, B) зводиться до прямої суми нерозкладних пар вигляду

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & & 1 \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \right);$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - коефіцієнти нерозщеплюваного косого многочлену $\chi(x) = x^n + x^{n-1}\alpha_1 + \dots + \alpha_n \in F[x, t]$ над полем F мероморфних функцій. Прямі доданки визначаються однозначно з точністю до заміни косого многочлену $\chi(x)$ подібним многочленом. Цей результат доводиться з більшою загальністю - для псевдолінійних пучків матриць над тілом K з автоморфізмом φ і φ -диференціюванням δ (теорема 1.1, для $\delta = C$ ця теорема була доведена Длабом і Рингелем).

В § 2 показано, що система диференціальних рівнянь $dy/dt = A(t)y$ з мероморфною матрицею $A(t)$ в будь-якому комплексному крузі $|t| \leq r < \infty$ може бути перетворена в систему з дробово-раціональними коефіцієнтами шляхом заміни $y = S(t)z$ з голоморфною матрицею $S(t) = E + S_1 t + \dots$

Локальний випадок цієї теореми (в околі особливої точки типу полюса) був доведений Г. Біркгофом з помилкою [15]. Помилка виправлена Ф. Р. Гантмахером [14] в околі простого полюса і Терратіном [16] в околі полюса.

В § 3 доведено, що задача класифікації голоморфних матриць відносно голоморфної подібності є дику.

1. Gabriel P. Underlegte Darstellungen. I//Manuscripta Math.-1972.-6.- S.71-103.
2. Назарова Л.А. Представления колчанов бесконечного типа// Изв.АН СССР. Сер.мат.-1973.-37. № 4.- С.752-791.
3. Donovan P., Freislich M. The representation theory of finite graphs and associated algebras.- Ottawa, 1973.
4. Кас V.G. Some remarks on representations of quivers and infinite root systems//Lect.Notes th.-1980.-832.- P.311-332.
5. Gabriel P., Roiter A.V. Representations of finite-dimensional algebras.-Springer 1992.
6. Riehm C. The equivalence of bilinear forms//J.Algebra.- 1974.-24.- P.45-66.
7. Scharlau R. Zur Klassifikation von Bilinearformen und von Isometrien über Körpern//Math.Z.-1981.-178.- S.359-373.
8. Gabriel P. Degenerate bilinear forms//J.Algebra.-1974.- 31.- P.67-72.
9. Shapiro H. A survey of canonical forms an invariante for unitary similarity//Linear Algebra and Appl.-1991.-147.- P.101-167.
10. Ostrovskii V.L., Samoilenko Yu.S. Structure theorems for a pair of unbounded selfadjoint operators satisfying quadratic relation.- Киев, 1991.- С.1-25.- (Препр./АН Украины. Ин-т математики; 91.4).
11. Scharlau W. Quadratic and Hermitian forms.-Springer, 1985.
12. Ройтер А.В. Бокс с инволюцией//Представления и квадратичные формы.-Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979.-С.124-126.
13. Белицкий Г.Р. Нормальные формы матриц//Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов.- Киев: Наук. думка, 1983.- С.3-15.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- 3 изд.- М.: Наука, 1967.
15. Birkhoff G.D. Equivalent singular points of ordinary linear differential equations//Math.Ann.-1913.-74.- P.134-139.
16. Turritin H.L. Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff canonical form//Trans.Amer.Math.Soc.- 1963.-103, no.3.- P.485-507.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

17. Сергейчук В.В. Представления простых involтивных колчанов// Представления и квадратичные формы.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979.- С.127-148.
18. Сергейчук В.В. Представления орskem// Линейная алгебра и теория представлений.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.- С.110-134.
19. Сергейчук В.В. Классификационные задачи для систем линейных отображений и полуторалинейных форм.- Киев: Киев.ун-т, 1983.- 59 с.- Деп.в УкрНИИТИ. № 196Ук-Д84.
20. Сергейчук В.В. Классификация линейных операторов в конечномерном унитарном пространстве//Функцион.анализ и его прил.- 1984.-18, № 3.- С.57-62.
21. Сергейчук В.В. Канонический вид матрицы билинейной формы над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 // Мат.заметки.- 1987.-41, № 6.- С.781-788.
22. Сергейчук В.В. Классификационные задачи для систем форм и линейных отображений//Изв.АН СССР. Сер.мат.- 1987.-51, № 6.- С.1170-1190.
23. Сергейчук В.В. Голоморфная эквивалентность системы линейных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами системе с дробно-рациональными коэффициентами, Дифференц.уравнения.- 1988.-24, № 6.- С.1064-1066.
24. Сергейчук В.В. Псевдолинейные пучки матриц и системы линейных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами//Дифференц.уравнения.- 1989.-25, № 10.- С.1721-1727.
25. Сергейчук В.В. Классификация пар подпространств в пространствах со скалярным произведением//Укр.мат.журн.- 1990.-42, № 4.- С.549-554.
26. Сергейчук В.В. Классификация полуторалинейных форм пар эрмитовых форм, самосопряженных и изометрических операторов над телом кватернионов//Мат.заметки.- 1991.-49, № 4.- С.115-123.

27. Сергейчук В.В. Замечание о классификации голоморфных матриц с точностью до подобия//Функцион.анализ и его прил.- 1991.-25, № 2.- С.65.
28. Сергейчук В.В. Симметрические представления алгебр с инволюцией//Мат.заметки.- 1991.-50, № 4.- С.108-113.

Відп. до друку 14.10.93 . Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,39. Ум. фарбо-відб. 1,39. Обл.-вид.арк. 0,95.
Тираж 100 пр. Зам. 347 Безкоштовно.

Віддруковано в Інститут⁺ математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3

U681166

AB 28.372

AB 28.372