АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО ЧЕРВОНОГО ПРАПОРА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ГЛУШКО ВІКТОРІЯ МИКОЛАЇВНА

УМОВИ ЄДИНОСТІ ЕЛЕМЕНТА НАЙКРАЩОГО ОДНОСТОРОННЬОГО L_1-НАБЛИЖЕННЯ

01.01.01. - математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1993

Роботу виконано на кафедрі математичного аналізу Дніпропетровського державного університету

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор БАБЕНКО В.Ф.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник ПЕРЕВЕРЗЄВ С.В.
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник ПОЛЯКОВ Р.В.

Провідна установа - Одеський державний університет

Захист дисертації відбудеться "23" листопада 1993 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою:

252601 м.Київ 4, МСП, вул.Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту.

Автореферат розісланий "23" жовтня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Гусак Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія наближення - це напрям математичного аналізу, який бере початок з класичних робіт К.Вейєрштрасса і П.Л.Чебишова. У зв'язку з потребою математики та її застосувань теорія наближення інтенсивно розвивається працями багатьох математиків протягом декількох десятиріч.

До числа основних задач теорії наближення відносяться задачі характеризування та єдиності елементів найкращого наближення з тих чи інших апроксимуючих множин. Перші результати в цій проблематиці були одержані ще П.Л.Чебишовим, який знайшов критерій поліномів найкращого рівномірного наближення для функцій, неперервних на відрізку, і довів єдиність полінома найкращого наближення в $C[-1,1]$ для будь-якої функції $f \in C[-1,1]$.

Добре відомо, що єдиність полінома найкращого наближення в $L_p[-1,1]$ при $1<p<\infty$ забезпечується строгою опуклістю L_p-норми при $1<p<\infty$. У просторі $L_1[-1,1]$ єдиності алгебраїчного полінома найкращого наближення для функцій $f \in L_1[-1,1]$, взагалі кажучи, немає. Разом з тим, Д.Джексон довів єдиність полінома найкращого L_1-наближення для будь-якої неперервної на $[-1,1]$ функції. За останні десятиріччя, зокрема у зв'язку з впровадженням у теорію наближення такого апарату наближення як сплайни, особливо активним стало вивчення питань єдиності елементів найкращого наближення для більш загальних, ніж сукупність поліномів, апроксимуючих множин. У роботах М.Керролла, В.М.Порошенка, Н.К.Рахметова вивчалися питання єдиності елемента найкращого L_1-наближення (в тому числі і поліномів) для функцій, які мають одну або декілька точок розриву. Нез'ясованими залишаються багато питань, які пов'язані з єдиністю елемента найкращого одностороннього L_1-наближення.

Тому актуальною є тема цієї дисертації, в якій розглядаються задачі характеризування елемента найкращого одностороннього L_1-наближення та характеризування просторів єдиності елемента найкращого одностороннього L_1-наближення для функцій $f \in C^1[a,b]$, а також вивчаються питання єдиності елемента найкращого одностороннього L_1-наближення з чебишовського підпростору для функцій з розривною похідною.

Мета роботи. Знаходження критерію елемента найкращого одностороннього L_1-наближення для скалярних і векторнозначних функцій. Дослідження проблеми єдиності елемента найкращого одностороннього L_1-наближення з чебишовських просторів для вектор-функцій та для неперервних на відрізку функцій з розривними похідними. Характеризування просторів єдиності елемента найкращого L_1-наближення та елемента найкращого одностороннього L_1-наближення.

Методи дослідження. В роботі використані сучасні методи теорії наближення функцій, зокрема методи характеризування елемента найкращого наближення та методи дослідження питань єдиності елемента найкращого L_1-наближення.

Новизна результатів та їх наукова цінність. Основні результати дисертації є новими. Їх зміст полягає в наступному:

- доведені характеризаційні теореми для просторів єдиності елемента найкращого несиметричного L_1-наближення дійснозначних неперервних на відрізку функцій;

- знайдений критерій елемента найкращого одностороннього L_1-наближення для скалярних і векторнозначних функцій;

- доведені характеризаційні теореми для просторів єдиності елемента найкращого одностороннього L_1-наближення дійонозначних неперервно-диференційовних на відрізку функцій;

- знайдені достатні умови єдиності елемента найкращого одностороннього L_1-наближення для неперервних на відрізку функцій з розривною похідною у випадках, коли наближення здійснюється алгебраїчними поліномами та елементами чебишовського підпростору;

- знайдений односторонній ранг чебишовського підпростору для класу функцій, похідна яких має задану (скінченну) кількість точок розриву.

Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути використані для подальшого вивчення питань єдиності елемента найкращого наближення, а також при розв'язуванні задач теорії наближення та обчислювальної математики.

<u>Апробація роботи</u>. Результати дисертації доповідались на 6-й Всесоюзній Саратовській школі по теорії функцій та наближень (1992 р.), на Міжнародній конференції "Теорія наближення та задачі обчислювальної математики" (м.Дніпропетровськ, 1993 р.), на науковому семінарі відділу теорії наближення і комплексного аналізу Інституту математики АН України, на наукових семінарах і підсумкових конференціях Дніпропетровського державного університету.

<u>Публікації</u>. По темі дисертації опубліковано 4 роботи, список яких наведено в кінці автореферату.

<u>Структура і об'єм роботи</u>. Дисертація обсягом 114 сторінок машинопису. Складається із вступу, двох розділів та списку літератури, що містить 61 найменування.

ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі дисертації вивчаються питання единості елемента найкращого L_1-наближення для функцій, які задані на відрізку $I=[a,b]$.

Якщо $\alpha,\beta>0$ та $f_\pm(x)=\max\{\pm f(x),0\}$, то покладемо $\|f\|_{1;\alpha,\beta}=\|\alpha f_+ +\beta f_-\|_1$. Нехай $f\in L_1(I)$, $G\subset L_1(I)$. Величина

$$E(f,G)_{1;\alpha,\beta}=\inf\{\|f-u\|_{1;\alpha,\beta}:u\in G\} \quad (1)$$

називається найкращим (α,β)-наближенням функції f множиною G в метриці $L_1(I)$. При $\alpha=\beta=1$ одержуємо звичайне найкраще L_1-наближення функції f множиною G: $E(f,G)_1$. Функцію з G, яка реалізує $\inf$ в (1), називають елементом найкращого (α,β)-наближення функції f в метриці $L_1(I)$ (при $\alpha=\beta=1$ - елементом найкращого L_1-наближення f).

Нехай $G^\pm(f)=\{u\in G:\pm u(x)\le\pm f(x)$ для майже всіх $x\in I\}$. Тоді величину

$$E^\pm(f,G)_1=\inf\{\|f-u\|_1:u\in G^\pm(f)\} \quad (2)$$

називають найкращим L_1-наближенням знизу (+) або зверху (-) функції f множиною G, а функцію, яка реалізує $\inf$ в (2), - елементом найкращого одностороннього L_1-наближення f із G.

В.Ф.Бабенко довів, що спрямовуючи в (1) α до $+\infty$, одержуємо найкраще L_1-наближення зверху, а спрямовуючи

β до $+\infty$, - найкраще L_1-наближення знизу функції f.

Перший розділ дисертації складається з 4 параграфів.

У §1.1 доведені характеризаційні теореми для просторів єдиності елемента найкращого (α,β)-наближення в метриці $L_1(I)$.

Г. Штраусом в 1980 р. була знайдена необхідна і достатня умова того, що скінченномірний підпростір G є простором єдиності елемента найкращого L_1-наближення для неперервних на відрізку функцій. Доведена ним теорема дозволяє звузити клас функцій, для яких перевіряється єдиність елемента найкращого L_1-наближення з G. Згідно з твердженням теореми, для того щоб з'ясувати, чи буде G простором існування та єдиності елемента найкращого L_1-наближення для неперервних на I функцій, достатньо перевірити єдиність елемента найкращого L_1-наближення для тестових функцій з класу $H_G=\{h\in C(I): \exists g_h\in G \ |h(x)|=|g_h(x)|, \forall x\in I\}$.

У §1.1 теорема Г. Штрауса поширюється на випадок найкращого (α,β)-наближення в просторі $L_1(I)$.

Теорема 1.1. Нехай G - скінченномірний підпростір $C(I)$. Кожна функція $f\in C(I)$ має єдиний елемент найкращого (α,β)-наближення в G в метриці $L_1(I)$ тоді і лише тоді, коли кожна функція $h\in H_G$ має єдиний елемент найкращого (α,β)-наближення в G в метриці $L_1(I)$.

Основним результатом §1.1 є наступна теорема характеризування підпросторів єдиності елемента найкращого (α,β)-наближення в $L_1(I)$.

Нехай $e_1,\dots,e_n$ - довільний базис в G; $\omega(t)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\omega(e_i,t)$; $\widetilde{H}_G=\{h\in C(I): \exists g\in G \ |h(x)|=\omega(\rho(x,Z_g)), x\in I\}$, де $\rho(x,M)=\inf\limits_{y\in M}|x-y|, M\subset I$.

Теорема 1.3. Нехай G - скінченномірний підпростір $C(I)$. Кожна функція $f\in C(I)$ має єдиний елемент найкращого (α,β)-наближення в G в метриці $L_1(I)$ тоді і лише тоді, коли кожна функція $h\in \tilde{H}_G$ має єдиний елемент найкращого (α,β)-наближення в G в метриці $L_1(I)$.

У теоремі 1.3 в порівнянні з теоремою 1.1 зменшується різноманітність функцій, для яких треба перевіряти єдиність елемента найкращого (α,β)-наближення в G. Функції з $\widetilde{H}_G$ будуються одностайно.

У §1.2 розглядаються питання найкращого (α,β)-наближення і найкращого одностороннього L_1-наближення векторнозначних функцій та доводиться критерій елемента найкращого одностороннього L_1-наближення, який використовується при доведенні інших результатів дисертації, але є цікавим і сам по собі.

Для функцій $f: I\to\mathbb{R}$ він формулюється так.

Наслідок 1.2. Нехай G - скінченномірний підпростір $C(I)$. Для того, щоб функція $g\in G^{\pm}(f)$ була елементом найкращого одностороннього L_1-наближення функції $f\in L_1(I)$, достатньо й (у випадку, коли G містить константи) необхідно, щоб існувала функція $\Phi^{\pm}$ така, що

1) функція $\pm\Phi^{\pm}$ - незростаюча на I;

2) $\int\limits_I (f-u)\,d\Phi^{\pm}\le 0$ для будь-якого $u\in G^{\pm}(f)$;

3) $\int\limits_I (f-g)\,d\Phi^{\pm}=0$;

4) $\pm\int\limits_I u(x)\,dx+\int\limits_I u\,d\Phi^{\pm}=0$ для будь-якого $u\in G$.

У §1.3 доведені характеризаційні теореми для просторів єдиності елемента найкращого одностороннього L_1 наближення.

У випадку найкращого одностороннього L_1-наближення неперервних на відрізку функцій Г.Штраус довів характеризаційну теорему, в якій множиною тестових функцій є клас $U_G^{\pm}=\{u\in C(I): \exists g\in G \ u(x)=\pm|g(x)|, x\in I\}$ (U_G^{+} - для найкращого L_1-наближення знизу, U_G^{-} - для найкращого L_1-наближення зверху). У випадку, коли підпростір G містить константи, можна довести характеризаційну теорему, в якій множиною тестових функцій є клас $\widetilde{U}_G^{\pm}=\{u\in C(I): \exists g\in G \ u(x)=\pm\omega(\rho(x,Z_g)), x\in I\}$. Така характеризаційна теорема дозволяє зменшити різноманітність функцій, для яких треба перевіряти единість елемента найкращого одностороннього L_1-наближення.

Але питання единості елемента найкращого одностороннього L_1-наближення природно розглядати для неперервно-диференційовних на I функцій. У цьому випадку множина тестових функцій не була відома. Теорема I.13 вирішує цю проблему.

Покладемо $\widetilde{Z}_f=\{x\in I: f(x)=f'(x)=0$, коли $x\in(a,b)$, і $f(x)=0$, коли $x\in\{a,b\}\}$. Нехай $e_1,\ldots,e_n$ - довільний базис в $G\subset C^1(I)$; $\omega_1(t)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\omega(e_i',t)$. Через $[c_g,d_g]$ позначимо найменший відрізок, який містить множину $\widetilde{Z}_g$ $(g\in G)$, а через (a_g^i, b_g^i) - складові інтервали множини $[c_g,d_g]\setminus\widetilde{Z}_g$. Нехай $M_g=\widetilde{Z}_g\cup\left(\bigcup\limits_i\left\{\frac{a_g^i+b_g^i}{2}\right\}\right)$. Покладемо $\widetilde{H}_G^{\pm}=\{h\in C^1(I) \mid \pm h(x)\geqslant 0\ (x\in I)$ і $\exists g\in G\ (\widetilde{Z}_h=\widetilde{Z}_g); |h'(x)|=\omega_1(\rho(x,M_g))\ (x\in I)\}$; $P_G^{\pm}(f)$ - сукупність елементів найкращого одностороннього

L_1-наближення для функції f в G.

Основним результатом §1.3 є

Теорема 1.13. Нехай G - скінченномірний підпростір $C^1(I)$, який містить константи. Кожна функція $f \in C^1(I)$ має єдиний елемент найкращого одностороннього L_1-наближення $g \in P_G^{\pm}(f)$ тоді і лише тоді, коли кожна функція $h \in \widetilde{H}_G^{\pm}$ має єдиний елемент найкращого одностороннього L_1-наближення $q \in P_G^{\pm}(h)$.

У §1.4 наводяться застосування результатів §§1.1, 1.3. Показано, як одержані в цих параграфах теореми працюють при вивченні питань єдиності елемента найкращого (α,β)-наближення та елемента найкращого одностороннього наближення в $L_1(I)$. Ці теореми особливо зручні при доведенні неєдиності елемента найкращого L_1-наближення. Наводяться приклади підпросторів, які не будуть просторами єдиності елемента найкращого (α,β)-наближення та елемента найкращого одностороннього наближення в $L_1(I)$. Крім того, показано як, користуючись характеризаційними теоремами 1.3 та 1.13, можна одержати ряд вже відомих результатів.

У другому розділі вивчаються питання єдиності елемента найкращого одностороннього L_1-наближення для функцій з розривними похідними. Він складається з 4 параграфів. У §2.1 розглядається наступна задача. Нехай $X=\{x_i\}_{i=1}^{k}$, $-1<x_1<\ldots<x_k<1$. Знайти всі такі X, що для кожної функції $f \in C[-1,1] \cap C^1([-1,1] \setminus X)$ многочлен найкращого одностороннього L_1-наближення єдиний. Символами $P_{n+m}^{\pm}(\{\sigma_i\}_{i=1}^{m},\cdot)$ позначимо многочлен степеня $n+m$ з m фіксованими старшими коефіцієнтами $\{\sigma_i\}_{i=1}^{m}$, які найменш відхиляються від нуля в метриці $L_1(I)$.

Теорема 2.1. Нехай $f\in C[-1,1]\cap C^1([-1,1]\setminus X)$. Якщо для будь-якого $m\ (1\le m\le \min\{n,k\})$ і будь-якого набору $\{\sigma_i\}_{i=1}^m\ (\sigma_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,m},\ \sigma_1\ne 0)$ ніякі m точок розриву f' не можуть бути разом нулями $P_{n+m}^{\pm}(\{\sigma_i\}_{i=1}^m,\cdot)$, то поліном найкращого одностороннього наближення степеня n для функції f в $L_1[-1,1]$ єдиний. В противному разі єдиності, взагалі кажучи, немає.

У §2.2 вивчається питання єдиності елемента найкращого одностороннього L_1-наближення з чебишовського підпростору для неперервних на I функцій, похідні яких має розриви в k точках інтервалу (a,b).

Нехай V^+ - множина всіх неспадних, неперервних справа на I функцій. Якщо $\{u_i\}_{i=0}^n$ - чебишовська на I система функцій, то простір $\mathcal{M}_{n+1}=\{c=(c_0,c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid c_i=\int_I u_i(t)d\sigma(t),\ i=\overline{0,n},\ \sigma(t)\in V^+\}$ називають моментним простором відносно $\{u_i\}_{i=0}^n$.

Відомо (див. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.- М.: Наука, 1976.- 568 с.), що кожне $c\in\mathcal{M}_{n+1}$ може бути зображено у формі

$$c_i=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j u_i(t_j),\ i=\overline{0,n},\ \lambda_j>0,\ t_j\in I,\ j=\overline{1,p},\ p\le n+2. \quad (3)$$

Значення t_j, які входять до (3), називаються коренями зображення.

Індекс зображення - це кількість коренів зображення з умовою, що кінцеві точки I рахуються як $1/2$, а внутрішні точки I рахуються як 1.

Через $K(c;p)$ позначимо множину наборів коренів всіляких зображень моментної точки $c \in \mathcal{M}_{n+1}$ з індексом p.

Нехай $\{u_i\}_{i=0}^{n-1}$ - система неперервно-диференційовних на I функцій. Якщо простір $G_n = lin\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ містить константи, то можна вважати $u_0(t) \equiv 1$. Покладемо

$$v_0(t) = \begin{cases} 1, & u_0(t) \equiv 1, \\ u_0'(t), & u_0(t) \not\equiv 1, \end{cases}$$

$$v_i(t) = u_i'(t), \; i = \overline{1, n-1}.$$

Нехай $G_m' = lin\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, де m є n або $n-1$. Наприклад, $m = n-1$, якщо $u_0(t) \equiv 1$, $u_1(t) \equiv t$.

Чебишовську систему $\{u_i\}_{i=0}^{n-1}$ неперервно-диференційовних на I функцій називають диференційовною чебишовською на I системою функцій, якщо простори G_n і G_m' чебишовські.

Теорема 2.2. Нехай $f \in C(I) \cap C^1(I \setminus X)$, $X = \{x_i\}_{i=1}^{k}$, $x_i \in (a, b)$; $\{u_i\}_{i=0}^{n}$ - диференційовна чебишовська на I система функцій, $G = lin\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$; $\tilde{c} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)$, $\tilde{c}_i = \int_I u_i(t)dt$, $i = \overline{0, n}$.

Якщо $card\{X \cap t\} \le m-1$ для будь-якого m $(1 \le m \le \min\{n, k\})$ і будь-якого набору $t \in K(\tilde{c}, \frac{n+m}{2})$, то елемент найкращого одностороннього L_1-наближення для f в G единий.

Якщо для деякого m $(1 \le m \le \min\{k, n\})$ знайдеться набір $t \in K(\tilde{c}, \frac{n+m}{2})$ такий, що $card\{X \cap t\} \ge m$, і система $\{u_i\}_{i=0}^{n}$ може бути розширена до диференційовної чебишовської на I системи з $n+m+1$ функцій $\{u_i\}_{i=0}^{n+m}$, единості, взагалі кажучи, немає.

У §2.2 показано, що теорема 2.1 є окремим випадком теореми 2.2.

У §2.3 доведений аналог теореми 2.2 для векторнозначних функцій $f: I \to \mathbb{R}^m$.

У §2.4 одержана оцінка зверху вимірності многогранника поліномів найкращого одностороннього L_1-наближення для неперервних на I функцій f з розривною похідною.

Як показано в §2.2, у випадку, коли функція f' має розриви на (a, b), для функції f можуть існувати декілька поліномів найкращого одностороннього L_1-наближення. Тоді ці поліноми утворюють опуклу множину, яку називають многогранником найкращого одностороннього L_1-наближення для функції f.

Вимірністю многогранника називають максимальне число k, при якому існують такі $k+1$ поліномів $g_1, \dots, g_{k+1}$ з цього многогранника, що поліноми $g_1 - g_{k+1}, \dots, g_k - g_{k+1}$ лінійно незалежні. Максимальну вимірність многогранника найкращого одностороннього L_1-наближення в чебишовському підпросторі для деякого класу функцій називають чебишовським одностороннім рангом підпростору відносно цього класу.

В §2.4 розглядається питання про односторонній ранг диференційовної чебишовської системи для класу функцій, похідна яких має задану (скінченну) кількість точок розриву.

Теорема 2.5. Нехай Φ_k - множина в просторі $L_1(I)$, яка складається з неперервних функцій, похідна яких має не більш ніж k точок розриву на (a, b); $\{u_i\}_{i=0}^{n-1}$ - диференційовна чебишовська на I система функцій. Тоді чебишовський односторонній ранг r підпростору $G = lin\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ відносно класу Φ_k не перевищує $\min\{k, [n/2]\}$.

Якщо система $\{u_i\}_{i=0}^{n-1}$ може бути розширена до диференгйовьої чебишовської на I системи з $n+1$ функцій $\{u_i\}_{i=0}^{n}$ то $r=\min\{k,[n/2]\}$.

На закінчення висловлюю щиру вдячність науковому керівнику Владиславу Федоровичу Бабенку за постановку задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

Основні положення дисертації

опубліковані в наступних роботах:

1. Бабенко В.Ф., Глушко В.Н. О единственности полинома наилучшего одностороннего приближения в метрике пространства L_1 // Теория приближения функций и суммирования рядов.- Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1989.-С.4-8.
2. Глушко В.Н. О единственности полиномов наилучшего одностороннего приближения для функций с разрывными производными// Приближение функций и суммирование рядов.- Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1991.-С.14-19.
3. Глушко В.Н. О единственности элемента наилучшего одностороннего L_1-приближения из чебышевского подпространства // Оптимизация методов приближения.-Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.-С.35-41.
4. Глушко В.Н. Наилучшее одностороннее L_1-приближение вектор-функций элементами чебышевского подпространства // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики: Тези доповідей Міжнародної конференції, присвяченої 75-річчю Дніпропетровського державного університету, Дніпропетровськ, 26-28 травня 1993 р.-1993.-С.53.

Підписано до друку 20.07.93. Формат 60х84/16. Папір друкарський. Друк плоский. Умовн.друк.арк. 0,82. Обл.-вид.арк. 0,81.
Тираж 100 прим. Замовлення № 282
Безкоштовно.

Видавництво ДДУ, 320625, МСП м.Дніпропетровськ 10,
пр.Гагаріна, 72.
Ротапринт ДДУ, 320050, м.Дніпропетровськ, вул.Казакова, 4 б.

ційової чебишевської на I системи з n+1 функцій $\{u_i\}_{i=0}^{n}$, то $r = \min\{k,[n/2]\}$.

За [illegible] висловлюю щиру вдячність науковому керівнику [illegible] Бабенку [illegible] за постановку задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

Основні положення дисертації

опубліковані в наступних роботах

1. Бабенко В.Ф., Глушко В.Н. О единственности элемента наилучшего одностороннего приближения в метрике пространства L_1 // Теория приближения функций и суммирование рядов.- Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 19[illegible].-С.4-8.
2. Глушко В.Н. О единственности полиномов наилучшего одностороннего приближения для функций с разрывами производных // Приближение функций и суммирование рядов.- Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 199[illegible].-С.13-19.
3. Глушко В.Н. О единственности элемента наилучшего одностороннего [illegible] матики АН Украины, 1992 [illegible]
4. Глушко В.Н. Наилучшие односторонние L_1-приближения [illegible] // [illegible] конференції, присвяченої [illegible], 26-28 [illegible] 199[illegible].-1993.-С.33.