

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

На правах рукописи

БЕГМУРАТОВ Кудратилла Алиевич

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.02.01 – теоретическая механика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Кудратилла Алиевич

Киев – 1993



Диссертация является рукописью.

Работа выполнена в Институте механики АН Украины.

Научный руководитель – член-корреспондент АН Украины,
профессор МАРТЫНЮК А.А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник ЛОПАТИН А.К.
кандидат технических наук, старший
научный сотрудник ЗАДОРЖНИЙ В.Ф.

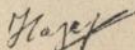
Ведущая организация -- Киевский университет

Защита диссертации состоится "30" ноября 1993 г.
в 12 часов на заседании специализированного ученого совета
К 016.49.01 Института механики АН Украины (252057, Киев-57,
ул. Нестерова, 3).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Института механики АН Украины.

Автореферат разослан "15" октября 1993г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор технических наук,
профессор

 В.М. Назаренко

ТВ-28.393

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из фундаментальных методов исследования различных свойств динамических систем является второй метод или метод функций А.М.Ляпунова, предложенный им в харьковский период научной деятельности. Существенное развитие этот метод получил в трудах П.Абетса, Е.А. Барбашина, Р.Беллмана, С.И.Горжина, Н.П.Еругина, В.И.Зубова, Н.Н.Красовского, Ж.Ла-Салля, И.Г.Малкина, В.М.Матросова, А.А.Мартынюка, К.П.Персидского, В.В.Румянцева, Н.Руша и других авторов.

Развитие метода функций Ляпунова связано, прежде всего, с изучением важных динамических свойств, основанных на понятии устойчивости по Ляпунову, таких как устойчивость при постоянно действующих возмущениях, устойчивость в целом, абсолютная устойчивость, устойчивость относительно части переменных и т.п. Оно стимулировано тем, что основной метод исследования устойчивости - второй метод Ляпунова - оказался применимым к широкому кругу сложных систем благодаря использованию векторных функций Ляпунова. В этой связи следует отметить работы Ф.Н.Бейли, Р.Беллмана, Л.Т.Груйича, В.М.Матросова, А.А.Мартынюка, Г.И.Мельникова, А.Н.Мишела, В.В.Румянцева, В.Д.Фурасова, Д.Шильяка, В.А.Якубовича и др.

Наиболее эффективным оказался метод функций Ляпунова применительно к качественной теории сложных крупномасштабных систем. Существенные результаты в этом направлении содержатся в работах Л.Т.Груйича, А.Н.Мишела, А.А.Мартынюка, Д.Шильяка, Л.А.Анапольского и других авторов.

Крупномасштабные системы могут рассматриваться как совокупность динамических компонент, составляющих в определенной комбинации устойчивые субансамбли (подсистемы), которыми моделируется система более сложной конфигурации. Представление системы как иерархической структуры обладает рядом преимуществ, основными из которых являются: возможность расчленения рассматриваемой системы, обеспечение исследования решаемой проблемы по частям, повышение адаптивности и надежности системы в целом, возможность выделения и стандартизации модулей, ориентированных на решение упрощенных задач, и координации таких задач в единой системе. Следовательно, исходя из этого,

многие ученые использовали иерархическую декомпозицию для определения устойчивости крупномасштабных систем. В работе Д. Шильяка описан способ вертикальной декомпозиции КМС и указан путь построения вектор-функции Ляпунова на основе локальных функций для подсистем первого и второго уровня.

А.А. Мартынюком дано определение иерархической матричной функции Ляпунова и указан подход к применению скалярной функции Ляпунова, построенной на основе иерархической матрицы-функции. Использование этого подхода в теории устойчивости движения в известной степени облегчает построение подходящей скалярной функции Ляпунова, так как в качестве элементов иерархической матрицы-функции могут быть выбраны функции, которые удовлетворяют значительно менее жестким требованиям, чем в методе скалярной или векторной функций Ляпунова. В то же время вопрос о способах построения и применения иерархической матрицы-функции остается актуальным.

Особый интерес в этом направлении представляет вопрос о способе полного учета связей между иерархическими подсистемами, что должно найти отражение в способах построения внедиагональных элементов иерархической матрицы-функции. При этом достаточные условия устойчивости состояния равновесия формулируются в терминах знакоопределенности специальных матриц.

Цель работы. Разработка критериев устойчивости (неустойчивости) решений крупномасштабных систем с помощью скалярной функции Ляпунова, построенной на основе иерархической матрицы-функции. Приложение полученных результатов к задачам абсолютной устойчивости КМС типа систем Лурье.

Метод исследования. В диссертации разработан прямой метод Ляпунова, основанный на иерархической матричной функции для исследования динамических свойств систем; устойчивости и неустойчивости решений систем, моделируемых КМС обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна результатов состоит в следующем:

1. Для крупномасштабных систем с конечным числом степеней свободы установлены достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости при определенной модели горизонтальной иерархической структуры.

2. Для КМС с конечным числом степеней свободы установлены

достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости при определенной модели вертикальной иерархической структуры.

3. Установлены достаточные условия абсолютной устойчивости КМС типа систем Лурье-Постникова при горизонтальной и вертикальной моделях иерархических структур.

Научная и практическая ценность. Для широкого класса механических систем, моделируемых крупномасштабными системами, найдены новые достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости. Для систем автоматического регулирования типа систем Лурье-Постникова получены различные достаточные условия абсолютной устойчивости.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы были доложены на ХУП научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины (г.Киев, май 1992 г.), на ХУШ научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины (г.Киев, май 1993 г.), на Украинской конференции "Моделирование и исследование устойчивости процессов" (г.Киев, май 1993 г.), на заседаниях семинара "Теория устойчивости и ее приложения" Научного Совета АН Украины по проблеме "Общая механика" в Институте механики АН Украины (руководитель - чл.-корр. АН Украины, проф. А.А.Мартынюк), на семинаре по направлению "Теория колебаний и устойчивости движения механических систем" в Институте механики АН Украины.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1 - 7]. Автор выражает искреннюю благодарность чл.-корр. АН Украины, проф. А.А.Мартынюку за постановку задачи и постоянную поддержку в работе.

Объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы, содержащего 121 наименование. Общий объем диссертации - 106 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертационной работы обосновывается актуальность разрабатываемой темы, приводятся краткий обзор использованной литературы и содержание диссертации.

В первой главе рассматривается КМС, допускающая определенного типа горизонтальную иерархическую структуру. Получены различные достаточные условия устойчивости и неустойчивости состояния равновесия рассматриваемой системы на основе иерархической матричной функции Ляпунова.

В первом параграфе проводится определение КМС

$$\mathcal{C}: \quad dx/dt = f(t, x), \quad x \in R^n \quad (1)$$

и излагается известная декомпозиция на взаимосвязанные подсистемы

$$\mathcal{C}_\kappa: \quad dx/dt = g_\kappa(t, x_\kappa) + h_\kappa(t, x_1, \dots, x_m), \quad \kappa = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

Такая декомпозиция названа в диссертации декомпозицией первого уровня.

Предлагается развитие способа декомпозиции КМС (I), заключающееся в том, что из КМС (I) выделяются (i, j) -пары взаимосвязанных подсистем в виде

$$\mathcal{C}_{ij} = \begin{cases} dx_i/dt = g_i(t, x_i, x_j) + h_i^*(t, x_1, \dots, x_m), \\ dx_j/dt = g_j(t, x_i, x_j) + h_j^*(t, x_1, \dots, x_m). \end{cases}$$

Формально вектор-функции h_i^* определяются по формулам

$$h_i^* = f_i(t, x_1, \dots, x_m) - f_i(t, 0, x_i, x_j, 0), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Такое развитие декомпозиции КМС названо декомпозицией второго уровня.

Во втором параграфе вводится определение иерархической матричной функции и ее знакоопределенность. В конце параграфа приведены общие теоремы об устойчивости и неустойчивости КМС на основе иерархической матричной функции Ляпунова.

В иерархической матричной функции

$$U(t, x) = [u_{ij}(t, \cdot)], \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

функции $u_{ii}(t, \cdot)$ построены для независимых подсистем первого уровня, а функции $u_{ij}(t, \cdot)$, $i \neq j$ построены для независимых подсистем второго уровня. С помощью матричной функции (4) и вектора $\eta \in R^m$ вводится функция

$$V(t, x, \eta) = \eta^T U(t, x) \eta \quad (5)$$

Далее определяется полная производная матрицы-функции $U(t, x)$ в следующем виде:

$$D^+ U(t, x) = [D^+ u_{ij}(t, x_i, x_j)]; \quad (7)$$

$$D_+ U(t, x) = [D_+ u_{ij}(t, x_i, x_j)], \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

где $D^+ U(t, x)$ ($D_+ U(t, x)$) - верхняя (нижняя) правая производная Дини функций u_{ij} относительно (t, x_i, x_j) .

Третий параграф посвящен получению достаточных условий асимптотической (равномерной) устойчивости (в целом) состояния равновесия $x = 0$ системы (1). Для этого вводятся некоторые предположения, которые дают возможность оценить функцию (5) и ее производную $D^+ V(t, x, \eta)$ в силу системы (1).

Лемма 1.1. Если выполняются условия а), а') предположений 1.1 и 1.2 (см. диссертацию, стр. 31), то функции

$$V(t, x) = \eta^T U(t, x) \eta, \quad \eta' \in R^m \quad \eta > 0$$

удовлетворяют оценкам

$$\eta^T \psi^{(1)}(\|x\|) \eta \leq V(t, x) \leq \eta^T \psi^{(2)}(\|x\|) \eta,$$

где

$$\psi^{(\kappa)} = [\psi_{ij}^{(\kappa)}] \quad \text{и}$$

$$\psi_{ij}^{(\kappa)} = \begin{cases} \psi_{ik}(\|x\|), & i=j \\ \frac{\psi_{ij}^{(\kappa)}}{\|x_{ij}\|}, & (i \neq j) \in [1, m], \quad \kappa = 1, 2 \end{cases}$$

и является положительно определенной и убывающей.

Лемма 1.2. Если выполняются условия б), в), б'), в') предположений 1.1 и 1.2, то для полной производной функции (5) справедлива оценка

$$D V(t, x) \leq \varphi^T(\|x\|) A \varphi(\|x\|), \quad (9)$$

где

$$\varphi(\|x\|) = (\varphi_1^{1/2}(\|x_1\|), \dots, \varphi_m^{1/2}(\|x_m\|))^T, \quad A = \frac{1}{2} (B + B^T),$$

и элементы B_{ij} матрицы B определяются с помощью постоянных, которые участвуют в оценках компонент $\Delta u_{ij}(t, \cdot)$ и вводятся в предположениях.

Теорема 1.1. Пусть выполняются условия предположений I.1 и I.2, а также

- 1) матрица $A \in R^{m \times m}$ в оценке (9) отрицательно полуопределенная;
- 2) матрица $L \in R^{m \times m}$ в оценке (9) отрицательно определенная.

Тогда невозмущенное движение системы (1)

- 1) равномерно устойчиво;
- 2) асимптотически равномерно устойчиво.

Если дополнительно в условиях предположений I.1 и I.2

- $N_i = R^{n_i}$, $N_j = R^{n_j}$ функции ψ_{i1} , ψ_{i2} , ψ_i , F_{ij}^1 , F_{ij}^2 принадлежат классу Хана, то состояние равновесия
- 1) равномерно устойчиво в целом;
 - 2) асимптотически равномерно устойчиво в целом.

В конце параграфа приведен численный пример системы третьего порядка.

В четвертом параграфе вводятся предположения, которые дают возможность оценить снизу производную элементов функции (5) и установить условия неустойчивости нелинейных КМС.

Теорема 1.2. Пусть выполняются:

- 1) условия а), а) предположений I.1 и I.2;
- 2) условия предположения I.3;
- 3) матрица $\tilde{A} \in R^{m \times m}$ в оценке (1.3.2) положительно определенная.

Тогда невозмущенное движение системы (1) неустойчиво.

В пятом параграфе рассмотрен общий случай линейной КМС. Здесь элементы матрицы-функции (4) строятся в виде:

$$u_{ii}(t, x_i) = x_i^T P_{ii}(t) x_i$$

$$u_{ij}(t, x_i, x_j) = u_{ji}(t, x_j, x_i) = x_{ij}^T P_{ij}(t) x_{ij},$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1; \quad j = 2, 3, \dots, m; \quad i < j,$$

где $P_{ii}(t)$, $P_{ij}(t)$ - непрерывные, симметрические, положительно-определенные матрицы для всех $t \in R_+$. Применяя

общие теоремы главы, получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом состояния равновесия линейной нестационарной КМС. Численный пример иллюстрирует технику использования матриц-функций в данной задаче.

Вторая глава посвящена исследованию задачи об устойчивости (неустойчивости) крупномасштабной системы, допускающей "вертикальную" иерархическую структуру. Получены различные достаточные условия устойчивости и неустойчивости состояния равновесия рассматриваемой системы на основе иерархической матричной функции Ляпунова.

В первом параграфе приводится определение КМС (I) и декомпозиция на взаимосвязанные подсистемы

$$dx_i/dt = f_i(t, x_i) + h_i(t, x), \quad (10)$$

где

$$x_i \in R^{n_i}, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_s = n, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

f_i и h_i - непрерывные вектор-функции соответствующих размерностей. Эта декомпозиция названа декомпозицией I-го уровня. Здесь

$$dx_i/dt = f_i(t, x_i) \quad (11)$$

независимые подсистемы, а $h_i(t, x)$ функции связи.

Далее, каждая из подсистем (II) декомпозируется к следующим

$$dx_{ij}/dt = f_{ij}(t, x_{ij}) + \eta_{ij}(t, x_i), \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, s \\ j = 1, \dots, M_i \end{matrix} \quad (12)$$

Построение системы (12) по системе (II) будем называть вертикальной декомпозицией второго уровня.

Второй параграф посвящен определению иерархической матрицы-функции Ляпунова. Здесь приводятся предположения, позволяющие оценить иерархическую матрицу-функцию Ляпунова и ее полную производную в силу системы (I).

Построение иерархической функции Ляпунова для системы (I) основано на применении матрицы-функции

$$U(t, x) = [U_{ik}(t, \cdot)], \quad U_{ik} = U_{ki}, \quad (13)$$

где

$$U_{ii}: \mathcal{T}_\tau \times R^{n_i} \rightarrow R, \quad i=1,2,\dots,s; \quad U_{i,k}: \mathcal{T}_\tau \times R^{n_i \times n_k} \rightarrow R \quad i \neq k, k=1,2,\dots,s$$

Явный вид функций U_{ii} следующий

$$U_{ii}(t, x_i) = \xi^T B_i(t, \cdot) \xi, \quad i=1,2,\dots,s,$$

где $\xi_i \in R^{n_i}$, $\xi_i > 0$ и субматрицы-функции

$$B_i(t, \cdot) = [u_{pq}^{(i)}(t, \cdot)], \quad p, q = 1, 2, \dots, M_i$$

с элементами:

$$u_{pp}^{(i)}: \mathcal{T}_\tau \times R^{n_{ip}} \rightarrow R, \quad u_{pq}^{(i)} = u_{qp}^{(i)}, \quad i=1,2,\dots,s,$$

$$u_{pq}^{(i)}: \mathcal{T}_\tau \times R^{n_{ip} - n_{iq}} \rightarrow R.$$

Функция

$$V(t, x, \eta) = \eta^T U(t, x) \eta \quad (I4)$$

при подходящих предположениях является иерархической функцией Ляпунова для всей системы (I), построенной на основе матрицы-функции (I3).

Предположения 2.1, 2.2 позволяет оценить функции (I4), а предположения 2.3, 2.4 позв ляет оценить выражение $D^+V(t, x, \eta)$.

Третий параграф содержит изложение достаточных условий устойчивости.

Теорема 2.1. Пусть вектор-функция $f(x)$ в системе (2.1.1) непрерывна на $R \times N$ (на $\mathcal{T}_\tau \times N$), а также

1) выполняются все условия предположений 2.1 - 2.4;

2) в оценках (2.2.6) и (2.2.10);

а) матрица A - положительно-определенная;

б) матрица B - положительно-определенная;

в) матрица S - отрицательно полуопределенная или тождественно равна нулю;

г) матрица S - отрицательно-определенная.

Тогда соответственно:

а) условия I), 2а), 2в) достаточны для устойчивости состояния $x=0$ системы (2.1.1) (на $\mathcal{T}_\tau \times N$);

б) условия I), 2а) - в) достаточны для равномерной устойчивости состояния $x=0$ системы (2.1.1) на $(\mathcal{T}_\tau \times N)$;

в) условия 1), 2а), б), г) достаточные для асимптотической равномерной устойчивости состояния $x=0$ системы (2.1.1) (на $\mathcal{T}_T \times N$).

В конце параграфа рассмотрен численный пример.

Четвертый параграф посвящен получению достаточных условий неустойчивости крупномасштабной системы. Здесь вводятся предположения, которые дают возможность оценить снизу выражение $DV(t, x, \tau)$.

Теорема 2.2. Пусть выполняются:

- 1) условия предположения 2.2;
- 2) условия предположения 2.5;
- 3) матрица $\tilde{S} \in R^{s \times s}$ в оценке (2.2.10) положительно определенная.

Тогда невозмущенное движение системы (2.1.1) неустойчиво.

В пятом параграфе рассмотрена линейная неавтономная система. Здесь матрицы-функции $U(t, x)$ имеют вид

$$U(t, x) = \begin{bmatrix} U_1(t, x_1) & U_3(t, x) \\ U_3(t, x) & U_2(t, x_2) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$U_i(t, x_i) = \xi_i^T B_i(t, \cdot) \xi_i, \quad i=1,2, \quad U_3(t, x) = x_1^T p_1(t) x_2 \\ \xi_i \in R^2, \quad p_1(t) - \text{произвольная непрерывная матрица,}$$

$$B_i(t, \cdot) = \begin{bmatrix} u_{11}^{(i)}(t, x_{i1}) & u_{12}^{(i)}(t, x_i) \\ u_{12}^{(i)}(t, x_i) & u_{22}^{(i)}(t, x_{i2}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Здесь

$$u_{11}^{(i)}(t, x_{i1}) = x_{i1}^T p_{i1}(t) x_{i1}, \quad u_{22}^{(i)}(t, x_{i2}) = x_{i2}^T p_{i2}(t) x_{i2}, \\ u_{12}^{(i)} = x_{i1}^T p_{i3}(t) x_{i2}, \quad i=1,2,$$

где $p_{i1}(t)$, $p_{i2}(t)$ - симметрические непрерывные и положительно-определенные матрицы при $\forall t \in K_+$; $p_{i3}(t)$ - произвольные непрерывные матрицы.

Теоремы 2.3 и 2.4 содержат достаточные условия устойчивости в целом и асимптотической устойчивости в целом состоя-

ния равновесия линейной неавтономной системы. В конце параграфа приведен численный пример.

В третьей главе диссертации прямым методом Ляпунова, основанным на иерархической матричной функции, исследуется абсолютная устойчивость нестационарных систем Лурье-Постникова, описываемых уравнениями

$$dx/dt = A(t)x + B(t)f(\sigma). \quad (17)$$

Первый параграф посвящен установлению достаточных условий абсолютно устойчивости системы (17) при горизонтальной иерархической структуре. Здесь ИММЛ построена в виде (5), а элементы иерархической матрицы-функции в виде (8). В теореме 3.1 получены достаточные условия абсолютной устойчивости нестационарных систем Лурье-Постникова.

Во втором параграфе исследуется задача абсолютной устойчивости системы (17) при вертикальной иерархической структуре. В этом случае ИММЛ построена в виде (14), а элементы матрицы-функции выбираются в следующем виде

$$U_{ii}(t, x_i) = \xi_i^T B_i(t, \cdot) \xi_i, \quad U_{ij} = U_{ji} = x_i^T \bar{D}_{ij}(t) x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, s,$$

где $\xi_i \in R^{n_i}$, $\bar{D}_{ij}(t)$ - произвольные, непрерывные матрицы.

$$B_i(t, \cdot) = [u_{pq}^{(i)}], \quad p, q = 1, 2, \dots, M_i.$$

Здесь

$$u_{pp}^{(i)} = x_{ip}^T D_{pp} x_{ip}, \quad u_{pq}^{(i)} = u_{qp}^{(i)} = x_{ip}^T D_{pq}^{(i)} x_{iq},$$

$D_{pp}^{(i)}$ - симметрические, непрерывные и положительно определенные матрицы при $\forall t \in R_+$, $D_{pq}^{(i)}(t)$ - произвольные непрерывные матрицы при $\forall t \in R_+$. В теореме 3.2 получены достаточные условия абсолютной устойчивости системы (17).

В заключительном параграфе главы рассматриваются численные примеры, иллюстрирующие технику применения теорем 3.1 и 3.2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты, полученные в работе, заключаются в следующем:

1) установлены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости, равномерной устойчивости в целом и равномерной асимптотической устойчивости в целом и неустойчивости нелинейных КМС при заданной модели горизонтальной иерархической структуры;

2) установлены достаточные условия устойчивости, равномерной устойчивости, равномерной асимптотической устойчивости и неустойчивости нелинейных КМС при заданной модели вертикальной иерархической структуры;

3) установлены условия устойчивости в целом, асимптотической устойчивости в целом линейной КМС при заданной модели вертикальной иерархической структуры;

4) установлены условия устойчивости в целом, асимптотической устойчивости в целом линейной КМС при заданной модели горизонтальной иерархической структуры;

5) установлены условия абсолютной устойчивости нестационарных систем Лурье-Постникова при заданной модели горизонтальной иерархической структуры;

6) установлены условия абсолютной устойчивости нестационарных систем Лурье-Постникова при заданной модели вертикальной иерархической структуры.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Бегмуратов К.А. О построении иерархической функции Ляпунова для линейной автономной системы // Тр. ХУП науч. конф. мол. ученых Ин-та механики АН Украины. - Киев, 1992. - С. 14-18. - Деп. в УкрИНТЭИ 7.07.92. - у 1022-Ук.92.
2. Бегмуратов К.А. Иерархическая матричная функция Ляпунова для линейной неавтономной системы // Докл. АН Украины. - 1992. - № 12. - С. 34-37.
3. Бегмуратов К.А. Анализ устойчивости неавтономных линейных систем // Тр. ХУШ науч. конф. мол. ученых Ин-та механики АН Украины. - Киев, 1993. - С. 17-20. - Деп. в УкрИНТЭИ.

4. Бегмуратов К.А. Иерархическая матричная функция Ляпунова в задаче об устойчивости движения // Украинская конф. "Моделирование и исследование устойчивости процессов". - Тез. докл. - Киев, 27-29 мая 1993. - С. 6.
5. Бегмуратов К.А., Мартынюк А.А. Иерархический метод построения функций Ляпунова при исследовании устойчивости невозмущенного движения // Прикл. механика. - 1993. - 29, № 5. - С. 80-83.
6. Мартынюк А.А., Бегмуратов К.А. Иерархическая матричная функция Ляпунова и ее применение // Электронное моделирование. - 1991. - 13, № 5. - С. 3-11.
7. Martyniuk A.A., Miladzhanov V.G., Begmuratov K.A. Construction of Hierarchical Matrix Lyapunov Function // Differential Equations and Dynamical Systems, Vol. 1, Number 1, January 1993. - P. 3-21.

Подл. в печ. 06.10.93. Формат 60x84/16. Бумага тип. С. о. печать.
Усл. печ. л. 0,93. Усл. кр.-отг. 0,93. Уч.-изд. л. 0,7. Тираж:
100 экз. Зак. 336. Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3

463942

AB 28.393

AB 28.393