КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ЛЯШЕНКО Олена Ігорівна

ДОСЛІДЖЕННЯ СТОХАСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ РОСТУ

01.01.09 - математична кібернетика

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993

Робота виконана в Київському університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: - доктор фізико-математичних наук, професор АНІСІМОВ В.В.

Офіційні опоненти: - доктор фізико-математичних наук, професор НАКОНЕЧНИЙ О.Г.

кандидат фізико-математичних наук, с.н.с. ПЕРЕКАТОВ О.Є.

Провідна установа - Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова АН України

Захист відбудеться "25" листопада 1993 р. о 14.00 на засіданні спеціалізованої ради Д 068.18.16 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, м. Київ - 127, проспект Академіка Глушкова, 6, факультет кібернетики, ауд. 40.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету імені Тараса Шевченка.

Автореферат розісланий "25" жовтня 1993 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради КУЗЬМІН А.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Серед різноманітних проблем, що виникають в біологічних, екологічних, економічних системах, важливим є дослідження динаміки процесів. Зокрема, для моделювання динаміки біологічних популяцій, що складаються з декількох видів, традиційно використовуються звичайні диференціальні рівняння. Проте, подібні моделі мають два основних недоліки: по-перше, вони не враховують випадкових факторів, притаманних кожній такій популяції, а по-друге, природній дискретний фазовий простір при цьому замінюється неперервним.

Для дослідження подібних еволюційних процесів зручною є модель схеми урни з кулями $N+1$ / $N \geq 1$ / кольорів, для якої характерна багатогранність граничного стану концентрацій / пропорцій / куль, який може залежати як від властивостей детермінованих функцій, що задають зміну концентрацій в середньому за один крок, так і від початкових кількостей куль в урні. Крім цього, вказаній схемі урни притаманна природня стохастичність, що визначається правилом додавання куль в залежності від часу та поточних концентрацій. Стохастичність є невід"ємною рисою навколишньої природи. Це і випадкові флуктуації параметрів середовища / як абіотичні - фізичні характеристики середовища, так і біотичні - характеристики інших популяцій /, і випадкові варіації екологофізіологічних характеристик окремих представників популяції, і навіть випадковий характер взаємодії між ними.

Актуальною проблемою є розробка методів дослідження стійкості рекурентних послідовностей схеми урни з кулями $N+1$ кольорів. Привабливим є метод асимптотичного аналізу рекурентних процесів, запропонований В.В.Анісімовим, що на основі принципу осереднення та дифузійної апроксимації питання стійкості рекурентних послідовностей зводить до дослідження відповідних детермінованих та стохастичних диференціальних рівнянь. Теорія стійкості стохастичних диференціальних рівнянь розвинута в роботах І.І.Гіхмана, А.В.Скорохода, К.Іто, М.М.Красовського, В.С.Королюка, В.Б.Колмановського та багатьох інших математиків.

Актуальною для екології та економіки задачою оптимального керування в класі диференціальних рівнянь є задача оптимального збирання врожаю, запропонована Р.Белманом і досліджена ним для випадку детермінованих автономних систем. Ця задача привернула увагу К.Уатта, Ю.М.Свіріжева, Є.Я.Єлізарова, О.Б.Горстко, Г.А.Угольницького та інших вчених. В дисертації проведено дослідження моделі оптимального збирання врожаю для випадку динамічних та стохастичних систем.

<u>Мета роботи</u>: І/ побудова та асимптотичне дослідження стійкості стохастичних моделей росту, що описуються рекурентними послідовностями, шляхом зведення їх до детермінованих та стохастичних диференціальних рівнянь;

2/ дослідження спеціальної динамічної та стохастичної задачі оптимального керування в класі диференціальних рівнянь / модель оптимального збирання врожаю / з метою встановлення достатніх умов єдиності розв"язку та його алгоритмізації.

<u>Наукова новизна</u> результатів дисертації полягає:

- в отриманні системи рекурентних послідовностей для осередненої та дифузійної складових в узагальненій схемі урни типу Поліа з кулями $N+1$ кольорів і дослідження їх асимптотичної поведінки;

- в узагальненні моделі Айгена еволюції полінуклеотидів на стохастичний випадок;

- в отриманні достатніх умов існування єдиного розв"язку динамічної задачі оптимального збирання врожаю;

- в синтезі адаптивної оптимальної магістралі задачі оптимального збирання врожаю з кусково-сталим стохастичним параметром.

Методи дослідження. Математичним апаратом, що використовується в дисертації, є теорія ймовірностей, теорія диференціальних рівнянь, методи нелінійного програмування.

Практична цінність. В дисертації наведені результати якісного дослідження конкретних математичних моделей:

- досліджена асимптотична поведінка розв"язків стохастичної моделі еволюції полінуклеотідів в реакторі діалізу;

- знайдені достатні умови єдиності розв"язку динамічної моделі оптимального збирання врожаю.

Результати дисертації можуть бути використані для дослідження еволюції біологічних популяцій в стохастичних умовах зовнішнього середовища.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались і обговорювались на таких конференціях та семінарах: Українській науковій конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" /м.Київ, 1991 - 1993 рр./, зимовій школі молодих вчених Інституту математики та механіки РАН / м.Єкатеринбург, 1992, 1993 рр./, науковому семінарі з математичних методів дослідження операцій Інституту кібернетики АН України / н.к.- акад. Єрмольєв Ю.М., 1990, 1993 рр./, науковому семінарі кафедри прикладної статистики Київського університету / н.к. - проф. Анісімов В.В., 1993 р./.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 7 роботах.

Структура та обсяг роботи. Дисертація обсягом 100 стор. складається з вступу, двох глав, висновків та списку літератури з 120 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтована актуальність розглянутих в дисертації питань, визначено мету дослідження, зроблено огляд результатів, пов"язаних з темою дисертації. Стисло викладено зміст дисертації.

Перша глава дисертації присвячена дослідженню рекурентних послідовностей узагальненої схеми урни і складається з трьох параграфів.

В § I розглядається рекурентна послідовність схеми урни з кулями $N+1$ $/ N \geq 1 /$ кольорів, коли в кожний дискретний момент часу в урну додається лише одна куля. Ця схема досліджена в роботах В.Артура, Ю.М.Єрмольєва, Ю.М.Каніовського /1987/.

Маємо урну нескінченого об"єму, яка може містити кулі $N+1$ можливих кольорів. В кожний момент часу $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n}, \ldots$ $/k = 0, 1, 2, \ldots /$ в урну додається одна куля одного з $N+1$ можливих кольорів. Вектор

$$\xi_{nk} = \left(\xi^1_{nk}, \xi^2_{nk}, \ldots, \xi^N_{nk}\right)$$

описує пропорції / концентрації / куль кольорів від I до N відповідно в момент часу k / тобто після того, як k куль додані в урну /. В початковий момент в урні знаходиться $\gamma_n \geq 1$ куль. Нехай

$$q_{nk}(\xi) = \left(q^1_{nk}(\xi), q^2_{nk}(\xi), \ldots, q^N_{nk}(\xi)\right), \quad k \geq 0$$

послідовність вектор-функцій / функцій урни /, кожна з яких пропорції ξ куль в урні ставить у відповідність ймовірність додавання кулі кожного з кольорів $1, 2, \ldots, N$ в момент часу k.

Вводимо сукупність незалежних випадкових величин

$$\beta_{nk}(\xi)=\left(\beta^1_{nk}(\xi),\beta^2_{nk}(\xi),\dots,\beta^N_{nk}(\xi)\right),\quad k\geqslant 0$$

де

$$\xi\in S^N=\left\{x: x=(x^1,x^2,\dots,x^N),\ x^i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^N x^i\leqslant 1\right\},$$

$$\beta^i_{nk}(\xi)=\begin{cases}\bar{e}^i & \text{з ймовірністю } q^i_{nk}(\xi)>0,\\ \bar{0} & \text{з ймовірністю } 1-q^i_{nk}(\xi)>0,\end{cases}$$

$\bar{e}^i=(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)$. $\bar{0}$ - нульовий вектор, $\sum_{i=1}^N q^i_{nk}(\xi)<1$.

Еволюція пропорцій куль в урні описується рекурентним співвідношенням

$$\xi_{nk+1}=\xi_{nk}+\frac{\beta_{nk}(\xi_{nk})-\xi_{nk}}{\gamma_n+k+1},\quad k\geqslant 0, \qquad /1/$$

що нами приводиться до вигляду

$$\xi_{nk+1}=\xi_{nk}+\frac{q_{nk}(\xi_{nk})-\xi_{nk}}{(\gamma_n+k+1)/n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{[q_{nk}(\xi_{nk})]-q_{nk}(\xi_{nk})q^*_{nk}(\xi_{nk})}}{(\gamma_n+k+1)/n}\,\psi_{nk}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad /2/$$

де

$$[q_{nk}(\xi)]=\left[q^1_{nk}(\xi),q^2_{nk}(\xi),\dots,q^N_{nk}(\xi)\right] -$$

діагональна матриця; $q^*_{nk}(\xi)$ - транспонований вектор / вектор-строка /; ψ_{nk} - незалежні вектори, що володіють властивостями

$$M\left[\psi_{nk}/\bar{\xi}_{nk}\right]=\bar{0},\qquad M\left[\psi_{nk}\psi^*_{nk}/\bar{\xi}_{nk}\right]=\frac{J}{n}, \qquad /3/$$

$\bar{\xi}_{nk}=(\xi_{n0},\xi_{n1},\dots,\xi_{nk})$. J - одинична діагональна матриця.

Відшукуємо ξ_{nk} у вигляді

$$\xi_{nk}=x_{nk}+\frac{y_{nk}}{\sqrt{n}},\quad k\geqslant 0, \qquad /4/$$

причому $x_{n0}=\xi_{n0}$, $y_{n0}=0$.

Рекурентне співвідношення /2/ еквівалентне системі

$$x_{nk+1}=x_{nk}+a_{nk}(x_{nk})\frac{1}{n},\quad x_{n0}=\xi_{n0}, \qquad /5/$$

$$y_{nk+1}=y_{nk}+\tau_{nk}(x_{nk},y_{nk})\frac{1}{n}+\sigma_{nk}(x_{nk},y_{nk})\psi_{nk},\quad y_{n0}=0, \qquad /6/$$

де

$$a_{nk}(x)=\frac{q_{nk}(x)-x}{(\gamma_n+k+1)/n},$$

$$\tau_{nk}(x,y)=\frac{\sqrt{n}\left(q_{nk}\left(x+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)-q_{nk}(x)\right)-y}{(\gamma_n+k+1)/n},$$

$$\sigma_{nk}(x,y)=\frac{\sqrt{\left[q_{nk}\left(x+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right]-q_{nk}\left(x+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)q^*_{nk}\left(x+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)}}{(\gamma_n+k+1)/n}.$$

Користуючись методикою В.В.Анісімова, досліджуємо асимптотичну поведінку розв"язків /5/,/6/ при $n\to\infty$, коли

$$\frac{k}{n}\to t\geq 0,\quad \frac{\gamma_n}{n}\to s_0\geq 0,\quad q_{nk}(x)=q\left(\frac{k}{n},x\right)\to q(t,x).$$

Застосовуючи принцип осереднення до /5/, приходимо до теореми.

Теорема I. Нехай $s_0>0$, функція $q(t,x)$ рівномірно по $x\in S^N$ неперервна по $t\in[0,T]$, задовільняє умові Ліпшиця

$$|q(t,x_1)-q(t,x_2)|\leq C\,|x_1-x_2|.$$

Тоді

$$\max_{k\leq nT}\left|x_{nk}-x\left(\frac{k}{n}\right)\right|\to 0,\quad n\to\infty$$

де $x(t)$ - розв"язок задачі Коші

$$dx=\frac{q(t,x)-x}{s_0+t}\,dt,\quad x(0)=x_0. \qquad /7/$$

Застосуємо до /6/ дифузійну апроксимацію. Нехай $\tau_{nk}(x,y)$, $\sigma_{nk}(x,y)$ - невипадкові функції, $\psi_n(t)=\sum_{k=0}^{[nt]}\psi_{nk}$, а $y_n(t)=y_{nk}$, $q_n(t,x)=q_{nk}(x)$ при $\frac{k}{n}\leq t<\frac{k+1}{n}$, $t\geq 0$ - ступінчаті функції. Приходимо до теореми.

Теорема 2. Нехай $s_0>0$, виконуються всі умови теореми I. Крім цього, $q(t,x)$ - неперервно диференційовна по x при

$x \in S^N$, $t \in [0,T]$. Тоді скінченновимірні розподіли процесу $\psi_n(t)$, $t \in [0,T]$ слабо збігаються до розподілів $w(t)$ стандартного вінерівського процесу в R^N, а послідовність процесів $y_n(t)$ U-збігається в просторі $\mathcal{D}^N_{[0,T]}$ до процесу $y(t)$, що є розв"язком стохастичного диференціального рівняння / задачі Коші /

$$dy = \frac{1}{s_0+t}\left[\frac{d}{dx}q(t,x) - J\right]y\,dt + \frac{\sqrt{[q(t,x)] - q(t,x)q^*(t,x)}}{s_0+t}\,dw(t), \quad y(0)=0. \qquad /8/$$

Зауваження. У випадку $s_0 = 0$ / $\gamma_n = 1$ / для існування розв"язків задач /7/ і /8/ додатково необхідне виконання таких умов

$$\lim_{t \to +0} q(t,x) = q(0,x) = x, \qquad /9/$$

$$\lim_{t \to +0} \left\{ [q(t,x)] - q(t,x) q^*(t,x) \right\} = \bar{0}. \qquad /10/$$

В § 2 розглядається узагальнена схема урни типу Поліа з кулями $N+1$ кольорів, що додаються порціями випадкового об"єму. В роботах В.Б.Артура, Ю.М.Єрмольєва, Ю.М.Каніовського досліджені питання про умови, при яких можлива збіжність з ймовірністю I до деяких конструктивних множин, про існування граничного вектора, про характер збіжності при $n \to \infty$. Але при цьому залишаються невивченими питання динаміки збіжності / тренд, дифузія, стійкість /.

Нехай в кожний момент часу $k = 0, 1, 2, \ldots$ в урну додається

$$i_{nk} = (i^1_{nk}, i^2_{nk}, \ldots, i^{N+1}_{nk}), \quad i_{nk} \in Z^{N+1}_+,$$

$$i^1_{nk} + i^2_{nk} + \cdots + i^{N+1}_{nk} = |i_{nk}| = 0, 1, 2, \ldots$$

куль кольорів від 1 до $N+1$, а

$$\tilde{S}_{nk} = (S^1_{nk}, S^2_{nk}, \ldots, S^{N+1}_{nk}), \quad A_{nk} = |\tilde{S}_{nk}| = S^1_{nk} + S^2_{nk} + \cdots + S^{N+1}_{nk}$$

відповідно кількості куль кольорів від I до $N+1$ та загальна кількість куль, що знаходяться в урні в момент k / коли порція i_{nk} ще не додана в урну /.

Позначимо

$$\tilde{s}_{nk} = \tilde{S}_{nk}/n, \quad a_{nk} = A_{nk}/n.$$

З $N+2$ змінних $\tilde{s}_{nk}$ і a_{nk} виберемо $N+1$ незалежних

$$s_{nk} = (s^1_{nk}, s^2_{nk}, \ldots, s^N_{nk}), \ a_{nk}.$$

Введемо

$$\tilde{\beta}_{nk}(s,a) = \left(\beta^1_{nk}(s,a), \beta^2_{nk}(s,a), \ldots, \beta^{N+1}_{nk}(s,a)\right), \ k \geq 0$$

- незалежні по k випадкові вектори, $s \in R^N_+$, $a \in R^1_+$, $|s| \leq a$, такі, що

$$P\left\{\tilde{\beta}_{nk}(s,a) = i\right\} = q_{nk}(i,s,a), \quad \sum_{i \in Z^{N+1}_+} q_{nk}(i,s,a) = 1.$$

Тоді

$$a_{nk} = \frac{\gamma_n}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} \left|\tilde{\beta}_{nj}(s_{nj}, a_{nj})\right|, \ k \geq 0.$$

Рекурентне співвідношення для s_{nk} має вигляд

$$s_{nk+1} = s_{nk} + \beta_{nk}(s_{nk}, a_{nk})\frac{1}{n}, \ k \geq 0.$$

Послідовність s_{nk}, $k \geq 0$ породжує монотонний потік σ - алгебр F_{nk}, де s_{nk} є F_{nk} - вимірні.

Припустимо, що для всіх $s \in R^N_+$, $a \in R^1_+$, $|s| \leq a$ існує вектор-функція

$$M\left[\tilde{\beta}_{nk}(s,a)/F_{nk}\right] = \sum_{i \in Z^{N+1}_+} i \cdot q_{nk}(i,s,a) = \tilde{f}_{nk}(s,a).$$

З перших N компонент векторів $\tilde{\beta}_{nk}(s,a)$ і $\tilde{f}_{nk}(s,a)$ утворимо вектори $\beta_{nk}(s,a)$ і $f_{nk}(s,a)$ розмірності N.

Припустимо, що симетрична матриця

$$M\left[\beta_{nk}\beta^*_{nk}/F_{nk}\right] - f_{nk}f^*_{nk} = \sigma^2_{nk}(s,a)$$

є додатньо-визначеною.

Відшукуючи s_{nk} у вигляді

$$s_{nk} = x_{nk} + \frac{y_{nk}}{\sqrt{n}}, \ k \geq 0, \ x_{n0} = s_{n0}, \ y_{n0} = 0,$$

приходимо до системи рекурентних співвідношень

$$x_{nk+1} = x_{nk} + f_{nk}(x_{nk}, a_{nk})\frac{1}{n},\ k\geq 0,\ x_{n0} = \frac{\gamma_n}{n},$$

$$y_{nk+1} = y_{nk} + \sqrt{n}\left(f_{nk}(x_{nk} + \frac{y_{nk}}{\sqrt{n}}, a_{nk}) - f_{nk}(x_{nk}, a_{nk})\right)\frac{1}{n} + \qquad /11/$$

$$+ \sigma_{nk}(x_{nk} + \frac{y_{nk}}{\sqrt{n}}, a_{nk})\psi_{nk},\ k\geq 0,\ y_{n0} = 0,$$

де

$$\psi_{nk} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\sigma_{nk}^{-1}\cdot\left(\beta_{nk} - f_{nk}\right),\quad k\geq 0$$

- незалежні вектори, що володіють властивостями /3/.

Дослідимо траєкторії a_{nk} , x_{nk} , y_{nk} при $n\to\infty$, $k=[nt]$. Нехай для простоти

$$q_{nk}(i,s,a) = q\left(\frac{k}{n}, i, s, a\right).$$

Згідно підсиленого закону великих чисел отримуємо функціональне співвідношення

$$a = s_0 + t\cdot\sum_{i\in Z_+^{N+1}} |i|\,q(t,i,s,a). \qquad /12/$$

Застосовуючи до рекурентних послідовностей /11/ принцип осереднення та дифузійну апроксимацію, приходимо до таких теорем.

<u>Теорема</u> 3. Нехай при $n\to\infty$ буде $\frac{\gamma_n}{n}\to s_0>0$, функції урни $q_{nk}(i,s,a)\geq 0$, де $i\in Z_+^{N+1}$, $s\in R_+^N$, $a\in R_+^1$, $|s|\leq a$ такі, що

$$\sum_{i\in Z_+^{N+1}} q_{nk}(i,s,a) = 1,\quad \sum_{i\in Z_+^{N+1}} |i|\cdot q_{nk}(i,s,a)\leq C_0, \qquad /13/$$

існують граничні функції $q(t,i,s,a)$ такі, що відповідні їм функції $f(t,s,a)$ рівномірно по $s\in R_+^N$, $a\in R_+^1$, $|s|\leq a$ неперервні по t і для всіх $t\leq T$ задовільняють умові Ліпшиця по змінній s . Тоді

$$\max_{k\leq nT}\left|x_{nk} - x\left(\frac{k}{n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

де $x(t)$ - розв"язок задачі Коші

$$dx = f(t,x,a)\,dt, \quad x(0) = s_0, \qquad /14/$$

a визначається функціональним співвідношенням /12/.

<u>Теорема</u> 4. Нехай виконуються всі умови теореми 3. Крім цього, для всіх $s \in R_+^N$, $a \in R_+^1$, $|s| \le a$ виконується нерівність

$$\sum_{i \in Z_+^{N+1}} |i|^2 q_{nk}(i,s,a) \le C_1, \qquad /15/$$

матрично-значна функція $\sigma_{nk}^2(s,a)$ є додатньо-визначеною, а $\sigma_{nk}(s,a)$ задовільняє умові Ліпшиця по змінній s. Векторно-значна гранична функція $f(t,s,a)$ при $|s| \le a$ неперервно диференційовна по s при $t \in [0,T]$.

Тоді скінченно-вимірні розподіли процесу

$$\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{[nt]} \psi_{nk}, \quad t \in [0,T]$$

слабо збігаються до розподілів $w(t)$ стандартного вінерівського процесу в R^N, а послідовність

$$y_n(t) = y_{nk} \quad \text{при} \quad \frac{k}{n} \le t < \frac{k+1}{n}, \ t \ge 0$$

U-збігається в просторі $\mathcal{D}_{[0,T]}^N$ до процесу $y(t)$, що є розв"язком стохастичного диференціального рівняння

$$dy = \frac{d}{dx} f(t,x,a)\,y\,dt + \sigma(t,x,a)\,dw(t), \quad y(0) = 0, \qquad /16/$$

де x - розв"язок задачі Коші /14/, a визначається з функціонального співвідношення /12/.

В § 3 розглядається детермінована модель Ейгена динаміки реплікуючих полінуклеотідів при ідеальних експериментальних умовах в реакторі діалізу

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_j - x_i \varphi, \quad i = \overline{1,N}, \qquad /17/$$

де x_i - концентрації полінуклеотідів,

$$x \in \bar{S}^N = \left\{x : x=(x_1, x_2, \dots, x_N),\ x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1\right\},$$

поточне значення φ / знесення / задається так

$$\varphi = \sum_{r,s} w_{rs} x_s , \qquad /18/$$

$$w_{jj} = A_j Q_{jj} - \mathcal{D}_j , \quad w_{ij} = A_j Q_{ij} \quad (i \neq j), \qquad /19/$$

$A_j > 0$ - швидкість синтезу полінуклеотідів типу j . $\mathcal{D}_j > 0$ - швидкість розкладу, Q_{ij} - ймовірність того, що копією молекули типу j буде молекула типу i / для $i \neq j$ це швидкість мутації /, $Q_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{N} Q_{ij} = 1$.

Вводимо матриці

$$W = QA - \mathcal{D}, \quad Q = [Q_{ij}]_{i,j=1}^{N} , A = [A_j]_{j=1}^{N} , \mathcal{D} = [\mathcal{D}_j]_{j=1}^{N} .$$

Для моделі Айгена встановлюється достатня умова

$$Re\ \lambda(QA - \mathcal{D}) < 0 \qquad /20/$$

асимптотичної стійкості в цілому розв"язку x .

Модель Айгена узагальнюється на стохастичний випадок. Для цього вводяться N^2 незалежних випадкових величин

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \bar{e}^{ij} & \text{з ймовірністю } Q_{ij} \geq 0, \\ \bar{O} & \text{з ймовірністю } 1 - Q_{ij} \geq 0, \end{cases}$$

де $\bar{e}^{ij}$ - квадратна матриця N-го порядку, у якої елемент (i,j) рівний I, а інші елементи рівні 0, $\bar{O}$ - нульова матриця.

Нехай

$$\xi_{nk} = (\xi_{nk}^1, \xi_{nk}^2, \dots, \xi_{nk}^N)$$

- кількість / в натуральних одиницях / полінуклеотідів кожного типу в момент часу k . Тоді баланс полінуклеотідів за проміжок $(k, k+1)$ буде

$$\xi_{nk+1} = \xi_{nk} + (\beta A - \mathcal{D})\xi_{nk} \frac{1}{n} , \quad \xi_{n0} = \xi_0 . \qquad /21/$$

Якщо перейти тут до векторів одиничної норми / пропорції полінуклеотідів /

$$\zeta_{nk} = \frac{\xi_{nk}}{|\xi_{nk}|}, \qquad /22/$$

отримаємо стохастичний дискретний аналог моделі Айгена

$$\zeta_{nk+1} = \frac{\zeta_{nk} + (\beta A - \mathcal{D})\zeta_{nk}\cdot\frac{1}{n}}{\left|\zeta_{nk} + (\beta A - \mathcal{D})\zeta_{nk}\cdot\frac{1}{n}\right|}, \quad \zeta_{n0} = \zeta_0. \qquad /23/$$

Відповідний неперервний аналог має вигляд

$$\dot{z} = (\beta A - \mathcal{D}) z - \left|(\beta A - \mathcal{D}) z\right| \cdot z, \quad z(0) = z_0. \qquad /24/$$

Відшукуючи розв"язок ξ_{nk} рекурентного співвідношення /2I/ у вигляді

$$\xi_{nk} = u_{nk} + \frac{v_{nk}}{\sqrt{n}} \qquad /25/$$

та застосовуючи принцип осереднення та дифузійну апроксимацію, отримаємо дві задачі Коші

$$du = (QA - \mathcal{D}) u\, dt, \quad u(0) = u_0, \qquad /26/$$

$$dv = (QA - \mathcal{D}) v\, dt + \sigma(u)\, dw(t), \quad v(0) = 0, \qquad /27/$$

де $w(t)$ - стандартний вінерівський процес в R^N,

$$\sigma^2(u) = \left[\sum_{j=1}^{N} (Q_{ij} - Q_{ij}^2) A_j^2 u_j^2(t) \right]_{i=1}^{N} \qquad /28/$$

- діагональна матриця.

Друга глава дисертації присвячена дослідженню моделі оптимального керування - моделі оптимального збирання врожаю і складається з трьох параграфів.

В § I розглянуті п"ять найпростіших детермінованих моделей для автономних систем, ріст популяції яких

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x), \quad x(0) = x_0 \qquad /29/$$

описується такими функціями: 1/ лінійний ріст, $\varphi(x)=a$; 2/ лінійний ріст з врахуванням дихання культури, $\varphi(x)=a-bx$; 3/ лінійний ріст з врахуванням ефекту внутрішньовидової боротьби, $\varphi(x)=a-bx^2$; 4/ експоненціальний ріст, $\varphi(x)=ax$; 5/ експоненціальний ріст з врахуванням ефекту внутрішньовидової боротьби, $\varphi(x)=ax-bx^2$ / модель Ферхюльста /.

Ставиться задача визначення оптимального керування даною системою виробництва біомаси і величини часового кроку h між двома послідовними збираннями при умові, щоб сумарний врожай, зібраний за фіксований відрізок часу $[0,T]$, був максимальним. В кінцевий момент часу T процес припиняється шляхом повного відбору біомаси. Застосовуючи метод рекурентних співвідношень динамічного програмування, в явному аналітичному вигляді отримані розв"язки цієї задачі. Максимальний доход буде при неперервному культивуванні

$f(x_0)=x_0+Ta$ в випадках 1-3/,

$f(x_0)=x_0 e^{Ta}$ в випадку 4/,

$f(x_0)=x_0+\frac{Ta^2}{4b}$ при $x_0>\frac{a}{2b}$ в випадку 5/.

В § 2 розглядається задача оптимального збирання врожаю для динамічної системи, коли ріст популяції описується задачою Коші

$$\frac{dx}{dt}=\varphi(x,t), \quad x(0)=x_0. \qquad /30/$$

<u>Лема 1</u>. Нехай в області $G=[0\le t\le T]\times[0\le x_0\le x\le x_T]$ функція $\varphi(x,t)$ - неперервна, диференційовна по t, x, xx і опукла вгору по x. Тоді розв"язок задачі Коші /30/ є монотонно зростаючою та опуклою вгору функцією від початкового значення x_0.

<u>Лема 2</u>. При виконанні умов леми 1 "стійкість" оптимальної стратегії задачі оптимального збирання врожаю для моделі /30/ забезпечується, якщо:

а/ в дискретному випадку / $h>0$ /

$$X(x_i^*, t_i, h) \geqslant x_{i+1}^* \geqslant 0, \quad i=\overline{0,n-1}; \qquad /31/$$

б/ в неперервному випадку / $h=0$ /

$$\arg \max_x \varphi(x,t) = x^*(t) \geqslant 0. \qquad /32/$$

Теорема. Задача оптимального збирання врожаю при виконанні умов леми I і леми 2 має єдиний розв"язок як в дискретному, так і в неперервному випадках. При неперервному культивуванні одержується максимально можливий доход.

В § 3 розглядається задача оптимального збирання врожаю для стохастичної динамічної системи, коли ріст популяції описується задачою Коші

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x,t,\theta), \quad x(0) = x_0, \qquad /33/$$

де x - концентрація популяції, θ - стохастичний параметр.

Розглядається параметрична задача оптимального збирання врожаю, що полягає в відшуканні такої адаптивної стратегії оптимального керування $y(t,\theta) \geqslant 0$, що максимізує функціонал доходу

$$\int_0^T y(t,\theta)dt + x(T,\theta) \longrightarrow \max_{y(t,\theta)\geqslant 0}, \qquad /34/$$

де $x(t,\theta)$ - розв"язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x,t,\theta) - y, \quad x(0) = x_0. \qquad /35/$$

Реалістичною постановкою задачі в умовах кусково-сталого параметра θ, що змінюється дискретно в фіксовані моменти часу, є те, що інформація про величину параметра $\theta = \theta_k$ поступає лише в момент $t = t_{k-1}$ / точки контролю /. В цей же момент і приймається рішення найшвидшого переходу на нову оптимальну магістраль $x^*(t,\theta_k)$, $t \in [t_{k-1}, t_k)$. При цьому ці апостеріорні дані дають можливість прийняти адаптивне рішення немов би в детермінованому випадку.

Оптимальна адаптивна стратегія при цьому полягає в тому, що:

А/ при $t<T$:

1/ якщо $x(t)>x^*(t,\theta)$, то відбувається одномоментне часткове збирання врожаю, щоб попасти в цей же момент на оптимальну магістраль; 2/ якщо $x(t)=x^*(t,\theta)$, то відбувається неперервне збирання врожаю з швидкістю $y^*(t,\theta)$; 3/ якщо $x(t)<x^*(t,\theta)$, то відбувається нарощування біомаси популяції і врожай не збирається / $y=0$ /.

Б/ при $t=T$ відбувається повне збирання врожаю.

Функціонал доходу описується інтегралом Стілтьеса

$$f(x_o,\theta)=\int_{T_o}\varphi[x^*(t,\theta),t,\theta]\,dt+\int_0^T dg(t,\theta), \qquad /36/$$

де

$$g(t,\theta)=max\left(x(t,\theta)-x^*(t,\theta);0\right), \qquad /37/$$

$x(t,\theta)$ - траєкторія росту популяції; T_o - множина проміжків із $[0,T]$, де $x(t,\theta)\equiv x^*(t,\theta)$, тобто $y(t,\theta)=y^*(t,\theta)$.

Отримані результати ілюструються на найпростіших п"яти моделях із § 1, коли $a=\theta$. В цьому випадку одержуються явні аналітичні вирази для функціонала доходу.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Побудована система рекурентних послідовностей осередненої траєкторії та дифузійної складової адаптивної моделі росту для узагальненої схеми урни типу Поліа з кулями $N+1$ кольорів.

2. Проведено асимптотичний аналіз осередненої траєкторії та дифузійної складової для узагальненої схеми урни типу Поліа.

3. Узагальнено модель Айгена еволюції реплікуючих полінуклеотидів на стохастичний випадок.

4. Доведена лема про опуклість розв"язку диференціального рівняння від початкового значення.

5. Знайдено достатні умови існування єдиного розв"язку динамічної задачі оптимального збирання врожаю.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

I. Каниовский Ю.М., Ляшенко Е.И. Об одном содержательном примере существования функции Ляпунова для обобщенной схемы урны с шарами N цветов / Матем. методы принятия решений в условиях неопределенности.- Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1990.-с.52-55.

2. Ляшенко Е.И. Исследование устойчивости стохастической популяционной модели / Моделир. и исслед. устойч. физич. процессов. Тез. докл. научн. школы-семинара, К.- 1991. -с.54.

3. Ляшенко І.М., Ляшенко О.І. Дослідження одного класу моделей оптимального збирання врожаю / Дослідж. операцій.-К.-1993.-40.

4. Ляшенко Е.И. Об оптимальном управлении ростом биологических популяций / Моделир. и исслед. устойч. процессов. Тез. докл. научной конф. - К.-1992.-ч.I.-с.97-98.

5. Ляшенко О.І. Моделі оптимального збирання врожаю з опуклою вгору функцією швидкості росту популяції / Обчисл. та прикл. математика.-1993.-вип.76.

6. Ляшенко О.І. Стохастична /адаптивна/ задача оптимального збирання врожаю / Обчисл. та прикл. математика.-1993.-вип.76.

7. Ляшенко Е.И. Принцип усреднения для одной рекуррентной последовательности обобщенной схемы урны / Моделир. и исслед. устойчивости систем. Тез. докл. научной конф.-К.-1993.-ч.I. с.87.

Подписано к печати 19.10.93 Зак 2728 тир. 100
размножено ГВЦ Минстата Украины ООП