Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

МОТОРНА Оксана Віталіївна

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ПОЛІНОМАМИ

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993

Робота виконана у відділі теорії наближення та комплексного аналізу Інституту математики АН України .

Науковий керівник - член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук М.І. КОРНІЙЧУК.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук ШЕВЧУК І.О.,
кандидат фізико-математичних наук СМІРНОВ Г.О.

Провідна організація - Одеський державний університет

Захист відбудеться "9" листопада 1993 року на засіданні спеціалізованої ради Д016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою :252601 Київ-4,ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "8" жовтня 1993 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одними з найбільш важливих задач в теорії наближення є задача про знаходження найкращого наближення фіксованого елемента $x \in X$ (X - довільний нормований простір) фіксованою множиною $F \in X$ і задача про найкраще наближення фіксованої множини $\mathfrak{M} \subset X$ фіксованою множиною того ж простору.

Найкращим наближенням елемента $x \in X$ множиною F будемо вважати величину

$$E_F(x)_X = \inf_{u \in F} \| x - u \|_X ,$$

а найкращим наближенням множини $\mathfrak{M} \subset X$ множиною F - величину

$$E_F(\mathfrak{M})_X = \sup_{x \in \mathfrak{M}} E_F (x)_X .$$

Далі будемо розглядати такі простори функцій, заданих на відрізку $[-1,1]$:

$C[a,b]$ - простір неперервних функцій з нормою

$$\| f \|_{C[a,b]} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) | ;$$

L_p простір дійсних , вимірних за Лебегом на відрізку $[-1,1]$ функцій із скінченною нормою

$$\| f \|_p = \left\{ \int_{-1}^{1} | f(x) |^p dx \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1;$$

L_∞ - простір вимірних , істотно обмежених функцій з нормою

$$\| f \|_\infty = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \operatorname{vrai} | f(x) |.$$

В перелічених вище просторах розглянемо такі класи функцій :

W_p^r , $r=1,2,\ldots$, $1 \leq p \leq \infty$, - клас функцій , які мають $(r-1)$-у неперервну похідну таку , що

$\| f^{(r)} \|_p \leq 1$, якщо $1 \leq p < \infty$, та $\| f^{(r)} \|_\infty \leq 1$, якщо $p=\infty$;

H_∞^n ($n=0,1,2,\ldots$) - клас функцій, які належать одиничній кулі простору L_∞ і задовольняють умову

$$\int_{-1}^{1} t^k f(t)\,dt = 0 , \qquad k=0,1,\ldots,n .$$

$W^r H^n_\infty$ ($n \geq r-1$) -клас функцій, які мають $(r-1)$-у абсолютно неперервну похідну , $f^{(k)}(-1) = 0$, $k = 0,1,\ldots,r-1$.

Нехай P_n - множина алгебраїчних многочленів степеня не вище n , T_n - множина тригонометричних поліномів степеня не вище n.

Відповідні простори та класи 2π-періодичних функцій будемо позначати через $\tilde{C}$, $\tilde{L}_p$, $\tilde{W}^r_p$ і т.д.

Позначимо

$$E_n(f)_p = E_{P_n}(f)_{L_p} \; ; \qquad 1 \leq p \leq \infty ,$$

$$E_n(f)_C = E_{P_n}(f)_C \; ;$$

$$\tilde{E}_n(f)_p = E_{T_n}(f)_{\tilde{L}_p} \; ; \qquad 1 \leq p \leq \infty ,$$

$$E_n(W^r_\infty)_C = E_{P_n}(W^r_\infty)_C \; ;$$

$$E_n(W^r_\infty)_1 = E_{P_n}(W^r_\infty)_{L_1} \; ;$$

$$\tilde{E}_n(\tilde{W}^r_\infty)_C = E_{T_n}(\tilde{W}^r_\infty)_{\tilde{C}} \; ;$$

$$\tilde{E}_n(\tilde{W}_p^r)_p = E_{T_n}(\tilde{W}_p^r)_{L_p}; \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

У дисертації розглядається задача про знаходження асимптотично точної оцінки найкращого наближення класу W_∞^r алгебраїчними многочленами степеня не вище n у просторі L_1.

У 1936-1937 р.р. Ж.Фаваром у роботах Sur l'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques, (C.R.Acad.Sci.(Paris)203(1936), 1122-1124); Sur les meilleurs procedes d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonometriques, (Bull.Sci. Math.(61) (1937), 209-224, 243-256,) а також Н.І.Ахієзером і М.Г.Крейном у роботах " О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций", (Докл.АН СССР.-1937,-15, С.107-112) отримані точні значення $\tilde{E}_n(\tilde{W}_\infty^r)_\infty$ — найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами класів $\tilde{W}_\infty^r$ ($r=1,2,\ldots$) періодичних функцій.

Ці роботи дали початок класичній тематиці у теорії наближення - знаходженню точних верхніх меж наближень класів функцій .

Зусиллями ряду математиків задача про знаходження величин $E_n(\mathfrak{M})_X$ була розв'язана для найважливіших функціональних класів періодичних функцій . Покажемо деякі результати , які стосуються цієї тематики . У згаданих вище роботах Ж.Фавара , Н.І.Ахієзера та М.Г.Крейна доведені співвідношення:

$$\tilde{E}_n(\tilde{W}^r_\infty)_\infty = \frac{K_r}{(n+1)^r}, \quad r,n=1,2,\ldots,$$

де K_r - константи Фавара:

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}, \quad r=0,1,\ldots$$

Наступний важливий крок був зроблений С.М.Нікольським, який, використовуючи теореми двоїстості для найкращих наближень,у роботі " Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем" //Изв.АН СССР. Сер.мат. -1946, -10, -№5,

-С.207-256 отримав аналогічні співвідношення у просторі $\tilde{L}_1$:

$$\tilde{E}_n(\tilde{W}_1^r)_1 = \frac{K_r}{n^r}, \quad r,n=1,2,\ldots$$

У 1967 р. Л.В.Тайковим ("О приближении в среднем некоторых классов периодических функций" //Тр.Мат.ин-та АН СССР.-1967, - 88. -С.61-70.) була розв'язана задача про знаходження точної оцінки для найкращого наближення класів $\tilde{W}_p^r$ ($1 \leq p \leq \infty$) тригонометричними многочленами у просторі $\tilde{L}_1$: при будь яких $n,r=1,2,\ldots$ здійснюється рівність:

$$\tilde{E}_n(\tilde{W}_p^r)_1 = \| \varphi_{n,r} \|_{p'}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad 1/p+1/p'=1,$$

де $\varphi_{n,r}$ - $\frac{2\pi}{n}$ - періодичний ейлерів ідеальний сплайн порядку r із середнім значенням на періоді рівним нулю, функції $\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sign}\sin(n+1)t$.

При $p=\infty$ даний результат незалежно та за допомогою іншого способу отримала С.П.Туровець (О наилучшем прибли жении в среднем дифференцируемых функций // Докл.АН УССР, Сер.А.-1968,-№5,-С.417-421).

У випадку наближення функцій, заданих на відрізку, алгебраїчними многочленами, як правило, виявляється можливим з'ясувати тільки асимптотичну поведінку величин $E_n(\mathfrak{M})_X$.

Для класу функцій W^r_∞ відомий результат С.Н.Бернштейна про оцінку найкращого наближення алгебраїчними многочленами степеня не вище n у просторі C, отриманий у роботах "Обобщение одного результата С.М.Никольского."// Докл.АН СССР. - 1946.-53.-С.587-589, "О предельных зависимостях между константами теории наилучшего приближения". // Докл.АН СССР. - 1947. - 57.-С.3-5:

$$E_n(W^r_\infty)_C = K_r \cdot n^{-r} + o(n^{-r})$$

$$n \longrightarrow \infty$$

У 1946 С.М.Нікольський довів асимптотичну рівність величин

$$E_n(W^r_\infty)_\infty \text{ та } \tilde{E}_n(\tilde{W}^1_\infty)_\infty.$$

Із результатів, що відносяться до інтегральної метрики, згадаємо асимптотичну рівність:

$$E_n(W^r_1)_1 \sim \tilde{E}_n(\tilde{W}^r_1)_1 ,$$

яка була отримана у 1947р. С.М.Нікольським у роботі "О наилучшем линейном методе приближения многочленами в среднем дифференцируемых функций"// Докл.АН СССР 58, №2(1947), С.185-188.

Метод даної роботи є :

I). Знаходження асимптотично точної оцінки найкращих наближень функцій

$$(x-a)^{r-1}_+ = \begin{cases} (x-a)^{r-1}, & x \geq a; \\ 0, & x \leq a \end{cases}$$

алгебраїчними многочленами у просторі L_1, рівномірної відвосно параметра а .

в). Знаходження асимптотично точної оцінки наближення класів W^r_∞ алгебраїчними многочленами у просторі L_1.

Метод дослідження.

У роботі при знаходженні асимптотично точних оцінок величин $E_n(W^r_\infty)_1$ використовувались співвідношення двоїстості теорії наближення, а також способи досліджень екстремальних задач, які розроблені у роботах С.М.Нікольського, М.П.Корнейчука, С.П.Туровець .

Наукова новизна та теоретична цінність результатів.

Основні результати роботи є новими та становлять теоретичний інтерес . Їх зміст полягає у наступному :

- отримана асимптотично точна оцінка найкращих наближень функцій $(x-a)_+^{r-1}$ алгебраїчними многочленами у просторі L_1 , рівномірна відносно параметра а ;
- отримана асимптотично точна оцінка найкращих наближень класів W^r_∞ алгебраїчними многочленами у просторі L_1.

Апробація роботи .

Основні результати дисертаційної роботи доповідались на семінарі відділу теорії наближення та комплексного аналізу Інституту математики АН України (керівник семінару - чл.-кор. АН України М.П.Корнійчук), на школі семінарах : всесоюзна школа по теорії функцій (2-I4 вересня I99I року,Оде ький державний університет), "Ряди Фур'є : теорія та застосування" (29 червня - 6 липня I992 року,Кам'янець--Подільский педагогічни інститут), на міжнародній конференції присвяченій пам'яті М.П.Кравчука (22 - 28 вересня I992 року, Київ-Луцьк I992) , на міжнародній конференції , присвяченій 75-річчю Дніпропетровського державного університету "Теорія наближення та задачі обчислювальної математики" (26-28 травня I993р. Дніпропетровський державний університет).

Публікації. Результети дисертації опубліковані в наведених в кінці автореферату роботах .

Структура роботи . Дисертація складається із вступу , двох розділів та списку цитованої літератури ,що містить в собі 26 найменувань . Загальний обсяг роботи - 51 сторінка .

ЗМІСТ РОБОТИ .

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертації, формулюється мета роботи , дається короткий аналіз основних робіт , які стосуються розглядуваних в дисертації питань, і наводяться основні одержані результати .

Перший розділ роботи присвячений знаходженню асимптотично точної оцінки найкращих наближень функцій $(x-a)_+^{r-1}$.

Головний результат цього розділу -

Теорема І.І. Для будь-якого $a \in (-1,1)$, $r=1,2,\ldots$ та будь-якого $n \geqslant r-1$ має місце рівність :

$$E_n\left\{(x-a)_+^{r-1}\right\}_1 = \frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{(n+1)^r}(r-1)! + O\left(\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{(n+1)^{r+1}}\right),$$

де константа , що визначає $O\left(\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{(n+1)^{r+1}}\right)$, залежить тільки від r.

Ця теорема узагальнює результат С.М.Нікольського, одержаний у роботі "О наилучшем приближении многочленами в среднем функций $|a-x|^s$ " //Изв. АН СССР.Сер.мат. - 1947.-2, № 3, -С.139-180:

$$E_n\left[(x-a)_+^{r-1}\right]_1 = \frac{K_r\left(\sqrt{1-a^2}\right)^r}{(n+1)^r}(r-1)! + O\left[\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right], \quad (I)$$

рівномірно відносно a, що задовольняє нерівність $|a| < \eta$, де η - довільне число .

Зауважимо, що нам не пощастило використати метод доведення рівності (I) для доведення теореми I.I.Тому доведення теореми I.I цілком нове.

Питання про знаходження величин $E_n\left[(x-a)_+^{r-1}\right]_1$ стало необхідним розглянути при відшуканні $E_n(W_\infty^r)_1$.

У другому розділі відшукується асимптотично точна оцінка найкращих наближень класів W_∞^r.

Головним результатом цього розділу є наступна теорема.

Теорема 2.1. Нехай $r=1,2,\dots$, $n \geqslant r-1$. Тоді

$$E_n(W^r_\infty) = \frac{2}{\pi} B\left(\frac{1}{2},\frac{r}{2}+1\right)\frac{K_{r+1}}{(n+1)^{r}} + O\left(\frac{1}{n^{r+\frac{r+2}{r+3}}}\right),$$

де $B\left(\frac{1}{2},\frac{r}{2}+1\right) = \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{r}{2}}dx$ - ейлерів інтеграл

першого роду.

При доведенні теореми 2.1 основну роль грає теорема 1.1, використувати яку дозволяє наступна асимптотична рівність :

$$\sup_{f \in W^rH^n_\infty} f(a) = \frac{1}{(r-1)!} E_n\left[(x-a)_+^{r-1}\right]_1,$$

де a - будь-яка точка інтервалу (-1,1) , а $n \geqslant r-1$.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру подяку моєму науковому керівнику члену-кореспонденту АН України, доктору фізико-математичних наук Корнійчуку Миколі Павловичу за постановку задач та постійну увагу і підтримку в роботі.

Основні результати дисертації опубліковані у таких роботах :

I.Моторная О.В.Уточнение одного асимптотического результата С.М.Никольского //Оптимизация методов приближения.- Киев: Ин-т математики АН Украины , 1992 .- С. 63-69 .

2.Моторная О.В. О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1 // Тези міжнародної конференції,присвяченої пам'яті академіка М.П.Кравчука (Київ-Луцьк ,22-28 верес. 1992 р.)-Київ-Луцьк, 1992. С. 137.

3.Моторная О.В. О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве $L_{[-1,1]}$ // Тез.доп. міжнар. конф."Теорія та задачі обчислювальної математики ", Дніпропетровськ,26-29 трав.1993р.- Дніпропетровськ,С. 128.

4.Моторная О.В. О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в пространстве L_1 . -Киев,1993.-20 с.-(Препр./ АН Украины. Ин-т математики; 93.20).

5.Моторная О.В. Об асимптотической оценке наилучших приб-

лижений дифференцируемых функций алгебраическими много-
членами в пространстве L_1 //Укр.матем.журн.1993. -45,№6.
-С.859-862.

Підп. до друку Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0,98 Ум. фарбо-відб. 0,93 Обл.-вид. арк. 0,65
Тираж 100 пр. Зам. 271 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3