Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

МЕЛЬНИК Віра Леонідівна

УЗАГАЛЬНЕНО ОПУКЛІ МНОЖИНИ З ГЛАДКОЮ ТА МАЙЖЕ ГЛАДКОЮ МЕЖЕЮ

01.01.01. - математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико - математичних наук

Київ - 1993

Робота виконана у відділі топологічних методів аналізу Інституту математики АН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук ЗЕЛІНСЬКИЙ Ю.В.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук ШЕВЧУК І.О.
кандидат фізико-математичних наук САФОНОВ В.М.

Провідна установа Інститут кібернетики АН України

Захист дисертації відбудеться "9" ноября 1993р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою:
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інстититу.

Автореферат розіслано "8" октября 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

АВ-28,598

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В дисертаційній роботі розв"язуються задачі, що стосуються проблем опуклого та комплексного аналізу. Геометричні основи опуклого аналізу були закладені в класичних роботах Мінковського. Великий вклад в його розвиток зроблений працями Бонезена і Фенхеля на початку нашого століття. Поняття опуклості привернуло особливу увагу вчених в шістдесяті роки, коли було з"ясовано, яку велику роль відіграє воно в задачах лінійного програмування, теорії ігр та теорії оптимальних процесів. Першою монографією з опуклого аналізу стала праця американського математика Р.Рокафеллара. Дослідження були продовжені і суттєво розвинуті в роботах К.Лейхтвейса В.М.Тихомирова, А.Д. Иоффе, Б.Н.Пшеничного, А.Бренстеда та інших вчених.

В комплексному випадку ще в тридцяті роки Бенке і Пешлем було введено поняття лінійної опуклості області в $\mathbb{C}^2$ з двічі гладкою межею. Ними також в термінах знаковизначеності Гессіана були введені необхідні та достатні умови локальної лінійної опуклості. Деякий час ці питання комплексного аналізу залишались без уваги. І тільки в шістдесяті роки А.Мартіно і Л.А.Айзенбергом незалежно були закладені основи дослідження таких множин і їх застосування до аналітичних питань комплексного аналізу. Далі розвиток цих ідей зроблений в роботах А.П.Южакова, В.П.Кривоколеско, Б.С.Зінов"єва, С.В.Знаменського, Л.Я.Макарової, Ю.Б.Зелінського та інших.

Ю.Б.Зелінським був побудований лінійно опуклий аналіз, який є комплексним аналогом опуклого аналізу

Основними серед задач, що розв"язуються в дисертаційній роботі можемо виділити:

1) задачу топологічної класифікації (n - 1)-опуклих множин з гладкою межею;
2) задачу перенесення результатів, одержаних А.П.Южаковим та В.П.Кривоколеско стосовно властивостей обмежених локально лінійно опуклих областей з гладкими межами на випадок необмежених областей;
3) задачу дослідження лінійно опуклих областей з особливостями на межі.

Актуальність тематики, котра опрацьовується в роботі, зумовлена тим, що не зважаючи на те, що теорія опуклих множин набула останнім часом завершеного вигляду та знайшла широке застосування в аналізі, топології та прикладних галузях математики, її комплексний аналог містить цілий ряд нерозв"язаних задач, які в свою чергу породжують нові задачі особливо на стику опуклого аналізу з іншими математичними дисциплінами.

Мета роботи. Дослідження топологічних та геометричних властивостей узагальнено опуклих множин, а також пошук зв"язку між локальною та глобальною лінійною опуклістю множин в $\mathbb{C}^n$ та їх аналогами в проективних просторах. Дослідження лінійно опуклих множин з особливостями на межі.

Загальна методика виконання досліджень. В роботі використовуються методи досліджень дійсного, комплексного, функціонального та опуклого аналізу, геометрії та топології.

Новизна результатів та їх наукова цінність. Основні результати дисертації є новими і становлять певний теоретичний інтерес. Їх зміст полягає в наступному:

- досліджені властивості узагальнено опуклих множин та одержана топологічна класифікація (n - 1)-опуклих множин з гладкою межею;
- знайдена оцінка, яка зв"язує вимірність граней вихідної та спряженої множини;

доведено, що локально лінійно опуклі області в проективному просторі будуть лінійно опуклими;

- дана топологічна класифікація лінійно опуклих областей з майже гладкою межею, особливості якої лежать в гіперплощині.

Практична цінність. Отримані в дисертаційній роботі результати мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані в подальших дослідженнях задач, які виникають на стику опуклого аналізу та геометричних питань комплексного аналізу.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались і обговорювались на семінарах відділу топологічних методів аналізу Інституту математики АН України (під керівництвом Ю.Ю.Трохимчука), у Всесоюзній математичній школі "Комплексний аналіз" (Кацівелі, 1990 р.), у Міжнародних математичних школах "Теорія потенціалів" (Кацівелі, 1991 р. та Миколаївка, 1992 р.) та у Міжнародній математичній школі з сучасних питань теорії функцій та топології (Кацівелі, 1993 р.)

Публікації. Основні результати дисертації викладені в [1 - 6].

Структура і об"єм роботи. Дисертація об"ємом _____ сторінок машинопису, складається зі вступу, трьох розділів і списку цитованої літератури, що містить в собі __68__ найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі наведений короткий історичний огляд результатів, пов"язаних з темою дисертації, обгрунтовується актуальність проблематики, що розглядається, визначена мета досліджень та представлений короткий виклад основних результатів

Перша глава присвячена вивченню $(n - 1)$-опуклих множин. Для дослідження $(n - 1)$-опуклих множин вводиться поняття спряженої множини, близьке до поняття поляри. Досліджуються деякі властивості узагальнено опуклих множин.

В першому параграфі гл.I наводяться основні поняття і відомі факти, що далі використовуються в роботі. В другому параграфі вивчаються властивості спряжених множин. Для опуклої відкритої множини спряжена до неї множина буде співпадати з її полярою.

Наведемо декілька тверджень, які описують властивості таких множин.

Теорема 2.1. Для непустої множини $E \subset R^n$, яка містить початок координат, $\tilde{\tilde{E}} = E$ тоді і тільки тоді, коли множина E – $(n - 1)$-опукла.

Лема 2.1. Якщо E – $(n - 1)$-опукла множина, тоді і $\operatorname{Int} E$ також $(n - 1)$-опукла.

Теорема 2.2. Будь-яка $(n - 1)$-опукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$, що містить хоча б одну пряму є циліндром з твірними у вигляді паралельних один одному m-вимірних $(1 \leqslant m \leqslant n)$ афінних підпросторів не більше, ніж $(n - m)$-вимірною $(n - m - 1)$-опуклою основою Q, яка не містить жодної прямої.

Користуючись одержаними в §2 результатами, в §3 доводиться твердження, яке дає повну топологічну класифікацію $(n - 1)$-опуклих множин з гладкою межею.

Теорема 3.I. $(n - 1)$-опукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею є :

1) опукла множина, або

2) подається декартовим добутком $E = E^1 \cdot R^{n-1}$, або

3) складається не більше, як з двох необмежених компонент.

Примітка. Класи 1) - 3) не є взаємно виключними. Множина може належати двом і навіть трьом класам.

Тут же розглядаються приклади, які показують, що $(n - 1)$-опукла множина з гладкою межею може бути незв"язна і необмежені компоненти E_1 і E_2 множини E не обов"язково розташовані симетрично в той час, як їх рецесивні конуси центрально симетричні. Помічена в прикладах закономірність є правилом і доводиться в дисертації як наслідок з теореми 3.I.

В §4 вводиться новий клас множин $\mathfrak{B}$ в $\mathbb{R}^n$, які мають одну з наступних властивостей: E - $(n - 1)$-опукла множина, або $\mathrm{Int}\, E$ - $(n - 1)$-опукла і $E \subset \overline{\mathrm{Int}\, E}$. Введена гранна структура множин класу $\mathfrak{B}$. Досліджуються властивості виступаючих та строго виступаючих граней множин з класу $\mathfrak{B}$. Розглянуто ряд прикладів, які ілюструють той факт, що властивості, які виконуються для замкненої опуклої множини, не завжди справджуються для строго виступаючих граней множин класу $\mathfrak{B}$.

Доведений критерій належності точки до власної грані.

Теорема 4.I. Для кожного $y \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathfrak{B}$, $\theta \in \mathrm{Int}\, E$ (точка θ початок координат) дві умови, які наводяться нижче, рівносильні:

(a) $H(y,1)$ - гіперплощина, дотична до множини E;

(b) $y \in \partial\tilde{E}$.

Аналогічно, для кожного $x \in \mathbb{R}^n$, рівносильні дві умови:

(c) $H(x,1)$ - гіперплощина, дотична до $\tilde{E}$, $\theta \in \mathrm{Int}\, \tilde{E}$;

(d) $x \in \partial E$.

Основним результатом четвертого параграфу першої глави є теорема, що дає вимірну оцінку граней вихідної та спряженої множини з класу $\mathfrak{B}$.

Теорема 4.3. Нехай $\tilde{F}$ - грань, спряжена до виступаючої грані F множини $E \subset \mathfrak{B}$. Тоді $\dim F + \dim \tilde{F} \leqslant n-1$.

Дослідження другої глави присвячені лінійно опуклим та локально лінійно опуклим множинам. В цій главі поставлена задача вивчення властивостей перерізів довільних локально лінійно опуклих множин з гладкою межею. Зауважимо, що для області в $\mathbb{C}^n$ в нескінченно віддалених точках межі ми не можемо оцінити гладкість межі. Тому запропонована умова, при якій всі точки, в тому числі і нескінчено віддалені будуть рівноправні, а саме вкладемо область в проективний простір.

Основним результатом другої глави є наступна

Теорема 2.I. Нехай $D \subset \mathbb{C}P^n$ - локально лінійно опукла область з гладкою межею. Тоді D – сильно лінійно опукла область.

В доведенні теореми істотно використовуються три леми, що описують структуру області.

Лема 2.I. Нехай $D \subset \mathbb{C}P^n$ - локально лінійно опукла область з гладкою межею. Тоді переріз області D довільною проективною прямою зв"язний.

Лема 2.2. Нехай $D \cap S^1 \neq \emptyset$, де $D \subset \mathbb{C}P^n$ - локально лінійно опукла область з гладкою межею, S^1 - проективна пряма. Тоді $\overline{D \cap S^1} = \overline{D} \cap S^1$.

Лема 2.3. Нехай область $D \subset \mathbb{C}P^n$-локально лінійно опукла область з гладкою межею. Тоді D - лінійно опукла.

Останній параграф другої глави присвячений вивченню замикання лінійно опуклих областей.

Теорема 3.I. Нехай $D \subset \mathbb{C}P^n$ - сильно лінійно опукла область, межа якої ∂D - гладкий многовид, і така, що $\overline{D}$ не містить жодної проективної прямої. Тоді $\overline{D}$ - сильно лінійно опукла область.

Наведений приклад 3.1 показує, що, якщо D - сильно лінійно опукла область з негладкою межею, то замикання $\overline{D}$ вже не буде сильно лінійно опуклою множиною.

А другий приклад ілюструє той факт, що навіть гладкість межі сильно лінійно опуклої області в $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}P^n$ не забезпечує сильної лінійної опуклості (навіть лінійної опуклості) $\overline{D}$ в $\mathbb{C}P^n$.

В третій главі вивчаються можливості послаблення вимоги повної гладкості межі області для одержання сильної лінійної опуклості.

В §1 побудований приклад, для якого множина особливостей на межі межу не розбиває і множина точок гладкості всюди щільна на межі, але одержана область вже не буде сильно лінійно опуклою, тому що переріз її комплексною прямою незв"язний. З цього прикладу випливає, що прямо послабити вимогу на множину особливостей (вимагати тільки зв"язність множини $\partial D \setminus A$) не можна; тому далі досліджуються лінійно опуклі області з множинами особливостей спеціального виду.

В §2 вивчено властивості множин, що переносять на комплексний випадок конічну структуру. Це дозволяє в §3 досліджувати в проективному просторі лінійно опуклі області з особливостями на межі, які лежать в фіксованій гіперплощині, і показати, що такі області мають конічну або близьку до конічної будову.

Твердження 3.1. Якщо $D \subset \mathbb{C}P^n$ - лінійно опукла область з майже гладкою межею, особливості якої лежать в гіперплощині L, причому $D \setminus L$ - незв"язна множина. Тоді $D \setminus L$ буде внутрішністю множини, складеної з гіперплощин, які перетинаються по одній $(n-2)$-площині, що лежить в L.

Підсумком результатів §3 можна назвати теорему 3.1.

Теорема 3.1. Нехай $D \subset \mathbb{C}P^n$ - лінійно опукла область з майже гладкою межею, особливості якої лежать в гіперплощині L, $L \cap D = \emptyset$.

Тоді D має один з наступних видів:

$D = \operatorname{Int} B$, де B - множина, складена з гіперплощин, що перетинаються по одній $(n-2)$-площині, яка лежить в L, якщо $\partial D \setminus L$ - незв"язна множина.

2. Якщо $\partial D \setminus L$ - зв"язна множина, то

а) D - сильно лінійно опукла область, при цьому D гомеоморфна кулі, або

б) всі неоднозв"язні перерізи D прямими мають межею дві компоненти, причому одна з них точка, що належить L.

В §4 гл.III в комплексному випадку проводяться дослідження, аналогічні §4 гл.I, і встановлюється співвідношення між вимірностями спряжених граней для множин класу $\mathfrak{S}$, де клас $\mathfrak{S}$ - комплексний аналог класу $\mathfrak{B}$ з §4 гл.I.

Теорема 4.3. Нехай $\tilde{F}$ - грань, спряжена до виступаючої грані F множини $E \in \mathfrak{S}$, тоді $\dim F + \dim \tilde{F} \leqslant 2n - 2$.

Завершує дослідження лінійно опуклих множин твердження останнього параграфу, яке описує структуру межі та самої множини $E \subset \mathbb{C}^n$, замкненої, лінійно опуклої, з непустою лінійно опуклою межею.

Твердження 5.I. Нехай $E \subset \mathbb{C}^n$ - замкнена лінійно опукла множина з непустою лінійно опуклою межею, $\partial E \neq E$. Тоді $E = E_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$; $\partial E = \partial E_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Мельник В.Л. Об обобщенно выпуклых множествах. Киев, 1991.- 9 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91.1).
2. Мельник В.Л. (n - 1)-выпуклые множества. - Киев 1993 19 с. - (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 93.6).
3. Мельник В.Л. Некоторые свойства линейно выпуклых и локально линейно выпуклых областей // Всесоюзная математическая школа "Теория потенциалов", Кацивели, 26 июня - 3 июля 1991 г.: Тез. докл.- Киев, 1991. - С. 23.
4. Мельник В.Л. Об обобщенно выпуклых множествах // Симпозиум по общей топологии и ее приложениям, Кишинев, 9 - 14 сент. 1991 г.: Тез. докл. - Тирасполь, 1991 .-С. 138 - 139.
5. Мельник В.Л. Про лінійно опуклі області з гладкими межами // Міжвузівська науково - практична конференція, присвячена 75 - річчю Чернігівського державного педінституту - Чернігів: ЧДПІ, 1991 - Ч.2 - С. 24.
6. Зелинський Ю.Б., Мельник В.Л. О линейно выпуклых областях и аналитических полиэдрах. - Киев, 1993. - 21 с. - (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 93.34).

Підп. до друку14.09.93. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс.друк.
Ум..друк арк.0,69. Ум.фарбо-відпб. 0,69. Обл.-вид.арк. 0,45.
Тираж 100 пр.. Зам. 320 Безкоштовно.

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська,3.