

Київський університет
імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Мельник Катерина Николаївна

УДК 519.64

ОПТИМАЛЬНІ ЗА ТОЧНІСТЮ АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕННЯ
ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ

01.01.07 - обчислювальна математика

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993



00810725 (N)

AB 28.388

- 2 -

Робота виконана в Київському університеті імені Тараса Шевченка та Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Задирака В. К.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Слоньовський Р. В.

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Хіміч О. М.

Провідна організація: Інститут математики АН України

Захист відбудеться 25 Листопада 1993 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої ученої ради Д 068.18.16 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ-127, проспект Академіка Глушкова, 6, факультет кібернетики, ауд. 40.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету.

Автореферат розіслано 25 Жовтня 1993 р.

Учений секретар спеціалізованої ученої ради

А. В. Кузьмін

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. Із зростанням складності задач, що висувалися практично, підвищується необхідність подальшого розвитку таких розділів обчислювальної математики як створення оптимальних методів розв'язку стандартних задач обчислювальної та прикладної математики, порівняльний аналіз точності та ефективності обчислювальних алгоритмів, що використовуються, вдосконалення теорії похибок обчислень. Ця проблема стимулює пошук нових чисельних методів та способів їх реалізації.

Розв'язування задач цифрової обробки сигналів, розпізнавання образів, моделювання оптичних систем, синтезованих голограм та систем автоматичного регулювання, статистичної обробки експериментальних даних, крайових задач для рівнянь ϵ частинних похідних та ряду інших класів задач пов'язано з відновленням функцій та обчисленням інтегралів від цих функцій, які у багатьох практично важливих випадках є швидкоосцилюючими. У зв'язку з цим побудова оптимальних за точністю і оптимальних за порядком точності квадратурних та кубатурних формул, аналіз їх точності та ефективності є актуальними задачами, що мають широке практичне застосування.

Різні підходи до розв'язку таких задач відображені в роботах багатьох вітчизняних та зарубіжних авторів: Бахвалова М.С., Вожняковського Х., Ейнарсона Б., Жилейкіна Я.М., Задраки В.К., Іванова В.В., Ісраїлова М.І., Коллатца Л., Колмогорова А.М., Корнійчука М.П., Крилова В.І., Ніколаєвої М.В., Нікольського С.М., Раачова В.Л., Трауба Дж., Файлона Л. та багатьох інших.

МЕТА РОБОТИ.

Метою дисертаційної роботи є:

- конструктивно розв'язати задачу оптимального за точністю відновлення функції двох змінних для деяких класів функцій, що задовільняють умові Ліпшиця, а також побудувати у цих класах оптимальні за точністю кубатурні формули;
- побудувати оптимальні за порядком точності (з константов, що не перевищує двійки) квадратурні та кубатурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій для ряду інтерполяційних класів Ліпшиця при різних способах задання апріорної інформації;

- узагальнити одержані результати на випадок сіток, що дозволяють зменшити об'єм апіорної інформації, необхідної для розв'язку поставлених задач;
- одержати оцінки похибок методу всіх побудованих квадратурних і кубатурних формул;
- розробити відповідне програмне забезпечення.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ. У даній роботі дослідження проводились з використанням методу граничних функцій, який полягає в побудові найкращого алгоритму для найбільш несприятливої функції класу. Цей напрямок відображений в роботах багатьох вітчизняних та зарубіжних авторів: М.С.Бахвалова, Х.Вожняковського, В.К.Задираки, В.В.Іванова, А.Г.Сухарева, Дж.Ф.Трауба та ін. У першій главі квадратурні та кубатурні формули наближеного інтегрування швидкоосцилюючих функцій розроблені на основі методів нев'язки та квазірозв'язків. У другій та третій главах оптимальні за точністю оптимальні за порядком точності (з констант, що не перевищує двійки) кубатурні формули побудовані з використанням результатів розв'язування задач оптимального за точністю відновлення функцій.

НАУКОВА НОВИЗНА. В дисертації конструктивно розв'язана задача оптимального за точністю відновлення функцій двох змінних і оптимального за точністю їх інтегрування для ряду інтерполяційних класів Ліпшиця. Для всіх розглянутих класів побудовані оптимальні за порядком точності (з констант, що не перевищує двійки) квадратурні та кубатурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій при різних способах задання апіорної інформації у випадках, коли застосування вже відомих формул інтегрування таких функцій не є доцільним, а в багатьох випадках і не можливе у зв'язку з великою фактичною похибкою обчислень. Одержані оцінки похибок методу всіх побудованих квадратурних та кубатурних формул. Для ряду інтерполяційних класів Ліпшиця здійснено вибір сіток, який дозволяє зменшити об'єм апіорної інформації, що необхідна для розв'язку поставлених задач, із збереженням точності побудованих формул.

ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ. На основі запропонованих і обґрунтованих в дисертації алгоритмів розроблені відповідні програми розв'язування задач та програми обчислення їх основних характеристик (точності, часу, пам'яті), які входять до пакету програм цифрової обробки сигналів (ЦОС-1), розробленого у відділі Оптимізації чисельних методів Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова АН України.

АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ. Основні результати роботи доповідались та обговорювались на Республіканських школах-семінарах "Питання оптимізації обчислень" (м. Київ, 1986 р.; м. Одеса, 1989 р.), конференціях молодих вчених інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова АН України (м. Київ, 1987, 1988), засіданнях семінару "Оптимізація обчислень" наукової ради АН України по проблемі "Кібернетика" (1986-1990), семінару кафедри чисельних методів математичної фізики Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка (1990 р., 1993 р.), Республіканської конференції "Екстремальні задачі теорії наближень та їх застосування" (м. Київ, 1990 р.), в Інституті математики АН України (1993 р.).

ПУБЛІКАЦІЇ. По результатам дисертації опубліковано 7 робіт.

СТРУКТУРА ДИСЕРТАЦІЇ. Дисертація складається з вступу, трьох глав, висновків, бібліографії з 115 найменувань та додатку.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ.

У вступі дається огляд літератури по тематиці дисертаційної роботи, обґрунтовується актуальність вибраної теми, наводяться основні постановки задач і коротко викладається зміст дисертації по главам.

Розв'язування багатьох класів задач прикладної математики пов'язано з обчисленням інтегралів вигляду

$$I^n(f) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi_1(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi_n(x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1)$$

де $\varphi_k(x_k)$, $k=\overline{1, n}$ - відомі інтегровні функції, а $f(x)$ належить деякому заданому класу функцій F , $X=(x_1, \dots, x_n) \in \Pi_n$, $\Pi_n = \{(a_k \leq x_k \leq b_k, k=\overline{1, n})\}$ за припущенням, що інформація про $f(X)$ задається не більше ніж N її значеннями у вузлових точках. Важливим частинним випадком поставленої задачі є задача оцінки інтегралів вигляду:

$$I_1^n(f) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2)$$

$$I_2^n(f) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \cdot \sin \omega_1 x_1 \dots \sin \omega_n x_n dx_1 \dots dx_n \quad (3)$$

$$I_3^n(f) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \cdot \cos \omega_1 x_1 \dots \cos \omega_n x_n dx_1 \dots dx_n \quad (4)$$

де ω_k - довільні дійсні числа, $|\omega_k| \geq 2\pi/(b_k - a_k)$, $k=\overline{1, n}$ при $n=1$ і $n=2$. Дана дисертаційна робота присвячена побудові оптимальних за точністю і оптимальних за порядком точності (з константов, що не перевищує двійки) квадратурних і кубатурних формул обчислення інтегралів (1)-(4) для ряду інтерполяційних класів Липшиця.

Нехай функція f належить деякому класу F , а M - деяка множина алгоритмів інтегрування. Точність $v(f, A)$ інтегрування деякої функції f алгоритмом A на класі вибирається як критерій, за яким можна оцінювати якість алгоритму. Для побудови квадратурних і кубатурних формул в роботі використовується метод граничних функцій, який полягає в побудові найкращого алгоритму для найгіршої функції класу. Як найгірша функція з класу F приймається функція, що реалізує $\sup_{f \in F} v(f, A)$ для даного алгоритму. Оптимальним на множині алгоритмів інтегрування M називається алгоритм A , який мінімізує функцію

$$v(A) = \sup_{f \in F} v(f, A) \quad (5)$$

по всім алгоритмам з M . При побудові методів наближеного ін-

тегрування, як правило, розглядаються досить широкі класи функцій. В даній роботі скрізь припускається, що функція $f(X) \in F$ задана фіксованою таблицею своїх значень $f_i, i=1, N$ в N фіксованих точках $(X_1)_{i=1}^N$ з її області визначення. Такий спосіб задання вихідної інформації веде до значного звуження відповідного класу F . Розгляд нового, більш вузького класу F_N , що називається інтерполяційним, дозволяє максимально використовувати наявну інформацію про функцію, покращити якість запропонованих квадратурних та кубатурних формул обчислення $\Gamma^n(f)$ і наближає нас до реальної ситуації, що виникає при розв'язуванні конкретної задачі.

На практиці, як правило, замість точних вхідних даних

$(f_i)_{i=1}^N$ відомі їх наближені значення $(\tilde{f}_i)_{i=1}^N$. У зв'язку з цим в роботі розглянутий також випадок наближеного задання вхідних

даних, коли значення $(f_i)_{i=1}^N$ беруться з області $|\Gamma_i - \tilde{f}_i| \leq \epsilon_i, i=1, N, \Gamma(X) \in F_N, \epsilon \in (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ - деякий фіксований вектор. В дисертації розглянуті такі класи функцій:

- $C_{1, L, N}^1$ - клас визначених на відрізку $[a, b]$ неперервних функцій $f(x)$, що мають обмежені константою L перші похідні і приймають в фіксованих вузлах довільної сітки x_1, \dots, x_N відповідно фіксовані значення $f(x_1)=f_1, \dots, f(x_N)=f_N$;

- $C_{1, L, N, \epsilon}^1$ - клас визначених на відрізку $[a, b]$ неперервних функцій $f(x)$, що мають обмежені константою L перші похідні і приймають у фіксованих вузлах довільної сітки x_1, \dots, x_N значення з інтервалів $[f_i - \epsilon_i, f_i + \epsilon_i], \epsilon_i \geq 0, i=1, N, \epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ - деякий фіксований вектор;

- $C_{1, L, M, N}^2$ - клас визначених на $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ функція двох змінних, що задані фіксованими значеннями $f_{i,j}$ у вузлах $(x_{1,i}; x_{2,j})$ довільної сітки на $\Omega, i=1, N, j=1, M$, що задовільняють умові:

$$\sup_{x_1, x_2} \max(|f'_{x_1}|, |f'_{x_2}|) \leq L; \quad (6)$$

- $C_{1, L, N}^2$ - клас функцій, які визначені в області $\Pi_2, \Pi_2 = \{X = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, i=1, 2\}$, задовільняють умові Ліпшиця з константою L .

$$|f(X) - f(Y)| \leq L \|X - Y\| = L \cdot \max_{i=1,2} |x_i - y_i| \quad (7)$$

і приймають у фіксованих вузлах рівномірної сітки X_1, \dots, X_N відповідно фіксовані значення $f(X_1) = f_1, \dots, f(X_N) = f_N$;

- $C_{2, L_1, L_2, N}^2$ - клас функцій, які визначені в області π_2 ,

$\pi_2 = (X = (x_1, x_2): 0 \leq x_i \leq 1, i=1,2)$, задовольняють умові Ліпшиця з константами L_1 і L_2 по кожній змінній:

$$|f(\bar{x}_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)| \leq L_1 |\bar{x}_1 - x_1|, |f(x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, x_2)| \leq L_2 |\bar{x}_2 - x_2| \quad (8)$$

і приймають у фіксованих вузлах X_1, \dots, X_N відповідно фіксовані значення $f(X_1) = f_1, \dots, f(X_N) = f_N$;

- $C_{2, L, L, N}^2$ - клас функцій, які визначені в області π_2 ,

$\pi_2 = (X = (x_1, x_2): 0 \leq x_i \leq 1, i=1,2)$, задовольняють умові Ліпшиця з константою L по обох змінних:

$$|f(\bar{x}_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)| \leq L |\bar{x}_1 - x_1|, |f(x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, x_2)| \leq L |\bar{x}_2 - x_2| \quad (9)$$

і приймають у фіксованих вузлах X_1, \dots, X_N відповідно фіксовані значення $f(X_1) = f_1, \dots, f(X_N) = f_N$.

Припускається, що дані класи функцій не пусті.

Розглянемо таку характеристику

$$\delta(F_N) = \inf_{A \in M} \sup_{f \in F_N} \gamma(f, A) \quad (10)$$

де

$$\gamma(f, A) = |I^n(f) - \tau(A, f)|, \quad (11)$$

$\tau(A, f)$ - результат застосування алгоритму A до функції f , M - всі алгоритми інтегрування, що використовують інформацію, яка полягає у визначенні класу функцій F_N . Алгоритм, на якому досягається $\delta(F_N)$, якщо він існує, називається оптимальним за точність для даного класу.

Якщо для квадратурної (кубатурної) формули A^0

$$\gamma(f, A^0) \leq \delta(F_N) + \eta, \quad \eta \geq 0, \quad (12)$$

то A^0 називається оптимальною квадратурною (кубатурною) формулою на класі F_N з точністю до η . Якщо $\eta = o(\delta(F_N))$ або $\eta = o(\delta(F_N))$, то A називається відповідно асимптотично оптималь-

нов або оптимальнов за порядком точності квадратурнов (куба-
турнов) формулов.

Відомо, що для розглянутих класів функцій як
оптимальне за точністю значення інтегралу $I^n(f)$ приймається
величина

$$I^*(F_N) = 1/2(I^+(F_N) + I^-(F_N)), \quad (13)$$

де

$$I^+(F_N) = \sup_{f \in F_N} I^n(f), \quad I^-(F_N) = \inf_{f \in F_N} I^n(f) \quad (14)$$

- верхня $I^+(F_N)$ і нижня $I^-(F_N)$ границі множини можливих зна-
чень інтегралів виду (1)-(4) в області інтегрування на функ-
ціях класу F_N . Тоді

$$B(F_N) = 1/2(I^+(F_N) - I^-(F_N)). \quad (15)$$

У главі 1 даної роботи побудовані оптимальні за
порядком точності (з константов, що не перевищує двійки)
квадратурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих
функцій в класах $C_{1,L,N}^1$ і $C_{1,L,N,\epsilon}^1$ та оптимальні за порядком
точності (з константов, що не перевищує двійки) кубатурні
формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій в
класі $C_{1,L,N \times M}^2$.

В роботах В.К. Задираки, С.С. Мельникової, С. Касенова
побудовані оптимальні за точністю квадратурні формули
обчислення інтегралів вигляду (3),(4) при $n=1$ за припущенням,
що значення L і ϵ , які безпосередньо використовуються в цих
формулах, задачі точно. Однак на практиці в більшості випад-
ках відомі не самі L і ϵ , а лише деякі їх оцінки, тобто кіль-
кісна апріорна інформація, яка бере участь у визначенні класу,
є неточнов і завищенов. Для обчислення зазначених інтегралів у
випадку неточно заданої апріорної інформації про задачу в даній
роботі запропоновані квадратурні формули, побудовані на
основі методів нев'язки та квазірозв'язків.

В § 1 приводиться постановка задачі і викладені методи
нев'язки та квазірозв'язків стосовно до задач інтегрування.
При побудові квадратурних і кубатурних формул використані
результати робіт А.І. Березовського, В.А. Жолудєва, В.В. Іванова.

В квадратурній формулі, побудованій за методом
квазірозв'язків, підінтегральна функція $f(x)$ апроксимується

функцією, яка є розв'язком такої задачі:

$$\min_{f \in F_N} \max_{i=1, \dots, N} \epsilon_i \quad (16)$$

Метод квазірозв'язків полягає в знаходженні функції, що найменше ухиляється від заданого набору точок (x_i, \tilde{f}_i) , $i=1, \dots, N$. Відомо, що розв'язком задачі (16) для класу $C_{1, L, N, \epsilon}^1$ є лінійний сплайн $S(x, L)$, у якого максимальний ухил від заданих точок (x_i, \tilde{f}_i) , $i=1, \dots, N$ мінімальний:

$$S(x, L) = \tilde{f}_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i=1, \dots, N-1. \quad (17)$$

$$\tilde{f}_i = (\tilde{f}_i^+ + \tilde{f}_i^-) / 2, \quad \tilde{f}_i^\pm = \pm \max_{1 \leq j \leq N} (\pm(\tilde{f}_j \mp L |x_j - x_i|)), \quad i=1, \dots, N. \quad (18)$$

Часто кількісна апріорна інформація, яка бере участь у визначенні класу F , задається у вигляді обмеження на деякий функціонал $\Phi(f)$. Для класів $C_{1, L, N}^1$ і $C_{1, L, N, \epsilon}^1$ таким функціоналом $\Phi(f)$ є рівномірна норма похідної. В квадратурній формулі, побудованій за методом нев'язки, підінтегральна функція $f(x)$ апроксимується функцією, яка є розв'язком такої задачі:

$$\min_{f \in F_N} \Phi(f). \quad (19)$$

Розв'язком задачі (19) є лінійний сплайн $S(x, M)$, який визначається за формулами (17)-(18) з урахуванням заміни константи L на константу M , де

$$M = \max_{1 \leq i \leq N} (0, \max_{j > i} (|\tilde{f}_j - \tilde{f}_i| - \epsilon_j - \epsilon_i) / (x_j - x_i)) \quad (20)$$

Для класу $C_{1, L, N}^1$ розв'язки задач (16) і (19) співпадають і лінійний сплайн $S(x, L)$ є ламаном, що сполучає точки (x_i, \tilde{f}_i) , $i=1, \dots, N$:

$$S(x, L) = \tilde{f}_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} (\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i=1, \dots, N-1. \quad (21)$$

Квадратурні формули, побудовані за методами квазірозв'язків та нев'язки для інтегралу

$$I^1(f) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx, \quad (22)$$

де $\varphi(x)$ - відома інтегровна функція, мають відповідно вигляд:

$$\bar{R}(\varphi, S) = \int_a^b S(x, L) \cdot \varphi(x) dx, \quad (23)$$

$$\bar{R}(\varphi, S) = \int_a^b S(x, M) \cdot \varphi(x) dx, \quad (24)$$

формули (23), (24) є оптимальними за порядком точності з константов, що не перевищує двійки, навіть якщо порівнювати з випадком точно заданих L і ϵ . Однак основним призначенням цих квадратурних формул є наближене обчислення інтегралів вигляду (22) у випадку неточно заданої апріорної інформації, оскільки пошук розв'язків за методами нев'язки або квазірозв'язків направлений саме на уточнення апріорної інформації про задачу.

В § 2 для інтегралів (16), (17) за методами нев'язки та квазірозв'язків побудовані квадратурні формули, які мають відповідно вигляд:

$$R_1(\omega, S) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\hat{f}'_i}{\omega^2} (\sin \omega x_{i+1} - \sin \omega x_i) \right) - \frac{1}{\omega} \left(\hat{f}'_N \cdot \cos \omega x_N - \hat{f}'_1 \cdot \cos \omega x_1 \right), \quad (25)$$

$$R_2(\omega, S) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\hat{f}'_i}{\omega^2} (\cos \omega x_{i+1} - \cos \omega x_i) \right) + \frac{1}{\omega} \left(\hat{f}'_N \cdot \sin \omega x_N - \hat{f}'_1 \cdot \sin \omega x_1 \right), \quad (26)$$

де $\hat{f}'_i = (\hat{f}_{i+1} - \hat{f}_i) / (x_{i+1} - x_i)$ (\hat{f}_i , $i=1, N$ визначається за формулою (18)). Ці формули є оптимальними за порядком точності з константов, що не перевищує двійки і застосовні практично для будь-якої осцилюючої підінтегральної функції в класі $C^1_{1, L, N}$.

В § 2 одержані також оцінки зверху похибок квадратурних формул (23), (24). При побудові цих оцінок розглянуті два принципово різних випадки - випадок слабкої осциляції і випадок сильної осциляції підінтегральної функції. Припускається, що слабка осциляція має місце при виконанні умови У1: $\left[\left[\frac{1}{n} \omega_1(b-a) \right] + 1 \right]$ нулів функцій $\sin nx(\cos wx)$ входять в число вузлів $x_i, i=1, N$, а сильна осциляція - при виконанні умови У2: вузли $x_i, i=1, N$ входять в число нулів функції $\sin wx(\cos wx)$, тобто $N \ll \left[\left[\frac{1}{n} \omega_1(b-a) \right] + 1 \right]$. Аналогічні оцінки одержані в § 3 для формул (25), (26) в класі $C_{1, L, N, n}^1$.

В § 4 розглянутий більш складний для досліджень двомірний випадок. Нехай $f(x_1, x_2) \in C_{1, L, N \times M}^2$ і відоме не точне значення L , а лише деяка його оцінка. Для обчислення інтегралів виду (3), (4) при $n=2$ в роботі запропонований підхід, який полягає в заміні підінтегральної функції $f(x_1, x_2) \in C_{1, L, N \times M}^2$ лінійним сплайном. Побудовані нові кубатурні формули, в яких значення L не використовується. Вони є оптимальними за порядком точності (з константов, що не перевищує двійки) і придатні для практично будь-якої осциляції підінтегральної функції. Питання побудови оптимальних за точністю і оптимальних за порядком точності кубатурних формул в інтерполяційних класах Липшиця для двомірного випадку за припущенням, що відоме точне значення константи Липшиця, розглянуті для класів $C_{1, L, N}^2, C_{2, L, L, N}^2$ і $C_{2, L_1, L_2, N}^2$.

В главі 2 досліджуються класи $C_{2, L_1, L_2, N}^2$ і $C_{2, L, L, N}^2$. В § 5 наведені постановки задач, розглянутих у даній главі. Очевидно, що задача оптимального за точністю інтегрування на класі F_N пов'язана з задачею оптимального за точністю відновлення $f^*(X)$ в точці X функцій з F_N . Відомо, що

$$f^*(X) = \frac{1}{2} (A_{F_N}^+(X) + A_{F_N}^-(X)) \quad (27)$$

де $A_{F_N}^+(X)$ і $A_{F_N}^-(X)$ - відповідно мажоранта і міноранта класу F_N .

При цьому похибка відновлення $f(X)$ на класі F_N $\delta(F_N, X)$ в точці X буде мати вигляд:

$$\delta(F_N, X) = \frac{1}{2} (A_{F_N}^+(X) - A_{F_N}^-(X)) \quad (28)$$

Тоді оптимальна за точністю кубатурна формула обчислення інтегралу

$$I_1^2(f) = \iint_{\Pi_2} f(X) dX \quad (29)$$

має вигляд

$$I_1^*(F_N) = \iint_{\Pi_2} f^*(X) dX \quad (30)$$

і

$$\bar{b}(F_N) = \iint_{\Pi_2} \bar{b}(F_N, X) dX \quad (31)$$

Таким чином, для конструктивного розв'язку задач (27)-(28) і (30)-(31), а також для побудови кубатурних формул обчислення інтегралів (3), (4) при $n=2$ необхідно вивчити вигляд і деякі властивості мажоранти і міноранти класів, що досліджуються. Ці дослідження проведені в §6.

Очевидно, що якщо існує функція $g_1(X) = \max_{f \in F_N} f(X)$ ($g_2(X) = \min_{f \in F_N} f(X)$) з класу F_N , то вона буде співпадати з мажорантою (мінорантою) класу, що досліджується.

Відомо, що

$$A_{F_N}^+(X) = \sup_{f \in F_N} f(X) = \min_{i=1, N} (f_i + L \cdot \|X - X_i\|), \quad (32)$$

$$A_{F_N}^-(X) = \inf_{f \in F_N} f(X) = \max_{i=1, N} (f_i - L \cdot \|X - X_i\|), \quad (33)$$

де $X=(x_1, x_2)$, $D = \Pi_2$. У випадку $F = C_{2, L_1, L_2, N}^2$

$$\|X\| = \|X\|_2 = |x_1| + \frac{L_2}{L_1} |x_2|. \quad (34)$$

а у випадку $F_N = C_{2, L, L, N}^2$

$$\|X\| = \|X\|_2 = |x_1| + |x_2|. \quad (35)$$

У §6 показано, що функції $A_{F_N}^+(X)$ і $A_{F_N}^-(X)$, що визначаються за

формулами (32) і (33), дійсно задовольняють визначенню мажоранти і міноранти класу F_N для класів $C_{2,L,L,N}^2$ і $C_{2,L_1,L_2,N}^1$.

Проведені дослідження, в результаті яких виділені області лінійності мажорант і мінорант класів $C_{2,L,L,N}^2$ і $C_{2,L_1,L_2,N}^1$.

В теоремі 6.1 і наслідках з неї одержано представлення граничних функцій класів $C_{2,L,L,N}^2$ і $C_{2,L_1,L_2,N}^1$ в їх областях лінійності, що дозволило конструктивно розв'язати задачу оптимального за точністю відновлення функцій з цих класів.

В § 7 розглянута задача побудови оптимальних кубатурних формул обчислення інтегралу $I^2(f)$ в класах $C_{2,L_1,L_2,N}^1$ і $C_{2,L,L,N}^2$.

В теоремі 7.1 доведено, що у випадку, коли $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, не міняють знаку при $x_1, x_2 \in [0,1]$, оптимальні за точністю кубатурні формули обчислення інтегралів виду $I^2(f)$ мають вигляд:

$$I^*(F_N) = \frac{1}{2} \int \int_{\Pi_2} (A_{F_N}^+(X) + A_{F_N}^-(X)) \cdot \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) dX \quad (36)$$

причому

$$\delta(F_N) = \frac{1}{2} \int \int_{\Pi_2} (A_{F_N}^+(X) - A_{F_N}^-(X)) \cdot |\varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2)| dX \quad (37)$$

Більш складним для досліджень є випадок, коли добуток $\varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2)$ не знакопостійний в Π_2 . У цьому випадку для розв'язування практичних задач доцільно застосовувати близькі до оптимальних методи розв'язування поставленої задачі. У наслідку 7.1.1 з теореми 7.1 доведено, що у випадку, коли $\varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2)$ міняють знак при $x_1, x_2 \in [0,1]$, похибка формули (36) не більше як у два рази перевищує оптимальну. Таким чином, в § 7 побудована кубатурна формула (36) обчислення інтегралу виду $I^2(f)$, яка є оптимальною за точністю у випадку, коли добуток $\varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2)$ знакопостійний в Π_2 , і оптимальною за порядком точності з константов, що не перевищує двійки у випадку, коли $\varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2)$ міняє знак при $x_1, x_2 \in [0,1]$. Крім того, цей підхід дозволяє одночасно будувати оцінку оптимальної похибки $\delta(F_N)$:

$$\delta(F_N) \leq \frac{1}{2} \int_{\Pi_2} |A_{FN}^+(X) - A_{FN}^-(X)| \cdot |\varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2)| dx \quad (38)$$

В § 8 виконується вибір сітки в класі $C_{2,L,L,N}^2$, який дозволяє суттєво зменшити об'єм апріорної інформації, що необхідна для конструктивного розв'язування задач, поставлених в главі 2. Важливим обставиною при роботі з інтерполяційними класами функцій є те, що в обчислювальній практиці зустрічається велике число задач з функціями досить складної структури. Для обчислення кожної функціональної характеристики (наприклад, значення функції) може бути необхідною постановка коштовного фізичного або чисельного експерименту. Тому при побудові оптимальних за точністю і оптимальних за порядком точності кубатурних формул обчислення інтегралів $I_1^2(f) - I_3^2(f)$ в класі $C_{2,L,L,N}$ виникає необхідність розгляду в Π_2 оптимальних в деякому розумінні сіток, що дозволяє обчислювати значення функції саме у вузлах такої сітки. Для реалізації підходу, викладеного в § 6,7 побудована нова сітка, кількість вузлів якої менше кількості вузлів сітки, що розглянута в попередніх параграфах.

В § 9 побудовані оптимальні за точністю кубатурні формули обчислення інтегралу $I_1^2(f)$, а в § 10 - оптимальні за порядком точності (з константов, що не перевищує двійки) кубатурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій виду $I_2^2(f)$, $I_3^2(f)$ в класах $C_{2,L_1,L_2,N}^2$ і $C_{2,L,L,N}^2$.

Ці кубатурні формули одержані у зручному для їх, безпосередньої реалізації на ЕОМ вигляді. Одночасно з обчисленням наближених значень інтегралів $I_1^2(f) - I_2^2(f)$ побудовані оцінки оптимальних похибок $\delta(F_N)$ і $\delta(F_N)$ відповідно.

У главі 3, як і в попередній, розглядається задача побудови оптимальних за точністю і оптимальних за порядком точності (з константов, що не перевищує двійки) кубатурних формул обчислення інтегралів вигляду (1)-(4) при $n=2$ в класі $C_{1,L,N}^2$.

Необхідність дослідження цих задач в окремій главі зумовлена тим, що області лінійності граничних функцій класу $C_{1,L,N}^2$ принципово відрізняються від областей лінійності граничних функцій класів $C_{2,L,L,N}^2$ і $C_{2,L_1,L_2,N}^2$ тому питання вибору

сіток і конструктивного розв'язку задач оптимального за точністю відновлення функції в класі $C_{1,L,N}^2$ потребують спеціального розгляду.

В §11 наведені постановки задач, яким присвячена глава 3 і описаний метод їх розв'язку. В §11 досліджується деякий допоміжний клас функцій $C_{1,L,N}^2$. Для класу $C_{1,L,N}^2$ виділені області лінійності, граничних функцій класу і одержаний їх конструктивний вигляд в цих областях. В §12 досліджується вигляд і деякі властивості мажоранти $A_{C_{1,L,N}^2}^+(X)$ і міноранти $A_{C_{1,L,N}^2}^-(X)$ класу $C_{1,L,N}^2$ з урахуванням результатів, що одержані для допоміжного класу $C_{1,L,N}^2$. Теорема 12.1 і наслідки з неї дозволяють виділити області лінійності $A_{C_{1,L,N}^2}^+(X)$ і $A_{C_{1,L,N}^2}^-(X)$ визначити вигляд цих функцій в цих областях лінійності і, як наслідок, розв'язати задачу оптимального за точністю відновлення $f^*(X)$ в точці $X \in p_2$ функцій з $C_{1,L,N}^2$. Крім того, доведено, що вибір сітки в класі $C_{1,L,N}^2$ можна здійснити таким чином, щоб зменшити об'єм апріорної інформації, що необхідна для застосування підходу, викладеного в §11.

Питання побудови оптимальних за точністю і оптимальних за порядком точності кубатурних формул обчислення $I^2(f)$ розглянуті в §13. Для класу $C_{1,L,N}^2$ одержані результати, які аналогічні результатам для класів $C_{2,L,L,N}^2$ і $C_{2,L_1,L_2,N}^2$.

Для зменшення об'єму необхідних обчислень використується перехід до нової системи координат, а саме здійснюється поворот початкової системи координат на кут $\alpha = -45^\circ$.

В §14 показано, що оптимальна за точністю кубатурна формула для інтегралу $I_1^2(f)$ в класі $C_{1,L,N}^2$ може бути представлена у вигляді, що аналогічний вигляду оптимальних за точністю кубатурних формул в класах $C_{2,L_1,L_2,N}^2$ і $C_{2,L,L,N}^2$ для $I_1^2(f)$. В §15 одержані оптимальні за порядком точності (з константов, що не перевищує двійки) кубатурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій виду $I_2^2(f)$, $I_3^2(f)$ для випадку, коли $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $|\omega| \geq 2\pi$. При повороті початкової системи координат на кут $\alpha = -45^\circ$ задача обчислення інтегралів $I_2^2(f)$, $I_3^2(f)$ в класі $C_{1,L,N}^2$ зводиться до задачі обчислення двох більш простих інтегралів, різниця і сума яких дорівнюють

$I_2^2(f)$ і $I_3^2(f)$ відповідно, що дає можливість особливо ефективно розв'язувати ті практичні задачі, де необхідно обчислювати інтеграли як вигляду $I_2^2(f)$, так і $I_3^2(f)$.

Основні результати дисертаційної роботи перелічені у висновках.

У додатку наведено призначення, короткий опис розроблених програм і результати чисельного експерименту.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ.

В дисертаційній роботі отримані такі основні результати:

1. Конструктивно розв'язана задача оптимального за точністю відновлення функції двох змінних для ряду інтерполяційних класів Ліпшиця $(f(x_1, x_2) \in C_{1, L, N}^2 \cdot C_{2, L_1, L_2, N}^2 \cdot C_{2, L, L, N}^2)$.

2. Побудовані оптимальні за точністю кубатурні формули інтегрування функцій з класів $C_{1, L, N}^2 \cdot C_{2, L_1, L_2, N}^2$ і $C_{2, L, L, N}^2$.

3. Побудовані оптимальні за порядком точності (з константою, що не перевищує двійки) квадратурні і кубатурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій для ряду інтерполяційних класів Ліпшиця при різних способах задання апріорної інформації $(f(x) \in C_{1, L, N}^1 \cdot C_{1, L, N, \epsilon}^1; f(x_1, x_2) \in C_{1, L, N \times N}^2 \cdot C_{1, L, N}^2 \cdot C_{2, L_1, L_2, N}^2 \cdot C_{2, L, L, N}^2)$.

4. Для класів $C_{1, L, N}^2 \cdot C_{2, L, L, N}^2$ здійснено вибір сіток, який дозволяє зменшити об'єм апріорної інформації, що необхідна для розв'язку поставлених задач, зберігаючи при цьому точність побудованих формул.

5. Одержані оцінки похибок методу всіх побудованих квадратурних і кубатурних формул.

6. На основі запропонованих алгоритмів розроблене відповідне програмне забезпечення.

Основні положення дисертації опубліковані у таких роботах:

1. Мельник Е. Н. К оптимальному по точности вычислению интегралов от быстроосциллирующих функций в классе Липшица // Пакеты прикладных программ и численные методы: Сб. науч. тр. - Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, 1988. - С. 76-79.

2. Мельник Е. Н. Оптимизация квадратурных формул вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций при неточно заданной априорной информации // Материалы конф молодых ученых и специалистов Ин-та кибернетики им. В. М. Глушкова. - Киев, 1988. - С 93-97. - Деп. в ВИНТИ 21.02.1989 г., N1120-B89.
3. Мельник Е. Н., Остапенко О. С. Оптимальные по точности и близкие к ним кубатурные формулы вычисления интегралов для некоторых классов функций двух переменных // Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова. - Киев, 1990. - 28с. - Деп. в ВИНТИ 03.08.90, N 4179-B90.
4. Мельник Е. Н., Остапенко О. С. Оптимальные кубатурные формулы вычисления некоторых интегралов для одного класса функций двух переменных // Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова. - Киев, 1990. - 29с. - Деп. в ВИНТИ 03.08.90, N 4480-B90.
5. Мельник Е. Н., Остапенко О. С. Об оптимальном по точности восстановлении функций некоторых классов и его применении для построения кубатурных формул // Экстремальные задачи теории приближения и их приложения. Тез. докл. республ. науч. конф. (Киев, 29-31 мая 1990 г.). - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С. 92.
6. Мельник Е. Н., Остапенко О. С. О выборе сетки для оптимальных кубатурных формул вычисления интегралов в классе $C_{2, L, L, N}^2$ // Использование математических методов и ЭВМ в системах управления и проектирования: Сб. науч. тр. - Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, 1991. - С. 135-139.
7. Мельник Е. Н. Об оптимальном интегрировании быстроосциллирующих функций из интерполяционных классов Липшица // Киев, 1993. - 11с. - Деп. в ГНТБ Украины 07.06.93, N 1116 - Ук93.

E. Melnik

Подписано к печати 15.10.93 Зак. 2701 тир. 100
размножено ГИД Минстата Украины ООП

464053

AB 28.388