МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

СТАШКЕВИЧ Володимир Іванович

МАТРИЧНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-МАТРИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ"ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-матиматичних наук

Київ - 1993

Робота виконана на кафедрі теоретичної і математичної радіофізики радіофізичного факультету Київського університету імені Тараса Шевченка

Науковий керівник - кандидат фізико-математичних наук, доцент О.Ф.Калайда

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор П.З.Луговий

кандидат фізико-математичних наук, доцент Б.П.Довгий

Провідна організація - Інститут математики АН України

Захист дисертації відбудеться 25 жовтня 1993 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої Ради К 068.18.11 при Київському університеті імені Тараса Шевченка

Адреса; 252127, м.Київ-127, проспект академіка Глушкова, 6, КУ, механіко-математичний факультет

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці КУ ім.Тараса Шевченка

Автореферат розіслано 25 вересня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради
доктор фіз.-мат.наук
професор В.І.Сушанський

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Створення та вдосконалення передових технологій, розвиток різних областей сучасної техніки вимагають вивчення різноманітних процесів і явищ, які можна описати за допомогою рівнянь математичної фізики. Теоретичне розв"язання відповідних крайових задач має велике значення через надання можливості уникнути проведення багатьох експериментів, що дорого коштують, та відшукання найбільш раціональних шляхів вирішення конструкторських чи інженерних проблем. Тому опрацювання і розвиток методів розв"язання задач математичної фізики завжди є актуальним завданням. У більшості випадків згадані задачі доводиться розв"язувати наближено за допомогою аналітичних чисельно-аналітичних і чисельних методів. Нині наближені методи розв"язання задач математичної фізики досить глибоко досліджені в роботах А.М.Самойленка, О.М.Гузя, Г.М.Положого, О.А.Самарського, Г.І.Марчука, І.І.Ляшка, М.О.Перестюка, Д.І.Мартинюка, М.Й.Ронта, І.М.Ляшенка, П.З.Лугового, М.Молчанова, В.Л.Макарова Б.П.Довгого та ряду інших вчених. У більшій частині написаних робіт досліджуються стаціонарні задачі. Значно менше робіт /причому Монографій/ присвячено нестаціонарним задачам.

Нестаціонарні задачі математичної фізики при розв"язанні їх чисельно-аналітичними і чисельними методами зводяться до явних або неявних рекурентних обчислювальних процесів. Через це відповідні різницеві методи при їх побудові вимагають дослідження на стійкість, тому що лише стійкі методи - практично придатні. Явні різницеві схеми простіші з обчислювальної точки зору, одначе мають жорстке обмеження на співвідношення кроків мережі. Неявні методи такого обмеження здебільшого не мають, але більш складні, через що на кожному кроці слід розв"язувати відповідні алгебраїчні системи.

Звичайні схеми невисокого порядку точності в даному разі стають малоефективними через значний об"єм обчислень та зростаючий при цьому вплив похибок заокруглення. Отже, виникає настійна потреба у побудові різницевих схем високого порядку точності. Підтвердженням практичної придатності такої ідеї став ряд наукових праць О.Ф.Калайди, серед яких вагоме місце посідають матричні алгоритми чисельного диференціювання, що надали можливість процес побудови різницевих схем довільного порядку автоматизувати на ЕОМ.

Мета роботи. Метою дисертаційної роботи є побудова та дослідження різницевих схем високого порядку для загальних нестаціонарних задач математичної фізики /зокрема, для рівнянь параболічного та гіперболічного типів/ за допомогою матричних алгоритмів чисельного диференціювання. Комплекс питань, пов"язаний з даним дослідженням, містить в собі таке:

1. Побудова і обгрунтування різницевих методів високого порядку /в роботі вони називаються матричними методами/ розв"язання одновимірних крайових задач для рівняння теплопровідності, хвильового рівняння та загальних нестаціонарних задач математичної фізики;

2. побудова і обгрунтування методів прямих /в роботі вони називаються диференціально-матричними методами/ високого порядку для розв"язання тих же /згаданих вище/ задач;

3. створення пакету прикладних програм, які реалізують алгоритми побудованих методів.

Наукова новизна отриманих в роботі результатів полягає в тому, що побудовані якісно нові матричні і диференціально-матричні методи високого порядку точності розв"язання поставлених одновимірних /на просторовій змінній/ задач /в основному, лінійних/, доведені теореми про існування і єдиність наближеного розв"язку, стійкість та збіжність методів та отримані апріорні оцінки похибок методів.

Достовірність отриманих результатів підтверджується дослідженнями практичної збіжності чисельних результатів при розв"язанні конкретних задач на ЕОМ, а також узгодженням отриманих розв"язків з відомими точними значеннями.

Практичне значення роботи. Одержані в дисертації теоретичні результати і опрацьовані алгоритми мають цінність в тому, що можуть бути використані для чисельного розв"язання як лінійних, так і нелінійних поставлених вище задач математичної фізики.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на нараді-семінарі зав.каф.вищої математики вищих с.-г. навчальних закладів СРСР /м.Київ, 1984р./, на Всесоюзній конференції, "Методи і засоби розв"язання крайових задач" /м.Казань, 1984 р./, на X науково-методичній міжвузівській конференції /м.Хмельницький, 1983 р./, на Республіканській конференції "Досвід застосування композитних матеріалів в с.-г. машинобудуванні" /м.Київ, 1985 р./, на семінарах кафедри теоретичної і математичної радіофізики КУ ім.Тараса Шевченка.

Публікації. На матеріалах дисертації вийшли в світ 12 друкованих робіт.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, трьох глав, висновку, додатку і списку вживаної літератури з 74 найменувань. Обсяг дисертації налічує 184 сторінки друкрвіного тексту, 9 рисунків. Додаток налічує 31 сторінку.

Зміст роботи

У вступі обгрунтована актуальність теми і наукова новизна отриманих результатів, поставлена мета роботи та основні задачі, наведено короткий огляд літератури з питань, пов"язаних з наближенням розв"язанням рівнянь параболічного і гіперболічного типів та загальних нестаціонарних задач математичної фізики, коротко викладено суть методів чисельного диференціювання та інтегрування.

У першій главі виконується побудова і дослідження матричних і диференціально-матричних методів наближеного розв"язання крайових задач для лінійних і квазілінійних параболічних рівнянь.

Розглянемо крайові задачі для лінійного одновимірного /на просторовій змінній/ рівняння теплопровідності

$$u'_t=\alpha^2 u''_{xx}+f(x,t),\ x\in D=[a,b],\ t\geq t_0, \qquad /1/$$

$$u\big|_{t=t_0}=\varphi(x), \qquad /2/$$

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_1 u+\sigma_2 u'_x)\big|_{x=a}&=\nu_1(t),\\ (\tau_1 u+\tau_2 u'_x)\big|_{x=b}&=\nu_2(t),\end{aligned}\right\}\ t\geq t_0, \qquad /3/$$

де $\alpha, \sigma_i, \tau_i - const,\ i=1,2;\ f, \varphi, \nu_1, \nu_2$ – задані досить гладкі функції. Матричні одноблокові методи. Для наближеного розв"язання поставлених задач застосовані матричні колокаційні формули чисельного диференціювання нульового рангу /тобто формули з простими вузлами/. Для цього в області $Д_{xt} = Д \times [t_0, t_m]$ вводиться прямокутна мережа вузлів $/x_i, t_j/$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$ і шуканий розв"язок задач /I/-/3/ апроксимується многочленом типу Лагранжа

$$u(x,t) \approx P_{nm}(x,t) = \hat{\Omega}(x) U \check{\Omega}(t), \quad /4/$$

де
$$\hat{\Omega}(x) = (\hat{\omega}_0(x) \ldots \hat{\omega}_n(x)),$$
$$\check{\Omega}(t) = (\check{\omega}_0(t) \ldots \check{\omega}_m(t))$$

- нормальні матриці базисних функцій, побудовані на заданих системах елементарних базисних функцій та відповідних системах вузлів $x_i, i=\overline{0,n}$; $t_j, j=\overline{0,m}$; $U=(u(x_i,t_j))$ - матриця значень розв"язку $u(x,t)$ у вузлах (x_i,t_j), $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$.

За рахунок /4/ наближення задачі /I/ - /3/ набирають такого змісту

$$\hat{\Omega}(x)(\tilde{U}\check{\Theta}^T - \alpha^2\hat{\Theta}^T\tilde{U})\check{\Omega}^T(t) = f(x,t), \quad /5/$$

$$\hat{\Omega}(x)\tilde{U}_{*0} = \varphi(x), \quad /6/$$

$$(\sigma_1 \tilde{U}_{0*} + \sigma_2 \hat{\Theta}_{0*}\tilde{U})\check{\Omega}^T(t) = \nu_1(t),$$
$$(\tau_1 \tilde{U}_{n*} + \tau_2 \hat{\Theta}_{n*}\tilde{U})\check{\Omega}^T(t) = \nu_2(t), \quad /7/$$

де $\tilde{U} = (\tilde{u}(x_i,t_j))$ - матриця значень наближеного розв"язку $\tilde{u}(x,t)$ у вузлах мережі, $\hat{\Theta}$, $\check{\Theta}$ - диференційовані матриці відповідно на змінних x і t

$$\hat{\Theta} = (\hat{\Omega}'(x_i)), i=\overline{0,n}; \quad \check{\Theta} = (\check{\Omega}'(t_i)), i=\overline{0,m};$$

$\tilde{U}_{*j}$ - j - а колонка, $\tilde{U}_{i*}$, $\hat{\Theta}_{i*}$ — i -ті рядки матриць $\tilde{U}$, $\hat{\Theta}$. Для відшукання матриці $\tilde{U}$ найбільш доцільно зафіксувати змінні X і t певним чином у вузлах мережі, а саму матрицю поділити на клітини

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} U_{oo} & \overset{\circ}{U}_{o*} \\ \overset{\vee}{U}_{*o} & \hat{U} \\ U_{no} & \overset{\circ}{U}_{n*} \end{pmatrix}.$$

Це дає змогу систему /5/ - /7/ перетворити в одне матричне рівняння

$$\hat{U}\hat{\Gamma} - \alpha^2 \hat{\Pi} \hat{U} = \hat{R}, \qquad /8/$$

де матриці $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Pi}$ і $\hat{R}$ обчислюються на підставі вхідної інформації задачі /I/ - /3/. Рівняння /8/ трансформується у векторне

$$K\vec{V} = \vec{g}, \qquad /9/$$

де $K = /-\alpha^2 \hat{\Pi}/ \otimes E_m + E_{n-1} \otimes \hat{\Gamma}^T, \qquad /I0/$

$\vec{V} = /\hat{U}_{1*} \dots \hat{U}_{n-1,*}/. \ \vec{g} = /\hat{R}_{1*} \dots \hat{R}_{n-1,*}/$

/$\otimes$ - символ кронекерівського добутку двох матриць/. Розв"язавши рівняння /9/, знайдено на підставі /I0/ матрицю $\hat{U}$, після чого - $\tilde{U}$ і наближений розв"язок $\bar{u}/x,t/$ задач /I/ - /3/.

Багатоблокові/сплайнові/ матричні методи.

У деяких випадках застосування цих методів раціональне, бо одноблокові матричні методи мають ряд істотних недоліків, зокрема,

I. розміри матриць $\hat{\Theta}$ і $\hat{\Theta}^2$ різко зростають на великих відтинках зміни X;

2. модулі елементів матриць $\hat{\Theta}$ і $\hat{\Theta}^2$ прямують до ∞, а це сильно впливає на похибки заокруглення при відшуканні наближеного розв"язку;

3. втрата точності методу, якщо функції $u(x,t)$ і $f(x,t)$ - кусково-гладкі на змінній X.

Розглядаються сплайнові методи без умов спряження і з умовами спряження. Для їх побудови область Д розбиваємо на відтинки. Розв"язок задачі /I/-/3/ шукається у вигляді

$$u(x,t) \approx \tilde{u}(x,t) = \hat{\Omega}_k(x) V_k \check{\Omega}^T(t), \qquad /11/$$
$$x \in D_k,\ k = \overline{1,r},\ t \in [t_0, t_m].$$

Зазначимо, що умови спряження розглядаються у формі рівностей

$$u(a_k+0) - u(a_k-0) = 0,$$
$$u'_x(a_k+0) - u'_x(a_k-0) = \eta_k(t),\ k = \overline{1,r-1}. \qquad /12/$$

Не повторюючи громіздких досліджень, які зустрічаються на даному шляху, скажемо, що вдалося побудувати матричне рівняння типу /8/, перетворити його у векторне і знайти наближений розв"язок. задач /1/-/3/.

Дослідження методів.

Доведено такі теореми.

Теорема I. Для единості ррзв"язання рівняння /8/ необхідно і досить, щоб матриці $/ -\alpha^2 \hat{\Pi} /$ і $\hat{\Gamma}$ не мали однакових власних чисел.

На змінній t рівняння /8/ можна перетворити у рекурентний процес

$$\hat{U}_k \hat{\Gamma} - \alpha^2 \hat{\Pi} \hat{U}_k = \hat{R}_k. \qquad /13/$$

Теорема 2. Для стійкості рекурентного процесу /13/ необхідно і досить, щоб власні числа матриці K^{-1} В за модулем були менші за одиницю /кратні/ і не перевищували її /прості/.

Теорема 3. За достатньої гладкості вільних членів задач /1/-/3/ стійкі сплайнові методи без умов спряження і достатньої кускової гладкості вказаних вільних членів ті ж методи з умовами спряження вбігаються.

Швидкість збіжності має порядок $O / \bar{h}^{\underline{n}-1} + \ell^m /$.
$\bar{h}$ - максимальний крок мережі вузлів на змінній X, $\underline{n} = \min_k n_k$.
n_k+ I - кількість візлів на відтинку Дк.

Підкреслимо, для матричних одноблокових методів їх збіжність, взагалі кажучи, можлива лише за умови аналітичності вільних членів задач /1/-/3/ та рівномірної обмеженості усіх частинних похідних шуканого розв"язку. Наприкінці наведено чисельний експеримент і обговорено його результати.

Диференціально-матричні методи належать до методів прямих з використанням багатоточкових формул чисельного диференціювання високого порядку точності.

Одноблокові методи шукають наближений розв"язок задач /1/-/3/ у вигляді

$$\tilde{u}(x,t) = \hat{\Omega}(x)\vec{u}(t),\ x \in \mathcal{D},\ t \in [t_0, T], \quad /14/$$

де $\vec{u}(t) = (u_0(t) \ldots u_n(t))^T$, $u_j(t) = u(x_j, t)$, $j = \overline{0,n}$

– шуканий вектор значень точного розв"язку $u(x,t)$ на прямих $X = X_j$. Це дає змогу на "внутрішніх" прямих одержати задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\vec{\hat{U}}' = \alpha^2 \hat{\Pi} \vec{\hat{U}} + \vec{F}(t), \quad /15/$$

$$\vec{\hat{U}}(t_0) = \vec{\hat{U}}_0 = (\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n))^T, \quad /16/$$

де $\vec{\hat{U}} = \vec{\hat{U}}(t) = (\tilde{u}_1(t) \ldots \tilde{u}_{n-1}(t))^T$, а матриця $\hat{\Pi}$ і вектор $\vec{F}$ обчислюються на підставі вхідної інформації задач /1/ - /3/.

Похибка апроксимації задачі /1/-/3/ при цьому має величину порядку $O/h^{n-1}/$, де h – максимальний крок мережі вузлів змінної X.

Багатоблокові методи мають сенс з причин, які наводилися вище. При цьому апроксимація шуканого розв"язку тих же задач на блоках набуває вигляду

$$\tilde{u}_k(x,t) = \hat{\Omega}_k(x)\vec{u}_k(t),\ k = \overline{1,r}, \quad /17/$$
$$x \in \mathcal{D}_k,\ t \in [t_0, T).$$

Для методів без умов спряження і з умовами спряження вдалося побудувати задачу Коші, аналогічну задачі /I5/-/I6/. Для квазілінійних рівнянь

$$u'_t = \alpha^2 u''_{xx} + f(x, t, u, u'_x) \qquad /I7/$$

рівняння /I5/ перейде в таке

$$\dot{\vec{\hat{U}}} = \alpha^2 G \hat{U} + \vec{F}(t, \vec{\hat{U}}), \qquad /I8/$$

де матриця G і функція $\vec{F}(t, \vec{\hat{U}})$ можуть бути знайдені на підставі вхідних даних.

Для розв"язання лінійних задач /I5/, /I6/ або задач /I8/,/I6/ пропонуються матричний метод чисельного інтегрування Калайди і метод інтегральних перетворень Лапласа.

Дослідження методів. Існування і єдиність розв"язку випливає з задачіКоші.

Теорема 4. Для стійкості диференціально-матричних методів необхідно і досить, щоб дійсна частина власних чисел матриць-коеффіцієнтів рівняння /I5/ була недодатньою.

Теорема 5. Стійкі багатоблокові диференціальн - матричні методи збіжні.

Для одноблокових методів цього, взагалі кажучи, може і не бути.

Наприкінці наведено чисельний експеримент і обговорено його результати.

У другій главі виконується побудова і дослідження матричних і диференціально-матричних методів наближеного розв"язання крайових задач для лінійних і квазілінійних гіперболічних рівнянь.

Розглянемо крайові задачі для лінійного одновимірного /на просторовій змінній/ хвильового рівнянн

$$u''_{tt}+\beta u'_t+\gamma u=\alpha^2 u''_{xx}+\alpha_1 u'_x+f(x,t), \qquad /19/$$
$$x\in D,\ t\geq t_0,$$
$$u|_{t=t_0}=\varphi(x), \quad u'_t|_{t=t_0}=\psi(x),\ x\in D, \qquad /20/$$
$$(\varepsilon_1 u+\varepsilon_2 u'_x)|_{x=a}=\gamma_1(t), \quad t\geq t_0, \qquad /21/$$
$$(\tau_1 u+\tau_2 u'_x)|_{x=b}=\gamma_2(t),$$

де $\alpha, \alpha_1, \beta, \gamma, \varepsilon_i, \tau_i$ - const, i = I,2; f, φ, ψ - задані достатньо гладкі або кусково-гладкі функції. Йдучи тим же шляхом, що і в першій главі, у пошуках наближеного розв"язку у випадках побудови одноблокових і багатоблокових /без умов спряження і з умовами спряження/ задачі /I9/-/2I/ вдається звести до матричного рівняння, алалогічного рівнянню /8/, а саме

$$\hat{U}\overset{*}{A}-\overset{*}{B}\hat{U}=R, \qquad /22/$$

яке від рівняння /8/ відрізняється лише конструктивно. Підходи до його розв"язання та відшукання наближеного розв"язку $\tilde{u}(x,t)$ лишаються ті ж самі.

Існування та єдиність наближного розв"язку диктується теоремою I. Аналогічно теоремі 2, але конструктивно інакше розв"язане питання стійкості методів. Проаналізований ще один підхід до питання стійкості, а саме

Твердження. Багатоблокові матричні методи за достатньо малого кроку h на змінній X стають стійкими.

Це, взагалі кажучи, для одноблокових методів невірно.

Теорема 3 теж може без особливих ускладнень перенесена на задачі /I9/-/2I/.

Наприкінці наведені чисельні експерименти і обговорено їх результати.

Диференціально-матричні одноблокові методи перетворюють задачі /I9/- /2I/ у задачі Коші для відповідних систем диференціальних рівнянь

$$\vec{\hat{V}}'' + \beta\vec{\hat{V}}' + (\gamma E - \vec{B})\vec{\hat{V}} = \vec{R}(t),$$

$$\vec{\hat{V}}(t_0) = \vec{\hat{V}}_0 = (\varphi_1 \dots \varphi_{n-1})^T, \qquad /23/$$

$$\vec{\hat{V}}'(t_0) = \vec{\hat{V}}_0' = (\psi_1 \dots \psi_{n-1})^T, \qquad /24/$$

де коефіцієнти рівняння /23/ обчислюються на підставі вхідної інформації задач /I9/-/2I/.

Багатоблокові диференціально-матричні методи перетворюють поставлені крайові задачі Коші, аналогічні /23/,/24/. Такі задачі теж можна розв"язувати з використанням матричного методу чисельного інтегрування Калайди та інтегрального перетворення Лапласа, відшукавши для цього корені характеристичного рівняння

$$\det(Ep^2 + \beta p E + (\gamma E - \Pi)) = 0. \qquad /25/$$

Стійкість розв"язків відповідних задач Коші визначається саме характеристичними числами цього рівняння.

Як показали наші дослідження, у випадку $\beta = 0$ розв"язки задач Коші стійкі щодо початкових збурень, а також щодо стало діючих збурень.

У випадку $\beta > 0$ і першої крайової задачі розв"язки відповідних задач Коші асимптотично стійкі щодо початкових даних і щодо стало діючих збурень.

Для решти крайових задач необхідно у багатоблокових методах кількість блоків, кількість і розташування вузлів на кожнім з них вибирати так, щоб власні числа матриці /-П/ були дійсні і невід"ємні, тобто, щоб ця матриця відбивала властивості власних чисел відповідної задачі Штурма-Ліувілля для оператора $\left(-\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right)$.
Сказану думку можна поширити і на нелінійні задачі Коші.

Теорема 5 і висновок - актуальні для викладених тут проблем.

У третій главі виконується побудова і дослідження матричних і диференціально-матричних методів наближеного розв"язання крайових задач для загальних рівнянь параболічного і гіперболічного типів.

Розглянемо спочатку задачі

$$u_t' = A(x,t)u_{xx}'' + B(x,t)u_x' + C(x,t)u + f(x,t), \; x \in (a,b), \; t > t_0, \qquad /26/$$

$$u|_{t=t_0} = f(x), \; x \in D = [a,b], \qquad /27/$$

$$(\sigma_1(t)u + \sigma_2(t)u_x')|_{x=a} = \nu_1(t), \qquad /28/$$

$$(\tau_1(t)u + \tau_2(t)u_x')|_{x=b} = \nu_2(t),$$

для рівнянь параболічного типу, де A,B,C, $f, f, \sigma_i, \tau_i, \nu_i, i=1,2$ - достатньо гладкі функції в області Д х $[t_0, T]$.

Матричні одноблокові методи зводять задачі /26/-/28/ до досить складного матричного рівняння

$$\hat{U}\hat{\Gamma} - (\mathring{\hat{S}}_1 \hat{U}_{*1} \dots \mathring{S}_m \hat{U}_{*m}) = \mathring{\hat{F}}. \qquad /29/$$

Розв"язуючи у цій главі задачу нестаціонарного нагрівання, ми вказали на оригінальний метод його розгортання у векторне

$$K\vec{v} = \vec{g}, \qquad /30/$$

де матриця K і вектор $\vec{g}$ принципово відмінні від поданих у рівнянні /9/.

Матричні багатоблокові методи без умов спряження і з умовами спряження також зводять задачі /26/-/28/ до рівняння виду /29/ з конструктивно іншими елементами. У цьому разі перехід від рівняння виду /29/ до рівняння виду /30/ значно ускладнений і нами знайдений.

Розглянемо крайові задачі для рівнянь гіперболічного типу

$$u''_t + \beta(x,t)u'_t = A(x,t)u''_{xx} + B(x,t)u'_x + C(x,t)u + \qquad /31/$$
$$+ f(x,t),\ x \in D = (a, b),\ t > t_0,$$
$$u|_{t=t_0} = \varphi(x),\ u'_t|_{t=t_0} = \psi(x),\ x \in D, \qquad /32/$$
$$(b_1(t)u + b_2(t)u'_x)|_{x=a} = \gamma_1(t), \quad t > t_0, \qquad /33/$$
$$(\bar{b}_1(t)u + \bar{b}_2(t)u'_x)|_{x=b} = \gamma_2(t),$$

де A,B,C, $\beta, f, \varphi, b_i, \bar{b}_i, \gamma_i, i =$ I,2, - такі ж, як і в задачах /26/-/28/.

Матричні одноблокові і багатоблокові методи без умов спряження і з умовами спряження різними шляхами зводять задачі /3I/-/33/ до одного матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} \mathring{U}_{1*} \Gamma_1 \\ \mathring{U}_{n-1,*} \Gamma_{n-1} \end{pmatrix} - (\mathring{S}_2 \mathring{U}_{*2} \dots \mathring{S}_m \mathring{U}_{*m}) = \overset{*}{F},$$

яке можна перетворити до рівнянн у формі /30/.

Доведені такі теореми.

Теорема 6. За достатньо густої мережі вузлів $t_j,\ j = \overline{0,m}$ наближні разв"язки матричних рівнень /29/ і /34/ і, отже, відповідних крайових задач існують і єдині.

Теорема 7. Для стійкості матричних методів розв"язання задач /26/-/28/ необхідно і досить, щоб прості власні числа матриць $K_s^{-I}\beta$ за модулем не перевищували одиниці, а крайні були менші за неї.

Теорема 9. Стійкі матричні багатоблокові методи розв"язання задач /26/-/28/ і /3I/-/33/ є збіжні.

Щодо одноблокових методів мають місце висновки, наведені в двох перших главах.

Диференціально-матричні одноблокові і багатоблокові методи розв"язання задач /26/-/28/ і /3I/-/33/ перетворюють ці задачі у відповідні задачі Коші, а саме, у першому випадку

$$\vec{U}' = \hat{S}(t)\vec{U} + \vec{F}(t), \qquad /35/$$

$$\vec{U}(t_0) = \vec{U}_0 = (\varphi_1 \dots \varphi_{n-1})^T, \qquad /36/$$

у другому випадку

$$\vec{U}'' + \beta(t)\vec{U}' = \hat{S}(t)\vec{U} + \vec{\hat{F}}(t), \qquad /37/$$

$$\vec{U}(t_0) = \vec{U}_0 = (\varphi_1 \dots \varphi_{n-1})^T,$$
$$\vec{U}'(t_0) = \vec{U}_0' = (\psi_1 \dots \psi_{n-1})^T. \qquad /38/$$

Доведені такі теореми.

Теорема I0. Якщо коефіцієнти і вільні члени крайових задач /26/-/28/ і /3I/-/33/ є неперервні, то розв"язки задач Коші /35/, /36/ і /37/, /38/ існують і єдині.

Проблеми стійкості побудованих методів розв"язується аналогічно тому, як це зроблено для відповідних задач у попередніх главах. Визначимо на підставі рівнянь /35/ або /37/ матрицю

$$G = \frac{1}{2}\left(\hat{S}(t) + \hat{S}^T(t)\right). \qquad /39/$$

Теорема II. Якщо власні числа матриці /39/ від"ємні, то розв"язки відповідних задач Коші асимптотично стійкі.

Теорема I2. Стійкі диференціально-матричні сплайнові методи збігаються.

У випадку задач /26/-/28/ і/3I/-/33/ швидкість збіжності методів має порядок $O/h^{k-1}/$. Щодо збіжності одноблокових методів висновки, зроблені у попередніх главах залишаються актуальними і тут.

Для підтвердження наукової цінності запропонованих методів разом з вченими Інституту електродинаміки АН України розвязана задача контролю і прогнозування нестаціонарного нагрівання стрижнів обмотки статора турбогенераторів при змінному навантаженні [I2]. Математичною моделлю задачі є мішана одновимірна крайова задача для рівняння теплопровідності із змінними коефіцієнтами.

Результати, отримані на підставі проведеного чисельного експерименту, застосовані на практиці.

У додатку подані тексти основних фортран-процедур.

Основні висновки.

1. У дисертації виконана побудова, проведено обгрунтування і дослідження багаточкових матричних і диференціально-матричних методів розв"язання одновимірних крайових задач для рівнянь теплопровідності і хвильового, а також загальних нестаціонарних задач математичної фізики.

2. Знайдено умови існування і єдиності наближеного розв"язку, умови стійкості методів, асимптотичні оцінки похибки наближеного розв"язку.

3. Опрацьовані фортран-програми методів і проведені необхідні чисельні експерименти.

4. На підставі запропонованих обчислювальних схем розв"язана задача контролю і прогнозування нестаціонарного нагрівання стрижнів обмотки статора турбогенераторів при змінному навантаженні.

Публікації, покладені в основу дисертації

1. Драганов Б.Х., Калайда О.Ф., Сташкевич В.І. Метод визначення температурного поля під тваринницьким приміщенням //Вісник с.-г. науки.-1987.- № 8.-С.-64-67.

2. Калайда А.Ф., Сташкевич В.И. Алгоритмы преобразования обобщенных матричных линейных алгебраических уравнений в векторные //Киев. ун-т - Киев, 1985.- 6 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 15.10.85, № 2544- Ук.

3. Калайда А.Ф., Сташкевич В.И. К вопросу численного дифференцирования функций скалярного и векторного аргументов // Совещание-семинар зав.каф.высш.мат. высших с.-х. учебных заведений страны. Метод.реком.- К., 1984.- С.45.

4. Калайда А.Ф., Сташкевич В.И. Матричные методы нулевого ранга решения линейных одномерных нестационарных краевых задач математической физики // Киев.ун-т.- Киев, 1985.- 18 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 02.09.85, № 2017-Ук.

5. Калайда А.Ф., Сташкевич В.И. Матричный алгоритм приближенного решения задач математической физики // Научные труды УСХА. ЭММ в управлении с.-х. производством. - Киев, 1979.- Вып. 227.- С.-53.

6. Калайда А.Ф., Грищенко А.Е., Сташкевич В.И. Матричный алгоритм решения краевых задач для одномерного линейного уравнения теплопроводности // Методы и средства решения краевых задач. Тезисы докладов.- Москва - Казань. 1984.- С.-I5.

7. Калайда А.Ф., Стешкевич В.И. Неявные автономные одноблочные матричные методы нулевого ранга решения краевых задач для уравнения теплопроводности / Киев.ун-т-Киев, I984.- I8 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 4.07.84, № II56 Ук-84 Деп.

8. Калайда А.Ф., Сташкевич В.И. Неявные автономные одноблочные матричные методы нулевого ранга решения краевых задач для волнового уравнения / Киев,-н-т-Киев, I984.- I9 с.- Деп. в УкрНИИНТИ I5.08.84, № I469 Ук-84 Деп.

9. Калайда А.Ф., Слюсаренко В.И., Сташкевич В.И. Об одной задаче распределения тепла в композитных материалах // Опыт применения композитных материалов в с.-х. машиностроении: Сб.научн. тр./ УСХА.- К.,I985.- С.-39.

I0. Калайда А.Ф., Сташкевич В.И. Об одном подходе к методу численного дифференцирования функций скалерного и векторного аргумента // Х научн.-мет.межвуз.конф. Тезисы докладов / ХВАКУ.- Хмельницкий, I983.- С.-3I.

II. Сташкевич В.И. Дифференциально-матричные методы решения краевых задач для нелинейного одномерного уравнения теплопроводности // Вычисл. и прикл.мат.- К., I986.- Вып. 60.- С.37-43.

I2. Счастливый Г.Г., Титко А.И., Сташкевич В.И. Контроль и прогнозирование нестационарного нагрева стержней обмотки статора турбогенераторов при переменной нагрузке // Техническая электродинамика.- I993.-№ I.- С.- 3I-36.

Підписано до друку 24.09.1993 р. Папір друк. Формат 60х84 I/I6. Обл.- вид.арк.I. Ум.вид.арк.I,6. Тираж I00 прим. Зам.66.
ДОП Інституту аграрної економіки УААН.
252I27. Київ-I27. вул.Героїв оборони. 8