

На правах рукописи

ОРАЗКЛЫЧЕВ Акойлы Аширмемедович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ  
РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОЛУМАРКОВСКОГО ТИПА

01.01.05 - теория вероятностей и  
математическая статистика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

77B 28 331

Работа выполнена на кафедре прикладной статистики в Киевском университете имени Тараса Шевченко.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор АНИСИМОВ В.В.

Официальные оппоненты: - академик АН Украины, доктор физико-математических наук, профессор КОРОЛЮК В.С.

- доктор физико-математических наук, профессор КОЗАЧЕНКО Ю.В.

Работодатель - ведущая организация - Институт прикладной математики и механики АН Украины, г. Донецк

Защита состоится "25" сентября 1993г. в <sup>14<sup>00</sup></sup> часов на заседании специализированного совета К 068.18.11 при Киевском университете имени Тараса Шевченко по адресу: 252127, г. Киев-127, пр. Академика Глушкова, 6, механико-математический факультет

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета (ул. Владимирская, 62).

Автореферат разослан "24" сентября 1993г.

Ученый секретарь

специализированного совета

895 СУЩАНСКИЙ В.И.

ЛНБ України ім. В. Стефаника  
00810668 (Т)

ЛНБ ім. В. Стефаника  
АН України

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Общетеоретические проблемы статистики и прикладные задачи анализа стохастических систем стимулируют исследования в области оценивания параметров различных классов случайных процессов. Теория оценивания параметров в классических схемах независимых наблюдений в основном завершена в работах И.А.Ибрагимова и Р.З.Хасьминского. Ряд моделей для марковских процессов исследованы в работах П.Биллингсли, А.Я.Дороговцева, Г.И.Ивченко, В.А.Каштанова, И.Н.Коваленко, Ю.А.Кутоянца. В работах В.Ш.Липцера и А.Н.Ширяева развиваются мартингалльные методы в задачах статистики случайных процессов. Результаты по оцениванию параметров разрывных процессов с независимыми приращениями и процессов пуассоновского типа получены в работах Ю.Н.Линкова.

Вместе с тем теория асимптотического оценивания параметров случайных процессов в нестационарных (переходных) ситуациях разработана недостаточно.

Данная работа посвящается задачам асимптотического оценивания параметров специального подкласса, введенных в работах Анисимова В.В., переключающихся процессов - рекуррентных процессов полумарковского типа (РПМ). Ряд результатов в области асимптотического оценивания марковских и переключаемых пуассоновских процессов был получен в работах В.В.Анисимова.

В работе исследуются асимптотические свойства оценок метода моментов и метода максимального правдоподобия, построенных по наблюдениям на траекториях РПМ и РПМ с марковскими переключениями.

Цель работы. Доказательство состоятельности и сходимости центрированных отклонений к диффузионному процессу для оценок, построенных по наблюдениям на траекториях РПМ методами моментов и максимального правдоподобия.

Методика исследования. В работе используются методы теории случайных процессов, методы теории статистического оценивания и асимптотические методы.

Научная новизна. Для процесса накопления для РПМ доказаны принцип усреднения и диффузионная аппроксимация. На базе этих

теорем и результатов об асимптотическом поведении решений стохастических уравнений доказана состоятельность и асимптотическая нормальность для оценок, построенных на траекториях РПМ и РПМ с марковскими переключениями методами максимального правдоподобия и моментов, а также доказано поведение этих оценок как функций длины промежутка наблюдения.

Применение. Полученные результаты могут быть использованы в задачах статистики случайных процессов, исследования нестационарных и переходных явлений в технике, экологии и медицине.

Работа выполнена в соответствии с планом научных исследований кафедры прикладной статистики Киевского университета им. Тараса Шевченко.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Республиканской научной школе-семинаре "Компьютерный анализ данных и моделирование" (г. Минск, 1992), научно-практической конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Ашгабат, 1993), на семинарах кафедры прикладной статистики Киевского университета им. Тараса Шевченко.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 работ, список которых приведен в конце автореферата. Из результатов работ, написанных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие соискателю.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем работы страниц машинописного текста.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий обзор результатов, связанных с тематикой диссертации. Отмечается актуальность проводимых исследований, их связь сжато изложены основные результаты. Первая глава посвящена предельным теоремам для РПМ и исследованию асимптотического поведения решений стохастических уравнений.

§1.1 носит вспомогательный характер. В нем приводится определение РПМ без марковских переключений и РПМ с марковскими переключениями.

1. Пусть при каждом  $n \geq 1$  заданы независимые в совокупности семейства случайных векторов

$$\{(\xi_{nk}(a), \tau_{nk}(a), \gamma_{nk}(a)), a \in R^m\} \quad k \geq 0,$$

со значениями в  $R^m \times (0, \infty) \times R^1$ , и независимое от введенных семейств начальное значение  $S_{n0}$ . Зададим рекуррентным образом последовательности:

$$t_{n0} = 0,$$

$$S_{nk+1} = S_{nk} + \xi_{nk}(S_{nk}),$$

$$t_{nk+1} = t_{nk} + \tau_{nk}(S_{nk}), \quad k \geq 0$$

Тогда РПМ  $S_n(t)$  определяется следующим образом:

$$S_n(0) = S_{n0}, \quad S_n(t) = S_{nk} \quad \text{при } t_k \leq t < t_{k+1}, \quad t \geq 0. \quad (I)$$

2. Пусть

$$\{(\xi_{nk}(x, a), \tau_{nk}(x, a), \gamma_{nk}(x, a)), x \in X, a \in R^m\} \quad k \geq 0,$$

-независимые в совокупности семейства случайных векторов,  $x_{nk}$  - независимый от них марковский процесс в  $X$  и независимое от введенных величин начальное значение  $S_{n0}$ .

Положим

$$S_{nk+1} = S_{nk} + \xi_{nk}(x_{nk}, S_{nk}),$$

$$t_{nk+1} = t_{nk} + \tau_{nk}(x_{nk}, S_{nk}), \quad t_{n0} = 0,$$

$$S_n(t) = S_{nk} \quad \text{при } t_k \leq t < t_{k+1}, \quad t \geq 0, \quad k \geq 0.$$

Тогда  $S_n(t)$  образует РПМ с марковскими переключениями.

Для каждой конструкции введенных процессов приводятся предельные теоремы типа принципа усреднения и диффузионной аппроксимации, которые используются в последующих параграфах.

Имеет место следующая теорема.

Пусть распределения величин  $\xi_{nk}(a)$ ,  $\tau_{nk}(a)$  не зависят от индекса  $k$  и

$$m_n(a) = E\tau_{n1}(na), \quad b_n(a) = E\xi_{n1}(na).$$

Т е о р е м а I.I.I. Предположим, что для любого  $n > 0$

$$E\tau_{n_1}(a)^2 + E|\xi_{n_1}(a)|^2 < C$$

$$m_n(a) + |b_n(a)| \leq C(1+|a|),$$

для любого  $L > 0$  при  $|a_1| \vee |a_2| < L$

$$|m_n(a_1) - m_n(a_2)| + |b_n(a_1) - b_n(a_2)| < c_L |a_1 - a_2| + c_n,$$

где  $c_n \rightarrow 0$  равномерно по  $|a_1| \vee |a_2|$ , и

существуют функции  $m(a) > 0$ ,  $b(a)$  такие, что для любого  $a \in \mathbb{R}^m$

$$m_n(a) \rightarrow m(a), \quad b_n(a) \rightarrow b(a)$$

и

$$\frac{1}{n} S_{n_0}^p \xrightarrow{P} s_0.$$

Тогда

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{n} S_n(nt) - s(t) \right| \xrightarrow{P} 0, \quad (2)$$

где  $s(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$ds(t) = b(s(t))m^{-1}(s(t))dt, \quad s(0) = s_0. \quad (3)$$

В соотношении (2)  $T$  может быть любым числом таким, что  $y(+\infty) > T$ , где

$$y(t) = \int_0^t m(\tilde{s}(u)) du,$$

а  $\tilde{s}(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\tilde{s}(t) = b(\tilde{s}(t))dt, \quad \tilde{s}(0) = s_0.$$

Далее рассматриваются процессы накопления на РППМ.

Пусть задана первая конструкция РППМ. Зададим  $\Gamma_{n_0}$  и положим

$$\Gamma_{nk+1} = \Gamma_{nk} + \gamma_{nk}(S_{nk}), \quad k \geq 0.$$

Введем процесс

$$\Gamma_n(t) = \Gamma_{nk} \quad \text{при} \quad t_{nk} \leq t < t_{nk+1}, \quad t \geq 0.$$

Тогда процесс  $\Gamma_n(t)$  образует процесс накопления на РПМ  $S_n(t)$ . Исследовано поведение процессов

$$(S_n(t), \Gamma_n(t)).$$

Доказаны сходимость процесса  $(\frac{1}{n} S_n(t), \frac{1}{n} \Gamma_n(t))$  к решению

ветствующих систем дифференциальных уравнений и сходимость центрированных процессов  $(\zeta_n(t), \varkappa_n(t))$  к диффузионному процессу, который описывается системой стохастических дифференциальных уравнений,

$$\text{где } \zeta_n(t) = (S_n(nt) - ns(t)) / \sqrt{n},$$

$$\varkappa_n(t) = (\Gamma_n(nt) - nc(t)) / \sqrt{n},$$

$s(t)$  и  $c(t)$  - решения уравнения вида (3).

Полученные результаты используются при исследовании моментных оценок.

В §1.2 рассматриваются леммы об асимптотическом поведении решений стохастических уравнений.

Пусть  $f_n(\theta)$ ,  $\theta_n \in \Theta$ ,  $n > 0$  - последовательность непрерывных полей со значениями в  $R^m$ , где  $\Theta$  - некоторая ограниченная область в  $R^k$ . При каждом фиксированном  $t \geq 0$  рассмотрим стохастическое уравнение

$$f_n(t, \theta) = 0, \tag{4}$$

решение которого (если оно существует) обозначим через  $\hat{\theta}_n(t)$

Л е м м а 1.2.2. Пусть для некоторого  $t > 0$  выполняются следующие условия:

$$f_n(t, \theta) \xrightarrow{P} f_0(t, \theta), \theta \in \Theta \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{|\theta_1 - \theta_2| < h} |f_n(t, \theta_1) - f_n(t, \theta_2)| > \varepsilon \right\} = 0,$$

для любого  $\varepsilon > 0$  и выполнено условие В: существует такое  $\delta > 0$ , что для любого  $\theta$ ,  $|\theta| < \delta$  уравнение

$$f_0(t, \theta) = 0$$

имеет единственное решение и

$$f_0(t, \theta_0) = 0, \text{ где } \theta_0 \in \Theta.$$

Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, существует решение  $\hat{\theta}_n(t)$  уравнения (4) и

$$\hat{\theta}_n(t) \xrightarrow{P} \theta_0.$$

Далее, пусть существует такая неслучайная последовательность  $\alpha_n \rightarrow 0$ , что меры, порожденные полем  $f_n(t, \theta_0 + \alpha_n u)$  в каждой конечной области  $0 \leq t \leq L$ ,  $|u| \leq N$ , слабо сходятся в пространстве Скорохода при  $n \rightarrow \infty$  к мере, порожденной полем  $\xi_0(t) + G_0(t)u$ , и матрица  $G_0(t)$  невырождена на некотором отрезке  $[t_0, T]$ ,  $t_0 > 0$ , где  $\xi_0(t)$  и  $G_0(t)$  - непрерывные векторно и матричнозначные случайные процессы.

Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, существует решение  $\hat{\theta}_n(t)$  такое, что процесс

$$\alpha_n^{-1} (\hat{\theta}_n(t) - \theta_0)$$

слабо сходится (в смысле слабой сходимости в пространстве D) на отрезке  $[t_0, T]$  к процессу

$$-G_0^{-1}(t)\xi_0(t).$$

Во второй главе изучаются асимптотические свойства методов моментов и максимального правдоподобия для РППМ.

В § 2.1 исследована состоятельность оценок метода максимального правдоподобия. Рассматривается первая конструкция РППМ.

Пусть на промежутке  $[0, nt]$  наблюдаются величины

$$S_{nk}, t_{nk} \text{ и } \gamma_{nk}(S_{nk}/n), k \leq v_n(t),$$

где

$$v_n(t) = \min\{k: t_{nk+1} > nt\}.$$

Предположим, что плотности распределения величин  $\gamma_{nk}(a)$  принадлежат параметрическому семейству плотностей  $p_n(\theta, a, z)$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $z \in R^r$ , где  $\Theta$  - некоторое ограниченное замкнутое множест-

во в  $R^n$ . Пусть  $p_n(\theta_0, a, z) = p_n(a, z)$ , где  $p_n(a, z)$  - плотность распределения  $\gamma_n(a)$ , а  $\theta_0$  - внутренняя точка  $\Theta$ . Соответствующее нашим наблюдениям уравнение максимального правдоподобия имеет вид

$$1/n \sum_{k=0}^{v_n(a)} \varphi_n(\theta, S_{nk}/n, \gamma_{nk}) = 0, \quad (5)$$

где  $\varphi_n(\theta, a, z) = p_n(\theta, a, z)^{-1} \nabla_{\theta} p_n(\theta, a, z)$  (предполагается, что для любых  $\theta, a, z$  функция  $p_n(\theta, a, z) > 0$  и дифференцируема по  $\theta$  и выполняется условие N: функция  $\varphi_n(\theta, a, \gamma_{n1}(a))$  равномерно по  $n$  и по  $a$  в каждой ограниченной области  $|a| < L$  непрерывна по  $\theta$  в среднем:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{|a| < L} E \sup_{|\theta_1 - \theta_2| < \epsilon} |\varphi_n(\theta_1, a, \gamma_{n1}(a)) - \varphi_n(\theta_2, a, \gamma_{n1}(a))| = 0,$$

выполнение которого предполагается во всех теоремах о состоятельности оценок метода максимального правдоподобия.

Обозначим  $F_n(\theta, a) = E \varphi_n(\theta, a, \gamma_{n1}(a))$ .

**Т е о р е м а 2.1.1.** Пусть для любого  $L > 0$  при  $|a| < L$

$$\sup_{|a| < L} E \varphi_n(\theta, a, \gamma_{n1}(a)) \varphi_n^*(\theta, a, \gamma_{n1}(a)) < C_L < \infty,$$

функция  $F_n(\theta, a)$  равномерно по паре  $\theta, a$  в любой ограниченной области стремится к непрерывной функции  $F(\theta, a)$ , выполняются условия теоремы 1.1.1 и условие N, для данного фиксированного  $t > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что уравнение

$$\int_0^{\mu(t)} F(\theta, \tilde{s}(u)) du = h, \quad \text{где } \mu(t) = y^{-1}(t)$$

при любом  $|h| < \delta$  имеет единственное решение. Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, существует решение  $\hat{\theta}_n(t)$  уравнения (5) и

$$\hat{\theta}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta_0$$

В §2.2 доказана сходимость центрированных оценок к диффузионному процессу.

Предположим, что для любого  $L > 0$  при  $n \rightarrow \infty$

$$L_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{|\alpha| \leq L} E \varphi_n(\theta_0, \alpha, \gamma_{n_1}(\alpha))^2 \chi(|\varphi_n(\theta_0, \alpha, \gamma_{n_1}(\alpha))| > N) \rightarrow 0, \quad (6)$$

где  $\chi(A)$  - индикатор события  $A$ .

Обозначим

$$K(\theta, \alpha) = E \dot{\varphi}_n(\theta, \alpha, \gamma_{n_1}(\alpha)),$$

где  $\dot{\varphi}_n(\theta, \alpha, \gamma_{n_1}(\alpha))$  - матрица частных производных производных вектор-функции  $\varphi_n(\theta, \alpha, \gamma_{n_1}(\alpha))$ ,

$$\varphi_n(\theta, \alpha, z) = P_n^{-1}(\theta, \alpha, z) \nabla_{\theta} P_n(\theta, \alpha, z),$$

$$E \varphi_n(\theta, \alpha, \gamma_{n_1}(\alpha)) \varphi_n^*(\theta, \alpha, \gamma_{n_1}(\alpha)) = \sigma_n^2(\theta, \alpha).$$

**Т е о р е м а 2.2.1.** Пусть выполняются условия теоремы I.1.1 и

$$E |\dot{\varphi}_n(\theta, \alpha, \gamma_{n_1}(\alpha))|^2 < C,$$

$$|\sigma_n^2(\theta, \alpha)| < C.$$

Функция  $F_n(\theta, \alpha) = E \varphi_n(\theta, \alpha, \gamma_{n_1}(\alpha))$  равномерно по  $n, \alpha$  непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $\theta_0$ , при  $n \rightarrow \infty$

$$K_n(\theta_0, \alpha) \rightarrow K(\theta_0, \alpha),$$

$$\sigma_n^2(\theta_0, \alpha) \rightarrow \sigma^2(\theta_0, \alpha)$$

равномерно по  $\alpha$  в каждой ограниченной области и выполняется условие (6).

Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, при  $n \rightarrow \infty$  существует решение  $\hat{\theta}_n(t)$  уравнения (5) такое, что на каждом отрезке  $[t_0, T]$ ,  $t_0 > 0$  процесс

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n(t) - \theta_0)$$

слабо сходится (в смысле слабой сходимости в пространстве  $D_{[t_0, T]}^r$ ) к процессу

$$\left[ \int_0^t m^{-1}(z(u)) K(\theta_0, z(u)) dz(u) \right]^{-1} \int_0^t \sigma(\theta_0, z(u)) m(z(u))^{-1/2} d\omega(u),$$

где  $\omega(u)$  - стандартный винеровский процесс,  $z(u)$  удовлетворяет уравнению (3). (Предполагается, что

$$\int_0^t m^{-1}(s(u))K(\theta_0, s(u))du - \text{ невырожденная матрица } ).$$

В §2.3 исследованы асимптотические свойства моментных оценок.

Рассматривается первая конструкция РППМ.

На отрезке  $[0, nt]$  наблюдается траектория РППМ, т.е. величины  $S_{nk}$  и величины  $\gamma_{nk}(S_{nk}/n)$ ,  $0 \leq k \leq \nu_n(t)$ , где  $\nu_n(t) = \min\{k; t_{nk+1} > nt\}$ . Предположим, что существует  $E\gamma_{n1}(a) = g_n(a)$  и функция  $g_n(a)$  принадлежит параметрическому семейству функций  $g_n(\theta, a)$ .

Ставится задача - по данным наблюдениям указать методику определения неизвестного параметра  $\theta$  и исследовать асимптотические свойства построенных оценок.

Уравнение моментного типа напомним в виде

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\nu_n(t)} \gamma_{nk}(S_{nk}/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\nu_n(t)} g_n(\theta, S_{nk}/n) \quad (7)$$

Т е о р е м а 2.3.1. Пусть для любого  $L > 0$  при  $|a| < L$

$$\sup_{|a| \leq L} E\gamma_{n1}(a)\gamma_{n1}^*(a) < C_L < \infty$$

и функция  $g_n(\theta, a) = E_{\theta}\gamma_{n1}(a)$  равномерно по паре  $\theta, a$  в любой ограниченной области стремится к непрерывной функции  $g(\theta, a)$ , выполняются условия теоремы I.I.I и условие : для данного фиксированного  $t > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что уравнение

$$\int_0^{\mu(t)} (g(\theta_0, \tilde{s}(u)) - (g(\theta, \tilde{s}(u))))du = h$$

при  $|h| < \delta$  имеет единственное решение.

Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, существует решение  $\hat{\theta}_n(t)$  уравнения (7) и

$$\hat{\theta}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta.$$

Далее в диссертации доказывается сходимость центрированных моментных оценок к диффузионному процессу.

Рассмотрен также случай, когда траектория РПМ не наблюдается, а наблюдается только величина  $\gamma_{nk}$ ,  $k \leq v(t)$ . Уравнение моментов напишем в виде

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{v_n(t)} \gamma_{nk} = \int_0^t m^{-1}(z(u)) g(\theta, z(u)) dz \quad (8)$$

И в этом случае также исследованы асимптотические свойства решений уравнения (8).

В главе III исследуются асимптотические свойства оценок, полученных методом максимального правдоподобия и методом моментов, для РПМ с марковскими переключениями. Рассмотрены эргодический и неэргодический случаи.

В §3.1 исследована состоятельность оценок, полученных методом максимального правдоподобия. Рассматривается вторая конструкция РПМ.

Пусть на промежутке  $[0, nt]$  наблюдаются величины  $t_{nk}, x_{nk}, S_{nk}$  и  $\gamma_{nk} = \gamma_{nk}(x_{nk}, S_{nk})$ ,  $0 \leq k \leq v_n(t)$ ,  $v_n(t) = \min\{k: t_{nk} > nt\}$ , при этом плотности распределений  $\gamma_{nk}(x, a)$  принадлежат семейству плотностей  $\{p_n(z, x, a, \theta), z \in R^1, \theta \in \Theta\}$ , где  $\Theta$  является ограниченной областью в  $R^r$ .

Исследуются свойства оценок  $\hat{\theta}_n(t)$  метода максимального правдоподобия как процессов по  $t$ . Положим

$$\varphi_n(z, x, a, \theta) = p_n^{-1}(z, x, a, \theta) \nabla_{\theta} p_n(z, x, a, \theta)$$

(предполагается, что для любых  $z, x, a, \theta$  функция  $p_n(z, x, a, \theta) > 0$  и дифференцируема по  $\theta$ )

Тогда уравнение максимального правдоподобия имеет вид

$$\sum_{k=0}^{v_n(t)} \varphi_n(\gamma_{nk}, x_{nk}, S_{nk}, \theta) = 0 \quad (9)$$

Пусть распределения величин  $\xi_{nk}(\cdot)$ ,  $\tau_{nk}(\cdot)$ ,  $\gamma_{nk}(\cdot)$  не зависят от индекса  $k$  и процесс  $x_{nk}$  при каждом  $n > 0$  является однородным марковским со стационарной мерой  $\pi_n(A)$ .

Определение 3.1.1. Марковский процесс  $\gamma_{nk}$ ,  $k \geq 0$ , удовлетворяет условию асимптотически сильного перемешивания, если существует такая неслучайная последовательность  $m_n$ , что  $m_n/n \rightarrow 0$  и

$$\sup_{k \geq m_n} \beta_n(k) \rightarrow 0,$$

где

$$\beta_n(k) = \sup_{i > 0} \sup_{A, B} |P\{y_{n,i+k} \in A, y_{n,i} \in B\} - P\{y_{n,i+k} \in A\}P\{y_{n,i} \in B\}|.$$

Определение 3.1.3. Марковский процесс  $y_{nk}$  асимптотически эргодичен, если он удовлетворяет условию асимптотически сильного перемешивания и существует вероятностная мера  $\pi_n(A)$  такая, что для той же последовательности  $m_n$

$$\sup_{k \geq m_n} \rho_n(k) \rightarrow 0,$$

где

$$\rho_n(k) = \sup_A |P\{y_{nk} \in A\} - \pi_n(A)|.$$

Рассмотрим случай, когда двумерный процесс  $(x_{nk}, S_{nk})$  является асимптотически эргодическим со стационарной мерой  $\pi_n(A, B)$ . Обозначим  $m_n(x, a) = E\tau_{nk}(x, a)$ ,

$$\varphi_n(x, a, \theta) = E\varphi_n(\gamma_{nk}(x, a), x, a, \theta),$$

$$D_n^2(x, a, \theta) = E\varphi_n(\gamma_{nk}(x, a), x, a, \theta) \varphi_n^*(\gamma_{nk}(x, a), x, a, \theta),$$

и введем оператор  $\pi_n(\cdot)$  вида  $\pi_n(q(\cdot)) = \int q(x, a) \pi_n(dx, da)$

(если  $q(\cdot)$  векторно или матричнозначная функция, то интеграл берется поэлементно).

Положим

$$m_n = \pi_n(m_n(\cdot)), \quad \varphi_n(\theta) = \pi_n(\varphi_n(\cdot, \theta)).$$

Т е о р е м а 3.1.1. Пусть процесс  $(x_{nk}, S_{nk})$  асимптотически эргодичен со стационарной мерой  $\pi_n(A, B)$  и существует такая непрерывная функция  $\varphi_0(t)$ , что

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\varphi_n(\theta) - \varphi_0(\theta)| \rightarrow 0$$

и выполняются условие В леммы 1.2.2 для  $f_0(t, \theta) = \varphi_0(\theta)$  и условие N,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, a} |D_n^2(x, a, \theta)| < C, \quad (IO)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, a} E \tau_{n1}(x, a)^2 < C \quad (II)$$

и  $m_n \rightarrow m_0 > 0$ .

Тогда с вероятностью, стремящейся к единице при  $n \rightarrow \infty$ , существует решение  $\hat{\theta}_n(t)$  уравнения (9) такое, что

$$\hat{\theta}_n(t) \xrightarrow{P} \theta_0, \quad t > 0.$$

Далее рассматривается случай, когда двумерный процесс  $(x_{nk}, S_{nk})$  является неэргодическим. Предполагается, что марковский процесс  $x_{nk}$  является эргодическим со стационарной мерой  $\pi_n(A)$ , в то время, как двухкомпонентный процесс  $(x_{nk}, z_{nk})$  не будет эргодическим. При этом будем предполагать, что траектория  $z_{nk}$  развивается в переходном режиме, т.е. для нее выполнен принцип усреднения (нормированная траектория сходится к решению дифференциального уравнения).

Положим

$$m_n(x, a) = E \tau_{nk}(x, na), \quad b_n(x, a) = E \xi_{nk}(x, na),$$

$$\varphi_n(x, a, \theta) = E \varphi_n(\gamma_{nk}(x, na), x, na, \theta),$$

$$D_n^2(x, a, \theta) = E \varphi_n(\gamma_{nk}(x, na), x, na, \theta) \varphi_n^*(\gamma_{nk}(x, na), x, na, \theta).$$

Обозначим

$$m_n(a) = \int_x \tilde{\pi}_n(m_n(\cdot, a)) = \int_x m_n(x, a) \tilde{\pi}_n(dx)$$

$$\varphi_n(a, \theta) = \tilde{\pi}_n(\varphi_n(\cdot, a, \theta)),$$

$$b_n(a) = \tilde{\pi}_n(b_n(\cdot, a)),$$

$$D_n^2(a, \theta) = \tilde{\pi}_n(D_n^2(\cdot, a, \theta)),$$

где  $\tilde{\pi}_n(A)$  - стационарная мера процесса  $x_{nk}$ ,  $k \geq 0$ .

**Т е о р е м а 3.1.2.** Пусть процесс  $x_{nk}$  асимптотически эргодичен и выполняются условия (I0), (II) и условие N, для каждого  $L > 0$  функция  $\varphi_n(a, \theta)$  равномерно по  $n$  непрерывна в области  $|a| < L$ ,  $\theta \in \Theta$  и

$$\varphi_n(a, \theta) \xrightarrow{p} \varphi(a, \theta), \quad a \in R^m, \quad \theta \in \Theta,$$

Функции  $m_n(x, a)$  и  $b_n(x, a)$  равномерно по  $x$  удовлетворяют локальному условию Липшица и имеют не более чем линейный рост по переменной  $a$ ,

$$m_n(a) \xrightarrow{p} m(a), \quad b_n(a) \xrightarrow{p} b(a), \quad a \in R^m,$$

$$\frac{1}{n} S_{n0} \xrightarrow{p} s_0$$

и функция

$$F(t, \theta) = \int_0^t m^{-1}(s(u)) \varphi(s(u)) ds$$

удовлетворяет условию В леммы 1.2.2 при фиксированном  $t$ , где  $z(u)$  - решение дифференциального уравнения

$$dz(t) = m^{-1}(z(t)) b(z(t)) dt, \quad z(0) = s_0 \quad (I2)$$

Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, существует решение  $\hat{\theta}_n(t)$  уравнения (9) и

$$\hat{\theta}_n(t) \xrightarrow{p} \theta_0$$

(предполагается, что решение уравнения (I2) существует и единственно).

В §3.2 исследуется сходимость центрированных оценок как процессов по  $t$  вида

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n(t) - \theta_0)$$

к диффузионному процессу. Рассматриваются случаи, когда процесс  $(x_{nk}, S_{nk})$  является эргодическим и неэргодическим.

Приведем доказанный результат для первого случая.

**Т е о р е м а 3.2.1.** Пусть процесс  $(x_{nk}, S_{nk})$  асимптотически эргодичен и удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1 для любого  $L > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|z| \leq L} \sup_{x, a} E |\varphi_n(\gamma_{n_1}(x, a), x, a, \theta_0) - \varphi_n(\gamma_{n_1}(x, a), x, a, \theta_0 + \frac{z}{\sqrt{n}})|^2 < C$$

Функция  $\varphi_n(x, a, \theta_0)$  равномерно по  $n, x, a$  непрерывно дифференцируема в точке  $\theta_0$  и

$$\pi_n(\varphi_n'(\cdot, \theta_0)) \rightarrow B(\theta_0),$$

где  $\varphi_n'(x, a, \theta_0)$  - матрица частных производных вектор-функции  $\varphi_n(x, a, \theta_0)$ , матрица  $B(\theta_0)$  невырожденная,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, a} E |\varphi_n(\gamma_{n_1}(x, a), x, a, \theta_0)|^2 \chi(|\varphi_n(\gamma_{n_1}(x, a), x, a, \theta_0)| > L) = 0$$

(условие Линдеберга) и

$$\pi_n(D_n^2(\cdot, \theta_0)) \rightarrow D^2(\theta_0)$$

Тогда существует решение  $\hat{\theta}_n(t)$  уравнения (9) такое, что на каждом отрезке  $[t_0, T]$ ,  $t > 0$ , процесс  $\sqrt{n} (\hat{\theta}_n(t) - \theta_0)$  слабо сходится (в смысле слабой сходимости в пространстве  $D$ ) к процессу

$$(1/t) \sqrt{m_0} B^{-1}(\theta_0) D(\theta_0) w(t),$$

где  $w(t)$  - стандартный винеровский процесс.

В §3.3 исследованы асимптотические свойства моментных оценок в случае наблюдаемой и ненаблюдаемой траектории.

Рассматривается вторая конструкция РПМ и эргодический случай.

1. На отрезке  $[0, nt]$  наблюдается траектория РПМ, т.е. величины  $S_{nk}$  и величины  $x_{nk}$ ,  $\gamma_{nk}(x_{nk}, S_{nk})$ ,  $0 \leq k \leq v_n(t)$ , где  $v_n(t) = \min\{k; t_{nk+1} > nt\}$ .

2. Траектория РПМ не наблюдается, а наблюдаются только величины  $\gamma_{nk}$ ,  $0 \leq k \leq v_n(t)$ .

Соответствующие данным наблюдениям уравнения моментных типов можно записать в виде (предполагается, что существует  $E\gamma_n(x, \varepsilon) = g_n(x, \varepsilon, \theta)$ )

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{v_n^{(1)}} \gamma_{nk}(x_{nk}, S_{nk}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{v_n^{(2)}} g_n(x_{nk}, S_{nk}, \theta), \quad (I3)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{v_n^{(1)}} \gamma_{nk} = \pi_n(g_n(\cdot, \theta)) / \pi_n(m_n(\cdot)) \quad (I4)$$

Исследованы асимптотические свойства решений уравнений (I3) и (I4). Доказаны состоятельность и сходимость центрированных отклонений к диффузионному процессу для моментных оценок.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В.В.Анисимову за научное руководство, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Анисимов В.В., Оразклычев А.А. Асимптотическое оценивание в стохастических моделях с переключениями // Компьютерный анализ данных и моделирование, Минск, 1992. Тез. докл. респ. науч. школы-семинара. - С.17-18.
2. Анисимов В.В., Оразклычев А.А. Асимптотическое свойство оценок метода максимального правдоподобия для рекуррентных процессов полумарковского типа. -Киев, 1993. -25с.- (Препр./АН Украины. Ин-т математики; 93.17).
3. Анисимов В.В., Оразклычев А.А. Асимптотическое оценивание параметров рекуррентных процессов полумарковского типа//Тр. науч.-практ. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения".- Ашгабат, 1993. - С.16-22.
4. Анисимов В.В., Оразклычев А.А. Асимптотичне оцінювання параметрів рекурентних процесів напівмарківського типу в перехідних режимах// Теорія ймовірностей і мат.статистика.-1993.-Вип. 49.- С.3-11.
5. Оразклычев А.А. Об асимптотической оценке параметров рекуррентных процессов полумарковского типа// Тр. Туркм. политехн. ин-та. - Ашгабат, 1993. - С.23-25.

Подписано к печати 5.08.93 года  
формат бумаги 60x84 1/16 объем 1,8 п.л.  
уч - издат 0,5 Заказ 1067 тираж 100 экз

---

Отпечатано ООП ГВЦ Госкомстата Туркменистана

г. Ашгабат - 93 г.



AB 28.391

**AB 28.391**