

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН УКРАИНЫ

---

на правах рукописи

ЗВЯГИН Виктор Григорьевич

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЗМУЩЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Киев – 1998

78 20.357  
Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Официальные оппоненты: академик АН Украины, доктор физико-математических наук, профессор СКОРНИК И.В.,  
доктор физико-математических наук, профессор МИЩЕНКО А.С.,  
доктор физико-математических наук ШАРКО В.В.

Ведущая организация : Киевский политехнический институт

Защита состоится "23" ноября 1993 г. в 15 часов на заседании специализированного совета Д 016.50.01 при Институте математики АН Украины по адресу: 252601, Киев, ул. Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "12" октября 1993 г.

Ученый секретарь  
специализированного совета,  
доктор физико-математических наук

*Гусак*

ГУСАК Д.В.

ЛНБ України ім.В.Стефаника



00810671 (N)

Актуальность темы. С середины 60-х годов, после появления работы С.Смейла о множестве регулярных значений фредгольмовых отображений, было начато активное исследование фредгольмовых отображений банаховых многообразий и связанных с ними фредгольмовых структур. Эти объекты позволили естественно расширить многие понятия и методы конечномерной дифференциальной и алгебраической топологии: характеристические классы фредгольмовых расслоений и многообразий; теоремы трансверсальности; теорию степени; различные формы двойственности Пуанкаре и Александера-Понтригина; теорему Лейбница о совпадении /К.Д.Элворт, А.Дж.Тромба, У.Кожорке, Ф.Куни, Дж.Морава, Дж.Каллаган, Н.Крикориан, К.К.Мукерджи, Дж.Иллис/.

Однако сами понятия фредгольмовых отображений и фредгольмовых структур возникли существенно раньше. Так, фредгольмовы структуры появились в ранних работах А.Д.Михаля (*A. D. Michal*) /1928, 1939 гг./ при изучении аффинных связностей в локальной дифференциальной геометрии некоторых банаховых пространств. Нелокальное изучение фредгольмовых отображений нулевого индекса было начато впервые, по-видимому, в 50-е годы в работах Каччиополи, посвященных теории неориентированной степени таких отображений. Появлению этих работ тогда способствовала главным образом теория нелинейных эллиптических уравнений в частных производных /в первую очередь работы С.Н.Бернштейна/. Затем, в связи с прикладными успехами более простой теории степени отображений Лере-Шаудера /отображений вида  $I + k$ , где  $I$  - тождественный оператор, а  $k$  - вполне непрерывный/, интерес к фредгольмовым отображениям ослаб и возобновился лишь в 60-е годы. Одним из первых, кто в эти годы обратил внимание на необходимость развития этой тематики, был А.С.Шварц /1961 г., 4-й Всесоюзный математический съезд/.

К настоящему времени теория фредгольмовых отображений стала

весьма развитой и её прикладная значимость общепризнана: появляются новые топологические инварианты фредгольмовых отображений, удобные для исследования конкретных задач, проводится их вычисление /Фишпатрик, Пейсахович, Рабир/, осуществляется расширение класса фредгольмовых отображений и построение для расширенных классов теории степени /Ниренберг, Мовен, Хетцер, Петришин, Борисович Ю.Г./, с помощью теорем трансверсальности и теории степени удалось исследовать структуру множества решений ряда задач математической физики, дифференциальной геометрии, оптимального исчисления /Темам, Фояш, Со, Куитнер, Мотройки/, с её помощью проводится локальный и глобальный анализ задач теории бифуркации /Треногин, Логинов, Сапронов, Чиллингворт, Борисович А.Ю./, нашла она своё применение и в топологии четырёхмерных многообразий /Дональдсон, Фрид, Уленбек/ и теории минимальных поверхностей /А.Дж.Тромба/.

Целью работы является распространение теории степени на различные классы возмущений фредгольмовых отображений, вычисление топологических характеристик для ряда классов эквивариантных отображений и отображений, возникающих в теории нелинейных эллиптических краевых задач. Установление на этой основе существования собственных функций, глобальных и локальных бифуркаций, исследование собственности фредгольмовых отображений, возникающих в теории нелинейных эллиптических краевых задач, и исследование на этой основе, с использованием теории трансверсальности и теории степени, структуры множества решений этих задач.

Объект исследования - нелинейные фредгольмовы отображения и различные классы возмущений этих отображений.

Общая методика исследования. В диссертации использованы методы теории дифференцируемых многообразий, теории трансверсальности, теории эквивариантных отображений, теории нелинейных краевых задач.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Дано построение и исследование топологических характеристик типа степени для класса вполне непрерывных возмущений множества собственных фредгольмовых отображений индекса  $n \geq 0$  /коротко класса  $\Phi_n^{\infty} \text{С}^{\infty} \text{ВН}$  -отображений/.

2. Проведено вычисление этих характеристик для различных подклассов эквивариантных  $\Phi_n^{\infty} \text{С}^{\infty} \text{ВН}$  -отображений.

3. Дано приложение топологических характеристик  $\Phi_n^{\infty} \text{С}^{\infty} \text{ВН}$  -отображений к исследованию глобальных ветвей бифуркаций и собственных функции нелинейных эллиптических краевых задач.

4. Введены и в ряде случаев вычислены топологические характеристики для класса  $\mathcal{F}$  -компактно сжимаемых возмущений собственных фредгольмовых отображения индекса  $n \geq 0$  /коротко класса  $\Phi_n^{\infty} \text{С}^{\infty} \text{КС}$  -отображений/.

5. Исследованы примеры  $\Phi_n^{\infty} \text{С}^{\infty} \text{КС}$  -отображений, возникающие в уравнениях с частными производными.

6. Установлена собственность отображений, индуцированных нелинейными эллиптическими краевыми задачами, и на этой основе, с использованием теорем трансверсальности и результатов вычисления степени, исследована структура множества решений этих задач "в общем положении".

Теоретическая значимость. Полученные в диссертации результаты имеют теоретическую направленность. Топологические характеристики, введенные в работе, могут быть использованы при исследовании разрешимости и изучении структуры множества решений нелинейных краевых задач, в теории глобальной и локальной бифуркаций решений этих задач. Результаты диссертации могут быть использованы в монографиях и спецкурсах по бесконечномерной топологии и нелинейному функци-

нальному анализу.

Апробация работы. Отдельные результаты диссертации докладывались на международных топологических конференциях в Ленинграде (1982г.), Баку (1987г.), Киеве (1992г.), на всесоюзной топологической конференции в Минске (1977г.), во всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах Минск (1982г.), в Кемеровской всесоюзной школе "Оптимальное управление, геометрия и анализ" (1986г.), на республиканской конференции в Донецке (1981г.), на совместных заседаниях семинара И.Г.Петровского и Московского математического общества (1987г.), на совместных заседаниях семинара П.С.Александрова и Московского математического общества, общероссийском семинаре имени П.С.Александрова /декабрь 1990г./, на семинаре академика АН Украины И.В.Скрипника, в Московском госуниверситете на семинарах профессоров А.С.Мищенко и Ю.П.Соловьёва, в Воронежском гос. университете на семинарах профессора Ю.Г.Борисовича, в Воронежских математических школах (1981-1992г.г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в [1-22].

Объём и структура работы. Диссертация изложена на 285 страницах и состоит из введения, списка предварительных понятий, трёх глав и списка литературы из 129 наименований.

#### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава посвящена построению и исследованию топологических характеристических чисел  $n$ -го порядка для класса отображений вида: собственные  $C^r$ -гладкие  $n$ -мерные  $n$ -го порядка неотрицательного индекса  $n$  плюс вложение непрерывные /класса  $\Phi_n C^r \text{ в } \mathbb{R}^n$  -отображений/. В первом параграфе вводится аналог неориентированной степени для этого класса

отображений. Отметим, что метод, применённый С.Смейлом для определения неориентированной степени фредгольмовых отображений и связанный с использованием теоремы о плотности множества регулярных значений таких отображений, для класса  $\Phi_n C^{\tau} \text{ВН}$ -отображений не работает в связи с тем, что отображения из этого класса не являются гладкими. В случае исследуемого класса отображений оказалось полезным развитие метода определения неориентированной степени для фредгольмовых отображений нулевого индекса, состоящего в сведении исходной ситуации к конечномерной. Идея этого метода была предложена итальянским математиком Каччиоли ещё в сороковых годах, но обоснована для фредгольмовых отображений нулевого индекса лишь в восьмидесятых годах Ю.И.Сапроновым и несколько позднее С.А.Исхардом. Развитие этого метода для случая неориентированной степени  $\Phi_n C^{\tau} \text{ВН}$ -отображений было осуществлено автором диссертации в работе [1], котором мы и следуем в этом параграфе.

Пусть  $E$  — вещественное банахово пространство и  $X$  — ограниченное подмножество метрического пространства  $\hat{X}$ , на котором задана структура банахова многообразия с модельным пространством  $E$ . Через  $\bar{X}$  обозначим замыкание  $X$  в  $\hat{X}$ , а  $\partial X = \bar{X} \setminus X$ . Пусть  $f: \bar{X} \rightarrow F$  — собственное, непрерывное отображение со значениями в вещественном банаховом пространстве  $F$ , сужение  $f|_X: X \rightarrow F$  которого является  $C^{\tau}$ -гладким фредгольмовым отображением индекса  $n > 0$ ,  $\tau > n+1$ . Пусть  $k: \bar{X} \rightarrow F$  — вполне непрерывное отображение. Рассмотрим  $\Phi_n C^{\tau} \text{ВН}$ -отображение  $g = f + k: \bar{X} \rightarrow F$ . Предполагается, что  $g(u) \neq 0$ ,  $u \in \partial X$ , где  $0$  — нуль пространства  $F$ , т.е.  $g$  рассматривается как отображение пар  $(X, \partial X) \rightarrow (F, F \setminus 0)$ . Для определения неориентированной степени вначале предположим, что вполне непрерывное отображение  $k: \bar{X} \rightarrow F$  является конечномерным, т.е. существу-

ет конечномерное пространство  $F^p \subseteq F$  такое, что  $k(\bar{X}) \cong F^p$ . Пусть в этом случае  $L = g^{-1}(0) \neq \emptyset$ . Известно, что существует открытая окрестность  $0 \subseteq X$  компакта  $L$  и разложение  $F = F^q \times F^{\infty-q}$ , где  $\dim F^q = q$  такие, что сужение  $f|_0$  трансверсально подпространству  $F^q$ . Положим  $F^m = F^p + F^q$ . Тогда  $f|_0$  также трансверсально  $F^m$ . Обозначим  $M^{n+m} = f^{-1}(F^m) \cap 0$ . Это  $(n+m)$ -мерное  $C^2$ -гладкое многообразие, содержащее компакт  $L$ . Пусть  $N \subseteq M^{n+m}$  — открытая в  $M^{n+m}$  окрестность компакта  $L$ , замыкание которой  $\bar{N}$  также является компактом. Пусть  $2\varepsilon = \inf \{ \|g(u)\|, u \in \partial X \}$ . Аппроксимлируем отображение  $h = (f+k)|_{\bar{N}} : (\bar{N}, \partial \bar{N}) \rightarrow (F^m, F^m \setminus \{0\})$   $C^2$ -гладким отображением  $h_\varepsilon : \bar{N} \rightarrow F^m$ , для которого  $0$  является регулярным значением и таким, что  $\|h(u) - h_\varepsilon(u)\| < \varepsilon$ ,  $u \in \bar{N}$ . Тогда прообраз  $W^n = h_\varepsilon^{-1}(0)$  является  $C^2$ -гладким  $n$ -мерным многообразием, принадлежащим  $N$ . Класс неориентированных бордизмов  $[W^n]$  многообразия  $W^n$  в кольце неориентированных бордизмов Ролина-Тома и называется в этом случае неориентированной степенью отображения  $g = f+k$  относительно точки  $0$  и обозначается символом  $\deg_2(g, \bar{X}, 0)$ . Естественно следующее добавление: если  $g^{-1}(0) = \emptyset$ , то  $\deg_2(g, \bar{X}, 0)$  равно нулевому элементу кольца Ролина-Тома.

В том случае, когда вполне непрерывное отображение  $k$  не является конечномерным, для определения  $\deg_2(f+k, \bar{X}, 0)$  используется аппроксимация  $k$  конечномерным вполне непрерывным отображением. Доказывается корректность всех приводимых построений и исследуются основные свойства степени.

Приводится результат вычисления неориентированной степени  $\Phi_0 C^1 \text{BN}$ -отображений, являющийся аналогом известной теоремы Борсука-Мостеринга-Шпрейлмана о нечетности степени нечетного отображения сферы конечномерного пространства.

Пусть  $E, F$  — банаховы пространства,  $0_E, 0_F$  — нули соответственно пространств  $E$  и  $F$ .

**Теорема I.1.1.** Пусть  $D$  — открытая симметричная область пространства  $E$ , содержащая нуль  $0_E$ . Пусть  $f: \bar{D} \rightarrow F$  — собственное, непрерывное, нечётное отображение, сужение которого  $f|_D$  является  $C^1$ -гладким фредгольмовым отображением нулевого индекса, а  $k: \bar{D} \rightarrow F$  — нечётное, вполне непрерывное отображение. Предположим, что  $(f+k)(\partial D) \subseteq F \setminus 0_F$ . Тогда  $\deg_2(f+k, \bar{D}, 0_F) = 1$ .

В качестве следствия отметим обобщение одного результата Н. Рабиновича на случай  $\varphi_n C^1$  ВН-отображений.

**Следствие I.1.1.** Пусть  $f: E \rightarrow F$  — собственное, нечётное,  $C^1$ -гладкое фредгольмово отображение положительного индекса  $n$ , а  $k: E \rightarrow F$  — нечётное, вполне непрерывное отображение. Тогда для каждого  $\varepsilon > 0$  существует решение уравнения  $f(u) + k(u) = 0$  с нормой  $\|u\| = \varepsilon$ .

Приводится обобщение известного результата Биркгофа-Келлога-Роте.

**Теорема I.1.2.** Пусть  $f: (\bar{D}, \partial D) \rightarrow (F, F \setminus 0_F)$  — собственное, ограниченное,  $C^2$ -гладкое, фредгольмово отображение нестрого отрицательного индекса  $n$ ,  $\varepsilon > n+1$ , замкнутой области  $\bar{D}$  бесконечномерного банахова пространства  $E$ . Предположим, что степень  $\deg_2(f, \bar{D}, 0)$  отлична от нуля. Тогда, если для вполне непрерывного оператора  $k: \partial D \rightarrow F$  выполнено условие  $\inf_{u \in \partial D} \|k(u)\| > 0$ , то уравнение  $f(u) + \lambda k(u) = 0$  имеет по крайней мере одно решение

$u_1 \in \partial D$ , соответствующее положительному  $\lambda = \lambda_1$ , и одно решение  $u_2 \in \partial D$ , соответствующее отрицательному  $\lambda = \lambda_2$ .

Приводится приложение теоремы I.1.2 к проблеме собственных функций нелинейных эллиптических краевых задач.

В следующем параграфе этой главы рассматривается ситуация такого типа: пусть  $X$  — открытое подмножество банахова

ва пространства  $E$  и  $f, k: X \rightarrow E$  — соответственно  $C^z$ -гладкое и вполне непрерывное отображения  $X$  в вещественное банахово пространство  $F$ . Отказывается требование условий собственности и фредгольмовости  $f$  на всём  $X$  можно заменить предположением компактности множества решений уравнения  $f(u) + k(u) = 0, u \in X$ , и условием фредгольмовости  $f$  на этом множестве. В этой ситуации вводится топологический инвариант решений этого уравнения  $\text{ind}_2(f+k, X, 0)$  — индекс его решений, являющийся аналогом степени, описанной в первом параграфе. Из его свойств отметим свойство гомотопической инвариантности.

Пусть  $W$  — открытое подмножество  $E \times [0, 1]$ .  $f: W \rightarrow F$  —  $C^z$ -гладкое, а  $k: W \rightarrow F$  — вполне непрерывное отображения. Предположим, что  $L = (f+k)^{-1}(0) \subseteq W$  является компактом, отображение  $f$  является фредгольмовым индекса  $n+1$  на  $L$  (если  $L \neq \emptyset$ ),  $n \geq 0, z > n+1$ . Положим  $f_t(u) = f(u, t), k_t(u) = k(u, t), (u, t) \in W$  и  $W_t = W \cap (E \times \{t\}), t \in [0, 1]$ . Тогда справедливо

$$\text{Свойство 1.2.2. } \text{ind}_2(f_t + k_t, W_t, 0) = \text{ind}_2(f_0 + k_0, W_0, 0).$$

В третьем параграфе этой главы вводится редуцированная степень  $\Phi_n C^z \text{BN}$ -отображений. Как известно, Яворски и Тромба построили два варианта ориентированной степени для  $C^z$ -гладких фредгольмовых отображений индекса  $n \geq 0, z > n+1/2$ . Первый вариант обозначается символом  $d(f)$  и в этом варианте степень  $d(f)$  принимает свои значения в  $\mathcal{F}_n(X_\varphi)$  — множестве классов  $GL_c$  — оснащённо ориентированных троек в ориентированной структуре  $X_\varphi$ , согласованной с отображением  $f$ . Отметим, что  $\mathcal{F}_n(X_\varphi)$  является группой. Вторым вариантом ориентированной степени обозначается символом  $\tilde{d}(f)$ , называется редуцированной степенью и в этом варианте степень  $\tilde{d}(f)$  принимает свои значения в  $\mathcal{F}_n(B)$ , которое является фактор-множест-

вом множества всех  $GL_c$ -оснащённых троек  $S_n(X_\varphi)$  для ориентированных  $\Phi$ -структур  $X_\varphi$ , согласованных с  $\Phi$ -структурой, определяемой отображением  $f$ , по отношению  $GL_c$ -оснащённой бордантности в классе  $\mathcal{B}$ , где  $\mathcal{B}$ -класс согласованных с  $X_\varphi$   $\Phi$ -структур.  $S_n(\mathcal{B})$ , вообще говоря, не обладает групповой структурой. Эти варианты имеют преимущества и недостатки в сравнении друг с другом, однако их совместное использование позволяет компенсировать их недостатки.

Здесь определяется аналог редуцированной степени для  $\Phi_n C^2 \mathcal{B}H$ -отображений  $\tilde{d}(f+k, \bar{X}, 0)$ , изучаются его свойства и приложения.

Определение  $\tilde{d}(f+k, \bar{X}, 0)$  основано на развитии конструкции первого параграфа. Так же как и там, вначале рассматривается  $\Phi_n C^1 \mathcal{B}H$ -отображение  $(f+k): (\bar{X}, \partial X) \rightarrow (E, E \setminus 0)$ , где  $k$ -конечномерное вложение непрерывное отображение.  $\Phi$ -структура  $\{X, f\}_\Phi$  предполагается ориентированной и фиксируется её ориентация  $X_\Phi$ . Пусть  $L = (f+k)^{-1}(0) \neq \emptyset$  и  $O$  - такая открытая окрестность  $L$ , что  $f|_O \in F^P$ , где  $F^P$  -  $p$ -мерное подпространство  $F$ , содержащее образ  $k(\bar{X})$ . Пусть  $M^{n+p} = f^{-1}(F^P) \cap O$  и  $N$  - открытая ограниченная окрестность  $L$  в  $M^{n+p}$  с  $C^1$ -гладким краем  $\partial N$ . Существование  $h = (f+k)|_N: N \rightarrow F^P$  сколь угодно близко аппроксимируется  $C^1$ -гладким отображением  $h_\varepsilon: N \rightarrow F^P$ , для которого  $O$  является регулярным значением. Пусть  $W^n = h_\varepsilon^{-1}(0)$  и  $i: W^n \rightarrow X$  - естественное вложение.  $GL_c$ -оснащение  $\tau$  пары  $(W^n, i)$  в структуре  $X_\Phi$  задаётся следующим образом: вначале строится конечномерное оснащение  $W^n$  в  $M$ , а затем оно "достраивается"  $GL_c$ -оснащением многообразия  $N$  в структуре  $X_\Phi$ . Класс тройки  $(W^n, i, \tau)$  в  $S_n(\mathcal{B})$ , где  $\mathcal{B}$ -класс согласованных с  $X_\Phi$   $\Phi$ -структур, и называется в этом случае редуцированной степенью

$\bar{d}(f+k, \bar{x}, 0)$  отображения  $f+k$  относительно точки  $0$ .

Общий случай рассматривается аналогично тому как это сделано в первом параграфе.

Отметим, что вариант ориентированной степени  $d(f)$  на класс  $\Phi_n C^2 B H$  -отображений был перенесён Н.М.Ратинер, которая также следовала схеме, предложенной в [1].

В качестве приложения исследуется глобальное поведение ветви бифуркации следующей эллиптической краевой задачи:

$$F(x, u(x), \dots, \overset{2m}{D} u(x)) - \lambda u(x) = G(x, u(x), \dots, \overset{2m-1}{D} u(x), \lambda), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$B_j(x, D)u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad j=1, \dots, m, \quad (2)$$

где  $\Omega$  -ограниченная область евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  с  $C^\infty$  -гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $u(x)$  -комплекснозначная функция, принадлежащая соболевскому пространству  $W_p^{2m+1}(\Omega)$ ,  $p > n$ , и  $\lambda$  -комплексный параметр.

При исследовании этой задачи приходится применять обе ориентированные степени  $\Phi_n C^1 B H$  -отображений с положительным индексом  $n$ , а именно с  $n=1$ .

Проблема глобального поведения ветвей бифуркации задачи (1) - (2) эквивалентна аналогичной проблеме для операторного уравнения

$$f(u) - \lambda u = g(u, \lambda), \quad (3)$$

которое в дальнейшем и исследуется. Здесь  $f(u) = F(j^{2m} u)$ ,  $g(u, \lambda) = G(j^{2m-1} u, \lambda)$ . Для любого  $\tau > 0$  определяется отображение

$$\Phi_\tau(u, \lambda) = (f(u) - \lambda u - g(u, \lambda), \|u\|^2 - \tau^2)$$

и пусть  $B_{z,p} = \{ (u, \lambda); \|u\|^2 + |\lambda - \lambda_0|^2 \leq z^2 + p^2 \}$ .

**Теорема 1.3.2.** Пусть выполнены условия 1.3.1-1.3.3. Предположим, что собственное значение  $\lambda_0$  оператора  $A = f'(0)$  имеет кратность  $m$ . Тогда существуют сколь угодно малые положительные константы  $\tau$  и  $\rho$  такие, что степень  $\tilde{d}(\Phi_z, B_{z,p}, 0) \in \mathbb{Z}$  отображения  $\Phi_z$  определена и имеет место сравнение

$$\tilde{d}(\bar{\Phi}_z, B_{z,p}, 0) = m \pmod{2}.$$

В качестве следствия теоремы 1.3.2 приведём аналог теоремы М.А. Красносельского о бифуркациях с нечётнократным собственным значением.

**Следствие 1.3.1.** Пусть выполнены условия теоремы 1.3.2 и кратность собственного значения  $\lambda_0$  оператора  $A = f'(0)$  нечётна. Тогда точка  $(0, \lambda_0)$  является точкой бифуркации решений уравнения (3), а значит, и задачи (1)-(2).

Пусть  $\lambda_0$ -собственное значение оператора  $A = f'(0)$  нечётной кратности. Обозначим через  $W$  замыкание множества нетривиальных решений  $(u, \lambda)$  / т.е. решений  $(u, \lambda)$ ,  $u \neq 0$  / уравнения (3) а значит, и задачи (1)-(2). Пусть  $W'$  -связная компонента множества  $W$ , содержащая  $(0, \lambda_0)$ .

Из теоремы 1.3.2 и свойств степени  $d$  и  $\tilde{d}$  для  $\Phi_{z,p} \in \mathbb{Z}$  отображений вытекает следующий факт.

**Теорема 1.3.3.** Предположим, что выполнены условия 1.3.1-1.3.3. Тогда, либо а) компонента  $W'$  неограничена в  $E_1 \times \mathbb{C}$ ; либо б)  $W'$  содержит конечное число точек вида  $(0, \lambda_j)$ , где  $\lambda_j$  -собственные значения оператора  $A = f'(0)$ , при этом число таких точек, соответствующих собственным значениям нечётной кратности /считая и точку  $(0, \lambda_0)$ /, чётно.

Отметим, что впервые подобный факт для уравнений с оператором

лере-шаудеровского типа был впервые установлен П. Рабиновичем. В последующем этот факт обобщался многими авторами как с точки зрения охвата более широкого класса уравнений, так и более полной информации о ветвях решений.

Последний параграф первой главы посвящён вычислению ориентированной степени  $\Phi_0 C^1 B H$ -отображений, коммутирующих с действием группы  $Z_p$ ,  $p$  - простое число,  $S^1$  и тора  $T^2$ . Приводимые формулы выражаются либо через индексы Смита  $p$ -периодических операторов, соответствующих образующей группы  $Z_p$  и суженных на ядро и коядро производной фредгольмова отображения, вычисленной в неподвижной точке действия группы  $Z_p$ , либо через инварианты представлений этих групп на ядре и коядре этой производной.

Пусть  $E_1, E_2$  - вещественные банаховы пространства, в которых задано линейное представление группы  $Z_p$ , т.е. заданы гомоморфизмы  $T_i: Z_p \rightarrow GL(E_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Предполагается, что  $\text{Fix } T_i = \{0_i\}$ , где  $0_i$  - нуль пространства  $E_i$ ,  $i = 1, 2$ . Положим  $T_1(a) = A$ ,  $T_2(a) = B$ , где  $a$  - образующий элемент группы  $Z_p$ .

Пусть  $D$  - открытая,  $Z_p$ -инвариантная, ограниченная область банахова пространства  $E_1$ .  $f: E_1 \rightarrow E_2$  -  $Z_p$ -эквивариантное  $\Phi_0 C^1$ -отображение, сужение  $f|_{\bar{D}}$  которого является собственным отображением и  $k: \bar{D} \rightarrow E_2$  - вполне непрерывное,  $Z_p$ -эквивариантное отображение.

Теорема 1.4.1. Пусть  $0_1 \in D$ . Тогда для  $Z_p$ -эквивариантного  $\Phi_0 C^1 B H$ -отображения  $f+k: \bar{D} \rightarrow E_2$  с условием  $(f+k)(\partial D) \in E_2 \setminus 0_2$  в некоторой ориентации  $\Phi$ -структуры  $\{D, f\}_\Phi$  имеет место формула

$$\text{ind } \bar{A}|_{S_1} \cdot d(f+k, \bar{D}, 0_2) = \text{ind } \bar{B}|_{S_2} \pmod{p},$$

где  $\text{ind } \bar{A}|_{S_1}$ ,  $\text{ind } \bar{B}|_{S_2}$  -индексы Смита сужения оператора на единичную сферу пространства  $\text{Ker } D_f(0_1)$  и фактор-отображения  $\bar{B}$  отображения  $B$  на единичную сферу  $S_2$  пространства  $\text{Coker } D_f(0_1)$ .

Предположим теперь, что заданы линейные представления  $T_1$ ,  $T_2$  группы  $S^1$  соответственно в пространствах  $E_1$ ,  $E_2$  и множество неподвижных точек  $S^1$ -действий в пространствах  $E_1$ ,  $E_2$  состоит только из нулей соответствующих пространств. Пусть  $f: E_1 \rightarrow E_2$  -  $S^1$ -эквивариантное  $\Phi_C^1$ -отображение. Тогда определены конечномерные линейные представления группы  $S^1$

$$t_1 = \{ T_1(s) |_{\text{Ker } D_f(0_1)}, s \in S^1 \} \quad \text{в } \text{Ker } D_f(0_1),$$

$$t_2 = \{ \hat{T}_2(s), s \in S^1 \} \quad \text{в } \text{Coker } D_f(0_1).$$

Здесь  $\hat{T}_2(s): \text{Coker } D_f(0_1) \rightarrow \text{Coker } D_f(0_1)$  фактор-отображение отображения  $T_2(s)$ . Представления  $t_1$ ,  $t_2$  можно записать в комплексной форме в следующем матричном виде:

$$t_1(e^{2\pi i t}) \sim \text{diag}(e^{2\pi i k_1 t}, \dots, e^{2\pi i k_q t}), \quad (4)$$

$$t_2(e^{2\pi i t}) \sim \text{diag}(e^{2\pi i m_1 t}, \dots, e^{2\pi i m_r t}), \quad (5)$$

где  $m_i$ ,  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , -положительные целые числа, однозначно определяемые представлениями  $t_1$ ,  $t_2$  соответственно.

Пусть  $\bar{D}$  -открытая,  $S^1$ -инвариантная, ограниченная область банахова пространства  $E_1$ . Будем предполагать, что сужение  $f|_{\bar{D}}$  является собственным отображением. Пусть  $k: \bar{D} \rightarrow E_2$  -вполне непрерывное  $S^1$ -эквивариантное отображение.

Теорема 1.4.2. Пусть  $0 \in \bar{D}$ . Тогда для  $S^1$ -эквивариантного

$\Phi_0 C^1 \text{BH}$ -отображения  $(f+k): (\bar{D}, \partial D) \rightarrow (E_2, E_2 \setminus 0_2)$  в некоторой ориентации структуры  $\{D, f\}_{\Phi}$  имеет место формула

$$d(f+k, \bar{D}, 0_2) = \prod_{i=1}^q \frac{m_i}{k_i}, \quad (6)$$

где  $m_i, k_i, \dots, i=1, \dots, q$ , - числа, участвующие в (4) и (5).

Отметим, что для  $C^\infty$ -гладких отображений области пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , коммутирующих с двумя представлениями группы  $S^1$ , формула, аналогичная (6), установлена Л.Ниренбергом. Отличие состоит лишь в том, что Л.Ниренбергом использованы представления группы  $S^1$  во всем пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ , а не на подпространствах  $\text{Ker } Df(0_1)$   $\text{Coker } Df(0_1)$ , как в теореме I.4.2.

Далее, в теории конечномерных отображений известно, что степень отображения, коммутирующего с одним и тем же действием  $S^1$  равна единице. Для  $S^1$ -эквивариантных  $\Phi_0 C^1 \text{BH}$ -отображений это не так. Приводится препятствие, возникающее для справедливости соответствующего аналога теории конечномерной степени. Для простоты предположим, что  $E$  является вещественным гильбертовым пространством. Имеет место разложение  $E = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus E_n$ , где  $E_n$  -  $S^1$ -инвариантное подпространство, соответствующее неприводимому представлению, заданному матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi n t & -\sin 2\pi n t \\ \sin 2\pi n t & \cos 2\pi n t \end{pmatrix}.$$

Пусть  $A: E \rightarrow E$  -  $S^1$ -эквивариантный линейный фредгольмов оператор. Тогда  $A(E_n) \subseteq E_n$ . Следовательно, определено сужение  $A_n = A|_{E_n}: E_n \rightarrow E_n$  оператора  $A$  на подпространство  $E_n$ . Очевидно, что каждый оператор  $A_n$  является также фредгольмовым и, следовательно, определен его индекс  $\text{Ind } A_n = \dim \text{Ker } A_n - \dim \text{Coker } A_n$ .

Набор индексов  $\{\text{ind } A_n\}$  обозначается символом  $\mu(A, S^1)$  и называется  $S^1$ -мультииндексом оператора  $A$ .

Итак, пусть линейное  $S^1$ -действие на  $E$  имеет единственную неподвижную точку  $0$  — нуль этого пространства и  $f: E \rightarrow E$  —  $S^1$ -эквивариантное  $\Phi_0 C^1$ -отображение. Тогда  $Df(0)$  также  $S^1$ -эквивариантный оператор и, следовательно, определён  $S^1$ -мультииндекс  $\mu(Df(0), S^1)$ .

Пусть  $\bar{D}$  — ограниченная область пространства  $E$ , инвариантная относительно действия  $S^1$  и содержащая  $0$ . Предположим, что сужение  $f|_{\bar{D}}$  является собственным отображением и пусть  $k: \bar{D} \rightarrow E$  — вполне непрерывное  $S^1$ -эквивариантное отображение. Кроме того, предположим, что  $(f+k)(\partial\bar{D}) \subseteq E \setminus \{0\}$ .

В этой ситуации имеет место следующая

Теорема 1.4.3. Если  $\mu(Df(0), S^1) = 0$ , то в некоторой ориентации  $\Phi$ -структуры  $\{\bar{D}, f\}_\Phi$  справедливо равенство

$$d(f+k, \bar{D}, 0) = 1.$$

В последней части параграфа приводятся формулы вычисления индекса особой точки  $\Phi_0 C^1$ -отображения, эквивариантных относительно линейного действия тора  $T^2$ .

Во второй главе продолжено расширение класса собственных фредгольмовых отображений таким образом, чтобы для элементов расширенного класса можно было определять аналоги степени отображений.

В первом параграфе этой главы дано ряд обобщений понятий теории уплотняющих векторных полей, оказавшихся полезными в исследуемой нами ситуации. В частности, отображение  $g: \bar{X} \rightarrow E$  называется  $\mathcal{A}$ -компактно сужаемым, если из того, что множество  $A = \{u \in \bar{X}; \mathcal{A}(u) = g(u)\}$  не пусто, следует, что существует фундаментальное множество  $T$  пары  $\{\mathcal{A}, g\}$ , для которого сужение  $g|_{\mathcal{A}^{-1}(T)}$  является вполне непрерывным отображением.

Ясно, что вполне непрерывное отображение является  $\mathcal{A}$ -компактно-

но сужаемым для любого  $A$ . Приводятся также два важных класса  $A$ -компактно сужаемых отображений, а именно: класс  $A$ -предельно компактных отображений и класс  $A$ -уплотняющих отображений.

В этом же параграфе доказывается один из ключевых моментов для введения топологических характеристик новых классов отображений.

**Теорема 2.1.1.** Пусть  $T$  — фундаментальное множество пары  $\{A, g\}$  и существует ретракция  $\rho: E \rightarrow \overline{\text{co}} [g(A^{-1}(T))]$ . Тогда  $(A - g)^{-1}(0) = (A - \rho g)^{-1}(0)$ .

В следующем параграфе излагается метод распространения теории степени  $\Phi_n C^{\infty} \text{ВН}$ -отображений на более широкий класс возмущенных множеств  $\Phi_n C^i$ -отображений.

Пусть  $X$  — ограниченное подмножество метрического пространства, на котором задана структура банахова многообразия,  $E$  — вещественное банахово пространство. Предположим, что задано непрерывное, собственное отображение  $g: \bar{X} \rightarrow E$  такое, что сужение  $f|_X: X \rightarrow E$  является  $\Phi_n C^i$ -отображением,  $n > 0$ , и пусть  $g: \bar{X} \rightarrow E$  —  $f$ -компактно сужаемое отображение. Отображения вида  $(f - g): \bar{X} \rightarrow E$  в дальнейшем называются  $\Phi_n C^i \text{КС}$ -отображениями.

Далее предполагается, что индуцированная отображением  $f$  на  $X$  фредгольмова структура  $\{X, f\}_\Phi$  ориентируема и из этой структуры выбрана ориентированная структура  $X_\Phi$ . Пусть выполнено также условие  $f(u) - g(u) \neq 0$  для всех  $u \in \partial X$ . В этой ситуации определяется редуцированная степень  $\tilde{d}(f - g, \bar{X}, 0)$  со значениями в  $\tilde{S}_n(b)$ , где  $b \in \overline{\text{co}}_n(X)$  — класс согласованных структур, содержащих структуру  $X_\Phi$ , следующим образом: если  $(f - g)(X) \neq \emptyset$ , то выбирается какое-нибудь фундаментальное множество  $T \subseteq E$  для пары  $\{f, g\}$  и пусть  $\rho: E \rightarrow \overline{\text{co}} [g(f^{-1}(T))]$  — ретракция на  $\overline{\text{co}} [g(f^{-1}(T))]$ . Тогда для  $\Phi_n C^i \text{ВН}$ -отображения  $f - \rho g$  определена степень  $\tilde{d}(f - \rho g, \bar{X}, 0)$ .

По определению полагается  $\tilde{d}(f-g, \bar{x}, 0) = \tilde{d}(f-pq, \bar{x}, 0)$ .  
 Если же  $(f-g)^{-1}(0) = \emptyset$ , то  $\tilde{d}(f-g, \bar{x}, 0)$  полагается равным нулевому элементу  $\mathbb{F}_n(b)$ .

Для так определённой степени сохраняются все свойства редуцированной степени  $\Phi_n C^1 BH$ -отображений. Совершенно аналогично, используя ту же конструкцию, для  $\Phi_n C^1 KC$ -отображений  $(f-g)(\bar{x}, \partial X) \rightarrow (E, E \setminus 0)$  определяются ориентированная степень  $d(f-g, \bar{x}, 0)$  и неориентированная степень  $\deg_d(f-g, \bar{x}, 0)$ , являющиеся аналогами соответствующих степеней для  $\Phi_n C^1 BH$ -отображений.

Приведённая в этом параграфе схема определения степени  $\Phi_n C^1 KC$ -отображений носит в определённом смысле универсальный характер. Она позволяет распространить теорию степени на отображения вида:  $f-g$ , где  $g: A \rightarrow B$  - компактно сужаемое отображение, а  $f: A \rightarrow B$  принадлежит такому классу отображений, который содержит свои вполне непрерывные возмущения и для которого уже построена теория степени. К числу таких классов относится класс отображений, удовлетворяющих условию  $\delta$ ) И. В. Скрыпника. Мы применяем схему расширения области определения степени и к этому классу отображений.

Степень таких "расширенных" классов отображений позволяет исследовать некомпактные возмущения известных краевых задач.

В третьем параграфе, рассматривая приложение ориентированных степеней  $d$  и  $\tilde{d}$   $\Phi_0 C^1 KC$ -отображений, и исследуется задача с "некомпактными возмущениями"; а именно аналог задачи (I) - (-), отличающийся от неё тем, что нелинейность  $G$  зависит и от производных функции до порядка  $2m$ .

$$F(x, u(x), \dots, \mathbb{V} u(x)) - \lambda u(x) = G(x, u(x), \dots, \mathbb{V}^{2m} u(x), \lambda), \quad x \in \Omega.$$

$$B_j(x, \mathbb{D})u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, m.$$

Решение этой задачи изучается в вещественном соболевском пространстве  $W_p^{2m+1}(\Omega)$ ,  $p > n$ . Нелинейность  $G$  и порождает "некомпактное возмущение", что требует использования степени  $\Phi_0 C^1 K C$ -отображений. Отметим также, что все функции, участвующие в этой задаче, вещественные, что приводит к нескольким иным результатам вычисления степени соответствующих отображений, чем в задаче (1) - (2). В частности, для отображения

$$\Phi_r(u) = (f(u) - \lambda u - g(u, \lambda), \|u\|^2 - r^2),$$

где  $f(u) = F(j^{2m}u)$ ,  $g(u, \lambda) = G(j^{2m}u, \lambda)$ , справедлив следующий результат.

Теорема 2.3.1. Пусть выполнены условия 2.3.1 - 2.3.5. Предположим, что собственное значение  $\lambda_0$  оператора  $\Pi f(0)$  имеет кратность  $m$ . Тогда существуют сколь угодно малые положительные константы  $\tau$  и  $\rho$  такие, что степень  $\tilde{d}(\Phi_r, B_{\tau, \rho}, 0) \Phi_0 C^1 K C$ -отображения  $\Phi_r$  определена и имеет место равенство

$$\tilde{d}(\Phi_r, B_{\tau, \rho}, 0) = \begin{cases} 2, & \text{если } m \text{ нечётно;} \\ 0, & \text{если } m \text{ чётно.} \end{cases}$$

Получен также аналог результата П. Рабиновича о альтернативном поведении глобальной ветви бифуркации рассматриваемой задачи.

В следующем параграфе этой главы приводятся примеры  $\Phi_n C^1 K C$ -отображений из теории краевых задач эллиптического типа и печально-краевых задач для параболических уравнений с возмущениями запаздывающего типа. Иллюстрируется применение степени  $\Phi_n C^1 K C$ -отображений к такого типа задачам.

В последнем, пятом параграфе этой главы результаты вычислений степени эквивариантных  $\Phi_n C^1 K C$ -отображений относительно дейст-

вий группы  $Z_p$ ,  $p$  - простое число, и  $S^1$  переносятся на случай  $\Phi_0 C^1 K C$  -отображения /теоремы 2.5.1-2.5.3/. Кроме того, рассматриваются  $\Phi_0 C^1 K C$  -отображения относительно  $z$  -мерного тора  $T^z$  в следующей ситуации.

Пусть  $E_1, E_2$  - вещественные банаховы пространства, на которых задано линейное действие тора  $T^z$ , и  $A: E_1 \rightarrow E_2$  -  $T^z$  - эквивариантный линейный фредгольмов оператор индекса нуль. Пусть

$F_i$  - множество неподвижных точек действия  $T^z$  на  $E_i$ ,  $i=1,2$ . Предполагается, что  $A|_{F_1}: F_1 \rightarrow F_2$  является фредгольмовым оператором индекса нуль /условие 5.1.1/.

Фактор-представление

$$t_1(\varphi): \text{Ker } A / (\text{Ker } A \cap F_1) \rightarrow \text{Ker } A / (\text{Ker } A \cap F_2), \varphi \in T^z,$$

представления  $T_1|_{\text{Ker } A}$  в некотором базисе в комплексной форме записывается в виде

$$\text{diag} (e^{2\pi i(k^1, \sigma)}, \dots, e^{2\pi i(k^q, \sigma)}),$$

где  $k^j = (k^j_1, \dots, k^j_z)$ ,  $j=1, \dots, q$ , - ненулевые целочисленные векторы,  $\varphi = (e^{2\pi i\sigma_1}, \dots, e^{2\pi i\sigma_z})$ ,  $0 \leq \sigma_i \leq 1$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_z)$ .

Аналогично, фактор-представление

$$t_2(\varphi): E_2 / (J_m A + F_2) \rightarrow E_2 / (J_m A + F_2), \varphi \in T^z,$$

представления  $T_2$  также в некотором базисе в комплексной форме записывается в виде

$$\text{diag} (e^{2\pi i(m^1, \sigma)}, \dots, e^{2\pi i(m^q, \sigma)}),$$

где  $m^j = (m_{1j}, \dots, m_{2j})$ ,  $j = 1, \dots, q$ , — также ненулевые целочисленные векторы. Без ограничения общности можно считать, что норма в пространстве  $E_1$   $T^2$ -инвариантна. Пусть  $B$  — замкнутый шар пространства  $E_1$  с центром в нуле радиуса  $R_0$  с границей  $\partial B$  и пусть  $g: B \rightarrow E_2$  —  $T^2$ -эквивариантное,  $A$  — компактно сужаемое отображение. Будем предполагать, что для пары  $\{A, g\}$  существует  $T^2$ -инвариантное, фундаментальное множество  $R$ .

**Теорема 2.5.4.** Предположим, что относительно  $A$  и  $g$  выполнены приведенные выше условия.  $(A-g)(\partial B) \subseteq E_2 \setminus \{0_2\}$ . Пусть  $\dim F_1 \geq 1$ . Тогда имеет место формула

$$d(A-g, B, 0_2) = \prod_{j=1}^q \frac{(w, m^j)}{(w, k^j)} d((A-g)|_{(F_1 \cap B)}, F_1 \cap B, 0_2)$$

где  $w = (w_1, \dots, w_2)$  — некоторый целочисленный вектор.

Для приложений тех топологических характеристик, о которых шла речь выше, наряду с условием фредгольмовости необходимо и свойство собственности отображения  $f$ . Третья глава и посвящена исследованию этого свойства и близких к этому вопросу для одного наиболее интересного для приложений класса фредгольмовых отображений, порождаемого нелинейными краевыми задачами эллиптического типа. В частности это позволяет на основе свойства собственности и теорем трансверсальности установить структуру множества решений этих задач в ситуации "общего положения".

В первом параграфе третьей главы исследуется ситуация, когда краевые условия общей нелинейной эллиптической задачи

$$F(x, u(x), \dots, D^{2m} u(x)) = h(x), \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

$$G_k(x, u(x), \dots, D^{m_k} u(x)) = \varphi_k(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad k=1, \dots, m, \quad (8)$$

фиксированы.

Теорема 3.1.1. Пусть  $F \in C^{l-2m+p}(\Omega \times \mathbb{R}^{N(2m)})$ ,  
 $G_k \in C^{l-m_k+p}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{N(m_k)})$ ,  $k=1, \dots, m$ ,  $l > 2m + [\frac{l}{2}] + 1$ ,  
 выполнены условия 3.1.1-3.1.3 и  $p > d > 0$ , где  $d$  - Фредгольмов  
 индекс задачи (7)-(8). Предположим, что для решения задачи (7)-(8)  
 имеет место априорная оценка  $\|u\|_p \leq C(\|h\|_{C^{l-2m}} + \sum_{k=1}^m \|\varphi_k\|_{C^{l-m_k-\frac{1}{2}, \partial\Omega}})$ ,  
 где  $c(t)$ ,  $t \geq 0$ , вообще говоря, нелинейная, ограниченная на от-  
 раниченных множествах функция. Пусть краевые условия  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$   
 задачи (7)-(8) зафиксированы. Тогда существует открытое плотное мно-  
 жество  $O \in \mathbb{H}^{l-2m}(\Omega)$  такое, что для любого  $h \in O$  множество  
 решений краевой задачи (7)-(8) с данными фиксированными  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$   
 либо пусто, либо представляет собой объединение конечного числа связ-  
 ных, непересекающихся между собой,  $C^p$ -гладких, компактных подмногооб-  
 разий пространства  $\mathbb{H}^l(\Omega)$  размерности  $d$ .

В следующем параграфе изучается конечность множества решений  
 задачи Дирихле для общего нелинейного уравнения второго порядка, эл-  
 липтического на множестве решений при условии, что правая часть это-  
 го уравнения фиксирована, а именно рассматривается задача Дирихле  
 для нелинейного уравнения второго порядка

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = h(x), \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (10)$$

при условии, что  $u \in X$  - некоторому открытому подмножеству прост-  
 ранства  $C^{m+2, d}(\bar{\Omega})$ .

Теорема 3.2.1. Пусть функция  $F$  является эллиптической на  
 решениях уравнения (9) из  $X$ . Предположим, что  $h \in C^{m, d}(\bar{\Omega})$   
 фиксирована,  $m \geq 2$ , и для любого  $g \in C^{m+2, d}(\partial\Omega)$  имеет место  
 априорная оценка решений задачи (9)-(10) из  $X$ , т.е. если  $u \in X$   
 -решение задачи (9)-(10), то  $\|u\| \leq C(\|g\|_{C^{m+2, d}})$ , где  $c(t)$  -

положительная функция, ограниченная на ограниченных подмножествах  $\mathbb{R}^1$ . Тогда существует открытое, плотное множество  $O \in C^{m+2, \alpha}(\partial\Omega)$  такое, что для любого  $g \in O$  множество решений задачи (9)-(10) из  $X$  состоит не более чем из конечного числа элементов пространства  $C^{m+2, \alpha}(\bar{\Omega})$ .

Этот факт также основывается на свойстве компактности множества решений соответствующей задачи и теореме трансверсальности, которая является модификацией теоремы трансверсальности Абрахама. В качестве приложения исследуется множество решений задачи Дирихле для обобщённого уравнения Монжа-Ампера.

Пусть  $\Omega$  — строго выпуклая, ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с  $C^\infty$ -гладкой границей  $\partial\Omega$ . Рассматривается задача

$$\det\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \psi(x, u(x), Du(x)), \quad x \in \Omega, \quad (11)$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (12)$$

Пусть  $\mathcal{C}$  — минимальная из главных кривизн поверхности  $\partial\Omega$ . Предполагается, что  $0 < \gamma < \psi(x, u, p) < \psi(|p|)$ , где  $\psi(t) \geq 1$  — невозрастающая функция, причём  $\psi(t), \mathcal{C}, \|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$  связаны соотношением

$$1 < n \mathcal{C} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{\psi(t+\beta_g)} dt, \quad \beta_g = \left(1 + \frac{4n}{\mathcal{C}^2}\right) \|g\|_{C^2(\partial\Omega)}.$$

Предполагается, что  $\psi \in C^{m+2}(\alpha)$ , где  $\alpha = \{(x, u, p); x \in \bar{\Omega}, u \in \mathbb{R}^1, p \in \mathbb{R}^n\}$ ,  $m \geq 2$ . Решение ищется в  $X = C^{m+2, \alpha}(\bar{\Omega}) \cap W^-$ , где  $W^-$  — множество выпуклых вниз функций.

**Теорема 3.2.3.** Существует открытое, всюду плотное множество  $O$  в пространстве  $C^{m+2, \alpha}(\partial\Omega)$  такое, что для каждого  $g \in O$  задача (11)-(12) имеет нечётное число решений, принадлежащих  $X$ .

В последнем параграфе этой главы исследуется собственность фредгольмовых отображений, порождённых общей нелинейной эллиптической краевой задачей, в гёльдеровских пространствах  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Первая попытка в этом направлении была предпринята Элворти и Тромба, доказавшими абстрактное утверждение, из которого следовала собственность обсуждаемых отображений в некоторых подпространствах гёльдеровских пространств, а именно, в  $A^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ -пространствах, являющихся замыканием  $C^\infty$ -гладких функций по норме пространства  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Здесь же собственность доказывается во всём пространстве  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  при минимальных условиях гладкости на функции, входящие в уравнение.

Итак, рассматривается общее нелинейное эллиптическое уравнение

$$F(u)(x) = F(x, u(x), Du(x), \dots, D^{2m}u(x)) = 0, \quad x \in \Omega,$$

и общие краевые условия

$$G_j(u)(x) = G_j(x, u(x), Du(x), \dots, D^{m_j}u(x)) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где  $\Omega$  —ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^{k,\alpha}$ ,  $k \geq 2m$ . Порядки граничных дифференциальных операторов  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , для простоты пусть удовлетворяют неравенству  $0 = m_j < 2m$ .

Пусть  $Q$  —ограниченное подмножество  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{M(2m)}$ ,  $\partial Q = Q \cap (\partial\Omega \times \mathbb{R}^{M(2m)})$ . Укажем условия на функции  $F(x, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{2m})$  и  $G_j(x, \eta_0, \dots, \eta_{m_j})$ ,  $j = 1, \dots, m$ :

A<sub>1</sub>) функция  $F$  имеет непрерывные частные производные до порядка  $k-2m$  включительно по всем переменным, причём эти производные на  $Q$  являются функциями класса  $A^{0,\alpha}$  по переменным

$(x, \eta_0, \dots, \eta_{2m-1})$  и непрерывно дифференцируемы по переменным

$$\eta_{2m} = \{ \eta_\beta; |\beta| = 2m \} ;$$

A<sub>2</sub>) для любых  $(x, \eta)$  из  $Q$  оператор

$$L_v(x) = \sum \frac{\partial P(x, \eta)}{\partial \eta_\beta} D^\beta v(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (13)$$

удовлетворяет условию равномерной эллиптичности;

A<sub>3</sub>) функции  $G_j$  имеют непрерывные частные производные до порядка  $k - m_j$  включительно по всем переменным, причём эти производные на  $\partial \Omega$  являются функциями класса  $\Lambda^{0, \alpha}$  по переменным

$(x, \eta_0, \dots, \eta_{m_j-1})$  и непрерывно дифференцируемы по переменным

$\eta_{m_j};$

A<sub>4</sub>) линейные операторы

$$B_j v(x) = \sum_{|j|=m_j} \frac{\partial G_j(x, \eta)}{\partial \eta_j} D^j v(x), \quad x \in \partial \Omega, \quad j = 1, \dots, m,$$

удовлетворяют условию дополнителности по отношению к оператору  $L$  определённого в (13).

Пусть  $u \in C^{2m}(\Omega)$ . Обозначим через  $\Gamma_u$  подмножество множества  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{N(2m)}$ , определяемое равенством  $\Gamma_u = \{ j^{2m} u(x) = (x, u(x), \dots, D^{2m} u(x)), x \in \bar{\Omega} \}$ .

Теорема 3.3.3. Пусть  $\bar{D}$  - ограниченное замкнутое подмножество из  $C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $k \geq 2m$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  - ограниченная область класса  $C^{k, \alpha}$  и  $\Gamma_{\bar{D}} = \bigcup_{u \in \bar{D}} \Gamma_u$ . Если функции  $F, G_j, j = 1, \dots, m$ , удовлетворяют условиям A<sub>1</sub>-A<sub>4</sub>) в некоторой окрестности  $Q$  множества  $\Gamma_{\bar{D}}$  то отображение

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \bar{D} &= C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{k-2m, \alpha}(\bar{\Omega}) \times \prod_{j=1}^m C^{k-m_j, \alpha}(\partial \Omega), \\ \mathcal{F}[u] &= (F[u], \theta_1[u]|_{\partial \Omega}, \dots, \theta_m[u]|_{\partial \Omega}) \end{aligned}$$

является собственным на  $\bar{D}$ .

Приводятся приложения к проблеме существования и единственности

решений краевых задач, основанные на свойстве компактности множества решений этих задач, топологическом принципе Ганнаха-Мазура-Каччиополи и теореме о нечётности степени нечётного отображения. А именно, рассматривается задача

$$F(x, u(x), \dots, D^{2m} u(x)) = h(x), \quad x \in \Omega, \quad (14)$$

$$D_n^j u|_{\partial\Omega} = \varphi_j(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (15)$$

где  $\Omega$  — ограниченная область с  $C^\infty$ -гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $D_n^j u|_{\partial\Omega}$  — производная порядка  $j$  по направлению внешней нормали  $\vec{n}$  к границе  $\partial\Omega$ ,  $h \in C^{k-2m, d}(\bar{\Omega})$ ,  $\varphi_j \in C^{k-j, d}(\partial\Omega)$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ ,  $k \geq 2m$ . Предполагается, что  $F$  является  $C^{k-2m, d}$ -гладкой функцией своих переменных и для  $F$  выполнено условие равномерной эллиптичности на любой функции  $u \in C^{k-2m, d}(\bar{\Omega})$ . Кроме того, предполагается, что для задачи (14)–(15) имеет место априорная оценка решений

$$\|u\|_{k, d} \leq C \left( \|h\|_{k-2m, d} + \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{k-j, d, \partial\Omega} \right), \quad (16)$$

где  $C: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  — функция, ограниченная на ограниченных подмножествах  $\mathbb{R}_+^i$ .

**Теорема 5.3.4.** Предположим, что выполнены перечисленные выше условия. Тогда, если для любого  $u \in C^{k, d}(\bar{\Omega})$  линейризованная краевая задача

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha} (j^{2m} u(x)) D^\alpha v(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$D_n^j v|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

имеет только нулевое решение, то краевая задача (14)–(15) однозначно разрешима при любой правой части  $h \in C^{k-2m, d}(\bar{\Omega})$  и любых краевых условиях  $(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}) \in \prod_{j=0}^{m-1} C^{k-j, d}(\partial\Omega)$ , причём имеет место непрерывная зависимость решений этой задачи от краевых условий и правой части.

Отмечается также, что при наличии оценки (I6) из условия единственности задачи (I4)-(I5) следует ее разрешимость (теорема 3.3.5).

Автор выражает признательность профессору Ю.Г.Борисовичу за постоянную поддержку и внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Звягин В.Г. О существовании непрерывной ветви собственных функций нелинейной эллиптической задачи // Дифференц. уравнения. - 1977. - 13, № 8. - С. 1524 - 1527.
2. Звягин В.Г. К теории эквивариантных фредгольмовых отображений // 7-я Всесоюз. топологическая конф. Минск, июль 1977 г.: Тез. докл. - Минск, 1977. - С. 80.
3. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г. Об одном топологическом принципе разрешимости уравнений с фредгольмовыми операторами // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1978. - 3. - С. 204 - 207.
4. Звягин В.Г. Об одном топологическом методе исследования краевых задач, нелинейных относительно старшей производной // Граничные задачи математической физики. - Киев, 1981. - С. 35-37.
5. Звягин В.Г. Глобальная обратимость фредгольмовых отображений // Ленинградская международная топологическая конференция, Ленинград, апр. 1982 г.: Тез. докл. - Ленинград, 1982. - С. 172.
6. Звягин В.Г. Дiffeоморфизмы банаховых пространств, порожденные задачей Дирихле для эллиптических уравнений // Школа по теории операторов в функциональных пространствах, Минск, июнь 1982 г.: Тез. докл. - Минск, 1982. - С. 66.
7. Звягин В.Г. К теории обобщенно уплотняющих возмущений непрерывных отображений // Топологические и геометрические методы в математической физике: Новое в глобальном анализе. - Воронеж,

1983. - С. 42-62.

8. Звягин В.Г. О конечности числа решений краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения // Всесоюзн. шк. "Оптимальное управление, геометрия и анализ" Кемерово, май 1986 г.: Тез. докл. - Кемерово, 1986. - С. 82.
9. Звягин В.Г. О числе решений некоторых краевых задач // Глобальный анализ и математическая физика: Новое в глобальном анализе. - Воронеж, 1987. - С. 60-72.
10. Звягин В.Г. Собственность дифференциальных операторов и число решений краевых задач // Бакинская международная топологическая конференция, Баку, окт. 1987 г.: Тез. докл. - 1987. - Ч.2. - С.120.
11. Звягин В.Г. Собственность дифференциальных операторов и число решений краевых задач // Успехи мат. наук. - 1987. - 42, вып. 4. - С. 143.
12. Звягин В.Г. О структуре множества решений нелинейной эллиптической краевой задачи при фиксированных граничных условиях // Топологические и геометрические методы анализа: Новое в глобальном анализе. - Воронеж, 1989. - С. 152-158.
13. Звягин В.Г., Ратинер Н.М. Ориентированная степень фредгольмовых отображений неотрицательного индекса и ее приложение к задаче о глобальной бифуркации решений // Алгебраические вопросы анализа и топологии: Новое в глобальном анализе. - Воронеж, 1990. - С. 3-17.
14. Звягин В.Г. Степень фредгольмовых отображений, эквивариантных относительно действий окружности и тора // Успехи мат. наук. - 1990. - 45, вып. 2. - С. 205-206.
15. Звягин В.Г. О числе решений задачи Дирихле для уравнений эллиптических на множестве решений // Мат. заметки. - 1991. - 49, вып. 4. - С. 47-54.

16. Звягин В.Г., Дмитренко В.Т. Собственность нелинейных эллиптических дифференциальных операторов в пространствах Гельдера //Нелинейные операторы в глобальном анализе: Новое в глобальной анализе.- Воронеж, 1991.- С. 68-86.
17. Звягин В.Г. Об ориентированной степени одного класса возмущений фредгольмовых отображений и бифуркации решений нелинейной краевой задачи с некомпактными возмущениями //Мат. сб.- 1991.- 182, # 12.- С. 1740-1768.
18. Звягин В.Г. К теории степени эквивариантных -ото-бражений //IX Международная конференция по топологии и ее приложениям, Киев, окт. 1992 г.: Тез. докл.- Киев, 1992.- С. 17.
19. Zvyagin V.G. On the theory of generalized condensing perturbations of continuous mappings // Lecture Notes Math.- 1984.- 1106.-P.173-193.
20. Zvyagin V.G. On the number of solutions for certain boundary value problem // Lecture Notes Math.- 1986.- 1334.- P.157-172.
21. Zvyagin V.G. On the structure of the set of solutions of a non-linear elliptic problem with fixed boundary conditions // Lecture Notes Math.- 1990.- 1453.- P.309-320.
22. Zvyagin V.G. The properness of elliptic and parabolic differential operators // Lecture Notes Math.- 1990.- 1453.- P.137-159.

---

Подп. в печ. 28.04.93. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офо. печать.  
Усл. печ.л. I,86. Усл.кр.-отт. I,86. т.-изд.л. I,5. Тираж 100 экз.  
Зак. 176 . Бесплатно.

---

Отпечатано в Институте математики АН Украины.  
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская 3

463939

AB 28.394