АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

БОНДАР Ольга Петрівна

Р-КАТЕГОРІЯ І ФУНКЦІЇ З ВИРОДЖЕНИМИ СИНГУЛЯРНИМИ ПІДМНОГОВИДАМИ

01.01.01 – математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ

1993

Робота виконана у Київському університеті ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор ШАРКО В.В.

Офіційні опоненти – доктор фізико-математичних наук, професор ТАМРАЗОВ П.М.,
кандидат фізико-математичних наук ШКОЛЬНІКОВ Ю.А.

Провідна установа – Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова АН України

Захист відбудеться "9" листопада 1993 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано "8" жовтня 1993 р.

Учений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одне з центральних місць в теорії функцій на многовидах займає дослідження взаємозв'язку між топологією многовидів та критичними точками функцій, що задані на них. Найбільш повно цей взаємозв'язок відображено у випадку функції з невиродженими критичними точками. Так, ще М.Морс показав [5], що число критичних точок різних індексів диференційовної функції на многовиді пов'язане з гомологіями цього многовиду. Теорія Морса була розвинена у різних напрямках різними ученими. Так, Р.Том [7] довів існування на топологічному просторі структури клітинного простору, клітини якого відповідають критичним точкам функції на ньому. Це дозволило робити висновок про гомотопічний тип простору. С.Смейл [6] відкрив "розкладання на ручки", по одній ручці на кожну критичну точку, що дозволило отримати результати про диференціально-гомотопічний тип. Р.Ботт пов'язав структуру многовиду, на якому задано диференційовну функцію, з її невиродженими критичними підмноговидами.

В усіх цих дослідженнях важливу роль відіграє оцінка числа сингулярностей функції на многовиді, головним чином, нижня межа числа особливостей. Так, наприклад, з доведеної С.Смейлом теореми про точність нерівностей Морса випливала гіпотеза Пуанкаре у вимірностях, більших за п'ять, а також теорема про h-кобордизм. Люстернік і Шнірельман [1], Фролов і Ельсгольц [2] розвинули теорію Морса. Вони ввели нові інваріанти простору, що дозволило оцінити число критичних точок (в загальному випадку, вироджених) функції на многовиді. З потреб дослідження взаємозв'язку топології многовиду з сингулярними підмноговидами заданої на ньому функції виникає необхідність оцінки їх числа.

Мета роботи. Головна мета дисертації полягає в розробці і застосуванні методів оцінки числа вироджених сингулярних підмноговидів диференційовних функцій на многовидах.

Методика досліджень грунтується на загальних методах математичного аналізу, методах гомотопічної, диференціальної та загальної топології.

Наукова новизна: введено поняття Р-категорії топологічного простору, яке загальнює поняття категорії Люстерніка-Шнірельмана;

- обчислено Р-категорію деяких многовидів;

- введено поняття р-довжини многовиду, яке узагальнює поняття (ко)гомологічної довжини;

- обчислено р-довжину деяких многовидів;

- отримано оцінку Р-категорії многовиду у термінах його р-довжини;

- введено поняття Р-функції, що узагальнює поняття функції з ізольованими критичними точками;

- дано критерій існування Р-функцій на многовиді;

- отримано оцінку числа сингулярних підмноговидів Р-функцій в термінах Р-категорії;

- введено поняття точної Р-функції;

доведено існування точних Р-функцій на деяких многовидах;

- побудовано Р-функції на деяких многовидах.

Практична і теоретична цінність. Одержані результати можуть бути використані в теорії динамічних систем, а також у суміжних галузях теорії функцій та топології.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на науково-дослідницьких семінарах відділу топологічних методів аналізу Інституту математики АН України, на наукових семінарах Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 3].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох глав, кожна з яких має вступ та три параграфи і містить сторінок машинописного тексту. Список літератури налічує 40 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обгрунтовано актуальність теми дисертації, дано огляд найбільш близьких до цієї теми результатів, коротко викладено зміст дисертації, перераховано основні результати, що виносяться на захист, введено деякі означення і позначення.

У *першій главі* "Р-категорія топологічного простору" дано означення Р-категорії топологічного простору, введено поняття *p*-довжини многовиду, в термінах якого отримано оцінку Р-категорії многовиду, наводяться приклади обчислення *p*-довжини та Р-категорії многовидів.

У *§1.1* дано означення Р-категорії топологічного простору, розглянуто основні її властивості, а також зв'язок Р-категорії з категорією Люстерніка-Шнірельмана топологічного простору.

Означення (1.1). Нехай A, B, P – замкнені підмножини топологічного хаусдорфового простору, причому $P \subset B$ та $A \subset B$. *P-категорією* $Pcat_B A$ множини A відносно множини B називається мінімальне число k замкнених підмножин $A_1,\ldots,A_k$ в B, що мають властивості:

I. A є їх об'єднанням

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

2. Кожна з підмножин A_i стягується по множині B на P. Це означає, що для кожного $i=1,\ldots,k$ існує гомотопія

$F_i: A_i \times I \to B$ така, що

а) $F_i(x,0) = x, \quad x \in A_i$;

б) $F_i(x,t) \in B, \quad x \in A_i, \ 0<t<1$;

в) $F_i(x,1) = P_i \subset B$, де P_i гомеоморфно P.

Зокрема, якщо P – точка, то поняття P-категорії топологічного простору збігається з поняттям категорії Люстерніка-Шнірельмана. Серед розглядуваних властивостей P-категорії слід відзначити можливість її оцінки знизу за допомогою введеного С.В.Фроловим та Л.Е.Ельсгольцем поняття довжини многовиду.

Наслідок з властивості 4. Якщо P є замкненим підмноговидом многовиду M, то

$$Pcat M \geqslant \frac{\operatorname{long} M + 1}{\operatorname{long} P + 1},$$

де long M та long P позначають довжини многовидів M та P відповідно. Зокрема, якщо P – точка, то відома оцінка категорії Люстерніка-Шнірельмана многовиду M

$$\operatorname{cat} M \geqslant \operatorname{long} M + 1$$

збігається з отриманою оцінкою.

У §1.2 дано означення (ко)гомологічної p-довжини або p-довжини многовиду, в термінах якої отримано оцінку на P-категорію многовиду, вказано на зв'язок поняття p-довжини многовиду з поняттям довжини, наведено приклади обчислення p-довжини многовидів.

Означення (1.3) Нехай m - вимірність многовиду M та p - невід'ємне ціле число. Нехай $H^*(M;A)$ - кільце когомологій многовиду M, де $A=\mathbb{Z}$ або $\mathbb{R}$, якщо M є орієнтовним, та $A=\mathbb{Z}_2$, якщо M не є орієнтовним. Будемо розглядати всі такі числа q, що в кільці $H^*(M;A)$ існують елементи $a_1,\dots,a_q$ з наступними властивостями:

1) $\dim a_i > 0$, $i=1,\dots,q$;

2) добуток $a_1\dots a_q$ (множення в кільці $H^*(M;A)$ відмінний від нуля;

3) $\dim (a_1\dots a_q) \leq m - p$.

(Ко)гомологічною *p-довжиною* многовиду M називається максимальне з таких чисел q.

Якщо $p=0$, то третя умова виявляється зайвою, а означення p-довжини збігається з означенням довжини, введеним О.В.Фроловим та Е.Ельгольцем [ ]. За допомогою p-довжини можна оцінити P-категорію многовиду.

Теорема (1.5) Якщо многовид M - без краю, то його P-категорія не менше збільшеної на одиницю p-довжини многовиду:

$$\mathrm{Pcat}M \geq \mathrm{long}^p M + 1.$$

Якщо многовид M - з краєм, то його P-категорія не менше p-довжини многовиду:

$$\mathrm{Pcat}M \geq \mathrm{long}^p M.$$

Обчислено p-довжину двовимірних многовидів та деяких многовидів більшої вимірності. Відзначимо один з цікавих наслідків.

Твердження (1.9). P-довжина n-вимірного тора на p одиниць менша за його вимірність:

$$\operatorname{long}^p T^n = n - p.$$

У §1.3 обчислено P-категорію двовимірних многовидів та наведено приклади обчислення P-категорії деяких многовидів більшої вимірності. Серед важливих результатів відзначимо наступні твердження.

Твердження (1.11). Кругла категорія двовимірного компактного зв'язного многовиду дорівнює:

1) одиниці, якщо многовид гомеоморфний $S^1 \times I$ або стрічці Мебіуса;

2) двом - на інших многовидах з краєм;

3) двом, якщо многовид гомеоморфний сфері S^2, проективній площині RP^2, тору T^2 або пляшці Клейна;

4) трьом - на інших многовидах без краю.

Наслідок (1.15). Нехай P - k-вимірний тор. Тоді P-категорія n-вимірного тора дорівнює

$$T^k \operatorname{cat} T^n = n - k + 1,\ n \geq k.$$

Зокрема, кругла категорія n-вимірного тора дорівнює n.

У другій главі "Оцінка числа критичних підмноговидів функції на многовиді" дано означення P-функцій на многовиді, розглянуто умову їх існування, дано оцінку числа критичних підмноговидів функції на многовиді у термінах P-категорії многовиду, дано означення точних P-функцій та доведено їх існування на деяких многовидах.

У §2.1 дано означення P-функцій та розглянуто достатню умову їх існування на гладких компактних многовидах.

Означення (2.1). Диференційовна функція на многовиді, множина критичних точок якої є незв'язним об'єднанням гладких підмноговидів без краю, називається Р-функцією, якщо кожен її критичний підмноговид гомеоморфний деякому гладкому многовиду Р без краю.

Зауважимо, якщо Р - точка, то Р-функція - це функція з ізольованими критичними точками, в загальному випадку, виродженими.

Теорема (2.5). Нехай M^m - гладкий компактний многовид з краєм або без краю та нехай

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_k = M^m -$$

фільтрація M^m компактними многовидами з краєм такими, що

(а) M_i є многовидом з краєм, $i=1,\ldots,k-1$;

(б) $M_i \subset \operatorname{Int} M_{i+1}$, $i=1,\ldots,k-1$;

(в) $\partial M^m \subset (M_k \setminus M_{k-1})$;

(г) для кожного i, $i=1,\ldots,k$, многовид $(M_i \setminus \operatorname{Int} M_{i-1};\ \partial M_{i-1}, \partial M_i)$ припускає покриття трьома замкненими множинами такими, як у твердженні (2.4). Тоді на M^m існує Р-функція з числом критичних підмноговидів, рівним k.

У §2.2 сформульовано і доведено основну теорему про нижню межу числа критичних підмноговидів Р-функції на многовиді.

Теорема (2.12). Нехай М - гладкий компактний зв'язний многовид з краєм або без краю, f - Р-функція на ньому, котра у випадку многовиду з краєм приймає постійне максимальне значення на краю та не має на краю критичних точок. Тоді число критичних підмноговидів функції f більше або дорівнює Р-категорії многовиду М.

У §2.3 дано означення точної Р-функції на многовиді та круглої Р-функції, наведено приклади побудови точних Р-функцій.

Означення (2.13). Р-функція називається точною на многовиді, якщо число її критичних підмноговидів є мінімум критичних підмноговидів, взятий по усіх Р-функціях на многовиді.

Означення (2.14). Р-функція називається круглою, якщо її критичні підмноговиди гомеоморфні сфері S^1.

Теорема (2.15). Нехай множина $\{k_{i_1},\ldots,k_{i_r}\}$ є підмножиною множини $\{k_1,\ldots,k_n\}$ додатних цілих чисел. Нехай многовид

$$P = S^{k_{i_1}} \times \ldots \times S^{k_{i_r}}$$

є добутком k_{i_j}-вимірних сфер, $j=1,\ldots,r$. Тоді на многовиді

$$M = S^{k_1} \times \ldots \times S^{k_n}$$

існує точна Р-функція з числом особливостей, що дорівнює $n - r + 1$.

З цікавих наслідків слід відзначити існування на n-вимірному торі точної круглої функції з n особливостями, а також існування на непарновимірній сфері S^{2n+1} точної Р-функції, де $P=S^n$.

У *третій главі* "Р-функції на многовидах" побудовано Р-функції на двовимірних многовидах (які, до речі, є точними), наведено приклади Р-функцій на тривимірних многовидах та на многовидах більшої вимірності.

У *§3.1* розглянуто Р-функції на двовимірних многовидах.

Теорема (3.2). На многовиді, гомеоморфному сфері S^2, проективній площині RP^2 або диску D^2, не існує круглих функцій. На інших двовимірних гладких компактних зв'язних многовидах існують круглі функції.

Теорема (3.3). На будь-якому двовимірному гладкому компактному зв'язному многовиді, не гомеоморфному сфері S^2, проективній площині RP^2 або диску D^2, існує точна кругла функція з числом особливостей, що дорівнює:

1) двом, якщо многовид гомеоморфний тору T^2 або пляшці Клейна;

2) трьом - на інших многовидах без краю;

3) одиниці, якщо многовид гомеоморфний кільцю $S \times I$ або стрічці Ме іуса;

4) двом - на інших многовидах з краєм.

У §3.2 розглянуто Р-функції на тривимірних многовидах.

Теорема (3.4). На будь-якому тривимірному гладкому компактному зв'язному многовиді без краю існує кругла функція. На многовиді, гомеоморфному сфері S^3, проективній площині RP^3, многовиду $S^1 \times S^2$ або лінзовому простору, існує точна кругла функція з двома критичними колами. На інших тривимірних гладких компактних зв'язних многовидах існує кругла функція в числом особливостей, не більшим чотирьох.

Доведення теореми грунтується на попередніх результатах роботи. Його можливо отримати також в праць Вілсона, Фр ка, Франкса [3,4,8]

У §3.3 розглядаються Р-функції на n-вимірних многовидах.

Теорема (3.5). На n-вимірній сфері S^n не існує Р-функції, де Р - $(n-1)$-вимірна сфера S^{n-1}.

Теорема (3.6). Нехай S^k - k-вимірна сфера та $n \geqslant 2k + 1$. Тоді на n-вимірній сфері S^n існує Р-функція, число особливостей якої не перевищує $[n/2] + 1$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г. Топологические методы в вариационных задачах.-М.,1930.
2. Фролов О.В., Эльсгольц Л.Э. Нижняя граница числа критических значений функции, заданной на многообразии//Труды Второго Всес. мат. съезда.-19[illegible].-I.-С.125-127.
3. Frank G. Templates and train tracks//Trans. Amer.Math. Sos.-1988.-308, N2.-P.765-784.
4. Franks J. Homology and dynamical systems//Regional conference series in math.-1980.-49.-P.3-120.
5. Morse M. The calculus of variations in the large.- New York, 1934.-352p.
6. Smale S. The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions//Bull. Amer. Math. Sos.-1960.-66.-P.373-375.
7. Thom R. Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété//C.R.Acad. Sci. Paris 228, Ser.A.-1949.-P.973-975.
8. Wilson F. On the minimal sets of non-singular vector fields//Ann. of Math.-1966.-84.-P.529-536.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНО В НАСТУПНИХ РОБОТАХ

1. Бондарь О.П. О числе критических подмногообразий функции на многообразии//Укр. мат. журн.-1993.-45,№12.
2. Бондарь О.П. Оценка числа критических подмногообразий функции на многообразии.-Киев, 1993.-24с.-(Препр./ АН Украины, Ин-т математики; №93.29).
3. Bondar O.P. The minimal number of critical points of a smooth function on a manyfold//Тез. IX междунар. конф. по топологии и ее прил., Киев, 1992.-С.58.
4. Бондар О.П. Про кількість особливостей неперервної функції на гладкому компактному зв'язному замкненому многовиді // Респ. науч.-метод. конф., посвященная 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского.-Одесса, 1992.-С.42.
5. Бондарь О.П. Нижняя граница числа критических подмногообразий фунции на многообразии//Укр. конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем"(24-28 мая 1993г.,г.Киев).-Киев,1993.-С.2.

Підп. до друку 06.10.93. Формат 60×84/16.
Папір друк. Офс.друк. Ум. друк. арк. 0,7.
Ум. фарбо-відб. 0,7. Обл.вид.арк. 0,5.
Тираж 100 пр. Зам. 349. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська,3.

[illegible]