АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ТИМОХА Олександр Миколайович

ПРЯМІ МЕТОДИ В НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ВІБРОАКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ

01.01.03 — математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ 1993

Робота виконана в Інституті математики АН України

Офіційні опоненти:

член-кореспондент АН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор

ФУЩИЧ В.І.

доктор фізико-математичних наук,
професор

КОПАЧЕВСЬКИЙ М.Д.

доктор фізико-математичних наук,
професор

СЕЛЕЗОВ І.Т.

Провідна установа: Київський державний університет ім. Т.Г. Шевченка

Захист відбудеться "7" грудня 1993 р. о ___ год. на засіданні Спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту

Автореферат розіслано 2 листопада 1993 р.

Вчений секретар Спеціалізованої ради

ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія хвиль на поверхні важкої рідини сформувалась в самостійний розділ математичних досліджень в працях Коші і Пуассона ще на початку XIX сторіччя. В цих працях були складені загальні рівняння задачі, отримана їх лінеаризована форма для хвиль малої амплітуди та проведені дослідження поширення малих хвиль на поверхні при досить загальних припущеннях відносно початкових збурень, що визначають процес хвилеутворення.

Найпростіша з задач теорії хвиль на поверхні рідини формулюється наступним чином:

$$\Delta\varphi=0 \text{ в } Q; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \text{ на } S; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\zeta_t}{|\nabla\zeta|}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}+0{,}5(\nabla\varphi)^2+gx=0 \text{ на } \Sigma, \qquad (1)$$

де $\varphi(x,y,z,t)$ - потенціал швидкостей, $\vec{n}$ - орт зовнішньої нормалі до границі області $Q(t)$, $S\subset\partial Q$ - поверхня порожнини твердого тіла, що змочується, $\Sigma(t)$ - невідома (вільна) поверхня рідини, g - прискорення сили ваги. (Крім граничних умов до задачі (1) необхідно додати відповідні початкові умови). Присутність двох нелінійних умов, які сформульовані на невідомій вільній поверхні $\Sigma(t)$, залежність від t област визначення відносять цю задачу до числа складних початково-крайових задач математичної фізики.

Найбільш суттєві ідеї, що застосовуються при аналізі та розв'язанні нелінійних задач (1) у випадку нескінченного об'єму були запропоновані в класичних працях Стокса, Релея, О.І. Некрасова. Велика кількість складностей математичного характеру, які зустрічаються при розв'язанні задач точної теорії поверхневих хвиль, викликає необхідніоть створення різного роду наближених нелінійних теорій, що приводять вихідну задачу до нових нелінійних наближених задач (моделей). Широке розповсюдження серед методів редукції вихідної задачі до наближеної (в т.ч. в теорії мілкої та глибокої води) отримали різні варіанти асимптотичних підходів, які зводять її до нелінійних рівнянь. З моделей, які найбільш часто зустрічаються, можно навести моделі Дж.Бусінеска, Д.Кордевега і Г. де Вріза, К.Фрідріхса, В.Є.Захарова та інших. Теорія солітонових розв'язків в значній мірі спирається на класичні розв'язки, отримані в межах наближених моделей поверхневих хвиль на необмеженій рідині, а також на нові результати, які отримані при розв'язанні проблем обгрунтування наближених моделей. Сучасний стан різних аспектів проблеми в достатній мірі повно визначено в роботах Дж. Майлса, М.І.Макаренко, В.І.Налімова, Л.В.Овсяннікова, Я.І. Секерж-Зеньковича, І.Т.Селєзова, Р.Л.Селінджера, Дж.Стокера, В.І. Фущича та багатьох інших.

Першою науковою працею, що відноситься до проблеми стоячих хвиль на вільній поверхні обмеженого об'єму рідини, слід вважати працю М.В.Остроградського "Мемуар про поширення хвиль в циліндричному басейні", яка представлена ним Паризькій академії наук у 1826 році. Це дослідження було виконано в лінійній постановці. В аналогічній лінійній постановці задача про стоячі хвилі в циліндричних областях розглядалася також в класичних роботах Ламба, Пуассона, Релея, де, по суті, були вичерпані можливості методу розділення змінних в випадку областей канонічної форми. В той же час її аналіз і в теперешній час є досить складною математичною проблемою. Це відноситься, перш за все, до розвитку якісної теорії нелінійних крайових задач, що описують хвильові рухи рідини (в т.ч. у випадку, коли порожнина рухається):

$$\Delta\Phi=0 \text{ в } Q; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = v_0 n+\vec{\omega}(r\times n) \text{ на } S; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = v_0 n+\vec{\omega}(r\times n)-f_t/\sqrt{1+(\nabla f)^2} \text{ на } \Sigma,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 0{,}5(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi(v_0 + \vec{\omega}\times r) + U = 0 \quad \text{на } \Sigma. \qquad (2)$$

Тут v_0 - вектор швидкості поступального руху полюсу O в тілі, $\vec{\omega}$ -кутова швидкість відносно O, Φ - потенціал швидкостей в рідині. Існуючими методами аналізу не вдалося поки що встановити теореми існування розв'язку задачі (2). В той же час розвиток методів розв'язування цих задач за останні десятиліття поглиблювався. При цьому найбільш суттєві результати є в галузі побудови прямих методів розв'язку задач (1) чи (2).

Запити сучасної техніки викликали на початку 50-х років великий потік робіт, де розроблялась лінійна теорія хвиль на поверхні рідини, що частково заповнює порожнину, яка рухається. Незалежно один від одного, при припущеннях щодо малості деформацій та швидкостей вільної поверхні рідини М.М.Моісеєвим, Г.С.Нарімановим, Д.Є.Охоцимським, Б.І.Рабіновичем, В.В.Румянцевим та рядом інших авторів була створена лінійна теорія руху тіла з порожниною, що частково заповнена ідеальною нестисливою рідиною. Вона дозволила звести розв'язок задачі до розв'язку задачі на власні значеня з параметром в крайовій умові

$$\Delta\varphi = 0 \ \text{в} \ Q_0; \ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ \text{на} \ S; \ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda\varphi \ \text{на} \ \Sigma_0(x=0), \qquad (3)$$

розв'язок якої визначає частоти й форми коливання рідини в нерухомій порожнині з вільною поверхнею, а також до розв'язку задач для визначення потенціалів Стокса-Жуковського (V_i та Ω_i)

$$\Delta V_i=0; \ \Delta \Omega_i=0 \ \text{в} \ Q_0; \quad \frac{\partial V_1}{\partial n}\Big|_{S\cup\Sigma_0}=n_1; \ \frac{\partial V_2}{\partial n}\Big|_{S\cup\Sigma_0}=n_2; \ \frac{\partial V_3}{\partial n}\Big|_{S\cup\Sigma_0}=n_3,$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial n}\Big|_{S\cup\Sigma_0}=(yn_3-zn_2); \ \frac{\partial \Omega_2}{\partial n}\Big|_{S\cup\Sigma_0}=(zn_1-xn_3); \ \frac{\partial \Omega_3}{\partial n}\Big|_{S\cup\Sigma_0}=(xn_2-yn_1). \qquad (4)$$

Різні аспекти обчислення гідродинамічних коефіцієнтів нескінченовимірних рівнянь, що виникають при розв'язанні задач про сумісні рухи тіла з рідиною шляхом використання розв'язків задач (3), (4), а також підходи до редукції цих рівнянь до скінченновимірних розглядалися в роботах М.Я.Барняка, І.Б.Богоряда, В.В.Болотіна, М.С.Галкіна, Л.В.Докучаєва, І.О.Дружиніна, К.С.Колеснікова, І.О.Луковського, М.М.Моісеєва, О.О.Петрова, Г.І.Пшеничнова, Б.І.Рабіновича, Е.М.Стрєкова, В.М.Сухова, Ф.М.Шклярчука, В.П.Шмакова, Х.-Н.Абрамсона, Д.Т.Кана, Х.-Ф.Бауэра, Дж.В.Майлса, В.-Х.Чу та інших авторів. При цьому найбільше поширення дістали варіаційні методи.

Між тим багато фізичних явищ можуть знайти своє математичне обгрунтування лише в межах нелінійної теорії. Це - залежність частоти від амплітуди, обмеженість амплітуд коливання рідини в резонансних режимах, несиметричність профіля стоячих хвиль та рухомість вузлових ліній, виникнення складних просторових рухів вільної поверхні при простих гармонічних збуреннях (кругова хвиля і т.п.), жорсткий характер збурення поверхневих хвиль в змінному полі ваги і т.п. Для описання таких явищ необхідно будувати прямі методи розв'язку задач (1) та (2). Різні підходи, що використовуються для розв'язання задач (1) та (2), побудовані Г.С.Нарімановим, М.М.Моісеєвим, І.О.Луковським, Р.Е.Каттолом, В.І.Столбецовим, О.С.Лимарченко та іншими. При цьому найбільш пристосованими для розв'язання вказаних проблем виявилися методи, що базуються на варіаційних формулюваннях вихідної задачі в формі Люка чи Гамільтона-Остроградського. Для побудови розв'язків нелінійної задачі з використанням вказаних підходів необхідно використовувати розв'язки задачі про власні коливання. Це дозволяє не тільки описати нелінійний механізм хвилеутворення, але й будувати наближені скінченновимірні моделі сумісних рухів тіла з рідиною.

Врахування капілярності рідини приводить до заміни динамічної умови на $\Sigma(t)$ (останнє в (1)) на квазілінійну крайову задачу виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+0,5(\nabla\varphi)^2+gx-\frac{\sigma}{\rho}(K_1+K_2)=0 \text{ на } \Sigma(t); \quad -\frac{(\nabla W,\nabla\xi)}{|\nabla W|}=\cos\alpha|\nabla\xi| \text{ на } \partial\Sigma(t), \quad (5)$$

де K_1+K_2 - сума головних кривизн поверхні $\Sigma(t)$, $\alpha=const$ - кут змочування, $W(x,y,z)\leq 0$ - рівняння порожнини. Суттєво також те, що капілярна поверхня рівноваги Σ_0 ($\varphi=const$), взагалі кажучи, відмінна від плоскої й визначається з стаціонарної задачі про капіляр. На теперішній час, дякуючи працям М.Д.Копачевського, С.Г.Крейна, Л.О. Тьомкіна та ряду інших авторів, можно вважати закінченим створення базису теорії малих (власних) коливань капілярної рідини. Вона зводиться до аналізу й розв'язання спеціального вигляду задачі на власні значення з параметром в крайовій умові.

Крім гравітаційного поля на вільну поверхню рідини можуть діяти вібраційні чи акустичні поля. Присутність подібних високочастотних полів суттєво ускладнюють задачу (2) та загалом змінюють характер хвильових явищ на вільній поверхні, що впливає як на динаміку, так і стійкість системи. Дослідження таких проблем пов'язано з необхідністю розв'язання досить важливих задач фізики, гідромеханіки та акустики і зводиться до аналізу нових нелінійних еволюційних крайових задач з вільною поверхнею (чи поверхнею розділу), які відмінні від відомих задач теорії поверхневих хвиль. Це не дозволяє використати методи аналізу та побудови прямих методів розв'язку, що створені для теорії хвиль на поверхні нестисливої ідеальної рідини. Ряд робіт У.Айнгарда, А.Росса, В.Г.Гаврилова, М.Корнфельда, В.Г.Неволіна, Ф.Вессельна, Р.Ф.Ганієва, В.Д.Любимова, А.А.Черепанова та інших, що присвячені проблемам аналізу хвилеутворення, були чи експериментальними, чи носили феноменологічний та фізично спрощений характер. В той же час було виявлено, що фізичні властивості руху вільної поверхні, які виявлені в цих роботах, суттєво відмінні від відомих нелінійних ефектів теорії поверхневих хвиль, але подібні до ефектів маятникової вібромеханіки, що базується на фундаментальних роботах М.М.Боголюбова, П.Л.Капіци та інших. Останній факт дозволив при спеціальних фізичних припущеннях звести задачу аналізу стійкості поверхні при вібраціях сили ваги до сукупності рівнянь Мат'є-Хіла, а також в ряді частинних випадків проаналізувати втрату стійкості плоскої поверхні при горизонтальних вібраціях (В.Д.Любимов, А.А.Черепанов).

Таким чином, актуальність теми дослідження таких задач, як вказано вище, обумовлюється необхідністю створення теорії, аналізу та побудови методів розв'язку цілого класу проблем фізики та нелінійної механіки, які зводяться до нелінійних крайових задач з вільною границею (чи границею розділу) і є по своїй структурі чи спеціальними задачами теорії поверхневих хвиль, чи задачами акустичної взаємодії в обмежених об'ємах. Ці задачі мають, з одного боку, всі властивості нелінійних задач з вільною границею, з другого боку, всі властивості нелінійних задач маятникової вібрормеханіки. Тому, як з практичної, так з теоретичної точки зору для вказаних задач досить актуальним є як узагальнення якісних теоретичних результатів теорії хвиль на поверхні рідини у вказаних випадках, обгрунтування й застосування прямих методів їх розв'язку, так й узагальнення методів нелінійної механіки, спектральної теорії та варіаційних методів на задачі математичної фізики, що досліджуються. Дана дисертаційна робота присвячена побудові основи теорії поверхневих хвиль при наявності різного роду віброакустичної дії шляхом поширення на даний клас задач відомих результатів теорії поверхневих хвиль та розробці прямих методів розв'язку крайових та спектральних задач, що виникають.

Мета роботи. Розробка нових методів аналізу та розв'язку нелінійних еволюційних крайових задач з невідомою границею, що виникають в теорії взаємодії поверхневих хвиль з віброакустичними полями, а також аналіз (формулювання, дослідження властивостей, побудова прямих методів розв'язку) наближених математичних моделей, які випливають з загальної постановки задачі, описують хвильові процеси на вільній границі й являють собою нові нелінійні стаціонарні, спектральні та варіаційні задачі математичної фізики, математичне описання ряду фізичних явищ та створення методів розрахунку віброакустичних принципів позиціювання і стабілізації рідини в слабких силових полях.

Методи дослідження. Дослідження провадилися з застосуванням методів функціонального аналізу, теорії узагальнених функцій, спеціальних функцій, теорії самоспряжених операторів, теорії еліптичних крайових задач, спектральної теорії, варіаційного числення, методів нелінійної механіки, теорії біфуркації, теорії стійкості, та орії Флоке, а також асимптотичних і наближених проекційно-варіаційних й чисельних методів, інших методів математичної фізики, комп'ютерної графіки.

Наукова новизна результатів визначається як новизною постановок задач математичної фізики для віброакустичної взаємодії з поверхневими хвилями, новими варіаційними задачами, які еквівалентні вихідним, так і узагальненням методів віброментханіки, спектральної теорії, варіаційних проблем й новими прямими методами розв'язання цілого класу нових нелінійних еволюційних, нелінійних стаціонарних (з вільною границею), спектральних (з параметром в крайовій умові) задач. Ці методи базуються на можливості побудови варіаційного аналога кожної з задач, що досліджується.

В роботі отримані наступні нові результати.

1. Побудовані варіаційні аналоги нових класів нелінійних еволюційних крайових задач з вільною границею теорії взаємодії акустичного поля з поверхнею рідини та теорії коливань обмеженого об'єму рідини в вібруючій порожнині.

2. З використанням асимптотичних методів побудовані та обгрунтовані методи редукції нелінійних крайових задач теорії віброакустичної взаємодії поверхневих хвиль, які зводять задачу визначення хвиль на поверхні рідини та аналіз їх стійкості до розв'язання більш простих нелінійних крайових задач з вільною границею, що подібні до задачі про власні коливання капілярної рідини в обмеженому об'ємі з потенціалом спеціального вигляду. Застосування редукції до відповідних варіаційних задач приводить до варіаційних принципів Гамільтона-Остроградського і Люка.

3. Побудовано узагальнення теорії лінійних хвиль на поверхні обмеженого об'єму рідини в випадку віброакустичної дії, яке включає: задачу про форми квазірівноваги (капілярно-звукову чи вібрекапілярну) та задачу про власні коливання (яка є новою спектральною задачею з параметром в крайовій умові на частині границі чи границі розділу двох областей).

4. Досліджені деякі властивості (на модельних прикладах) статичної нелінійної крайової задачі з вільною границею (про капілярно-звукову та вібрекапілярну форми рівноваги). Показано, що задача може мати неоднозначність розв'язку, вказані деякі типи біфуркацій.

5. Досліджені спектральні властивості задачі про власні коливання відносно квазистатичних форм рівноваги. Доведена самоспряже-

ність відповідних інтегро-диференціальних операторів. Доведено, що спектр складається лише з власних значень з граничною точкою $+\infty$. Сформульовані спектральні ознаки стійкості квазірівноважних форм, доведена їх еквівалентність динамічним. Показано, що втрата стійкості може відбуватися лише скінченною кількістю лінійно незалежних способів. Побудовані варіаційні задачі на мінімум функціоналу, що еквівалентні спектральним.

6. Побудовані та обгрунтовані екстремальні ознаки стійкості квазірівноважних форм.

7. Побудовані прямі методи розв'язку задачі, що описує сумісні рухи системи "тіло-рідина-газ+акустичне поле".

8. Результати 1-7 дозволили побудувати та обгрунтувати ряд ефективних проекційно-варіаційних методів розв'язку задач, що виникають. Розв'язано ряд модельних прикладів, побудовані біфуркаційні картини, що описують "резонансну" зміну геометрії форм рівноваги, виписані схеми методу Рітца визначення розв'язку спектральних задач та лінійні скінченновимірні моделі системи "тіло-рідина-газ+акустичне поле".

9. Розв'язано ряд нових задач фізики, акустики, механіки рідини. Описані ефекти: стабілізації та здуття поверхні при акустичній дії, перекиду та провалу вільної поверхні при вібраціях порожнини. Описано рух рідини під дією акустичного поля (ефект "акустичного насосу").

Сукупність теоретичних та прикладних результатів є новими в теорії нелінійних крайових задач математичної фізики з вільною границею, теоретичної гідромеханіки і акустики, вона створює математичну базу для нових вібраційних та космічних технологій.

Достовірність отриманих в дисертаційній роботі результатів базується на виваженій математичній постановці задачі та застосуванні до її дослідження та розв'язання теоретично обгрунтованих методів.

Апробація роботи. Основні результати і положення роботи обговорювалися на семінарах і Вченій раді Інституту математики АН України, а також на Всесоюзному симпозіумі "Колебания упругих конструкций с жидкостью" (1988 р., 1991 р., м. Новосибірськ), Всесоюзній конференції "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики" (1989 р., м. Тернопіль), Всесоюзній школі-семінарі "Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью" (1989 р., м. Київ), Республіканському семінарі "Міцність та формозміна елементів конструкцій при дії динамічних фізико-механічних полів" (1990 р., м. Київ), Міжнародній конференції "Free Boundary Problems in Continuum Mechanics" (1991 р., м. Новосибірськ), VII Всесоюзному з'їзді з теоретичної та прикладної механіки (1991 р., м. Москва) Міжнародній конференції "Проблеми гідромеханіки в освоєнні океану" (1992 р., м.Київ), IV Кримській осінній математичній школі-симпозіумі з еволюційних і спектральних задач (1993 р., с.Ласпі) на конференціях молодих вчених Інституту механіки АН України, семінарах Київського та Симферопольського держуніверситетів, Інституту гідромеханіки АН України.

Публікації. Основні положення і результати, отримані в дисертації, опубліковані в 37 наукових працях [1-37].

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, семи глав, заключення та списку цитованої літератури, що містить 198 джерел. Об'єм 289 сторінок, таблиць - 1, рисунків - 33.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дається огляд досліджень за тематикою дисертації та їх взаємозв'язок, аргументується актуальність теми, формулюється мета роботи і методи досліджень, новизна отриманих результатів і їх місце серед споріднених робіт інших авторів, короткий огляд змісту дисертації.

Перша глава присвячена аналізу нелінійної еволюційної крайової задачі з невідомою поверхнею розділу, яка виникає при розв'язанні фізичної задачі про взаємодію акустичних полів з поверхнею розділу в обмеженому об'ємі. Наводиться загальна диференціальна постановка задачі, яка приводить до необхідності розв'язання наступної задачі з невідомою поверхнею розділу:

$$\left.\rho_{it}+div(\rho_i\nabla\varphi_i)=0 \text{ в } Q_i;\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}=0 \text{ на } S_i;\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}=-\xi_t/|\nabla\xi|, \text{ на } \Sigma, i=1,2;\right\} \quad (6')$$

$$\rho_i\nabla\left[\varphi_{it}+0.5(\nabla\varphi_i)^2+\mathrm{Bo}\,x/\nu_*^2\right]=-\nabla p_i;\ \rho_i=\left(\frac{p_i}{p_{0i}}\right)^{1/\gamma_i} \text{ в } Q_i;$$

$$-p_2+\nu_*^{-2}(K_1+K_2)=-p_1\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} \text{ на } \Sigma, \quad (6)$$

$$\frac{(\nabla W,\nabla\xi)}{|\nabla W|}=\cos\alpha|\nabla\xi| \text{ на } \partial\Sigma;\ \rho_1\partial\varphi_1/\partial n=\frac{\sup V_0}{c\,\mu_0}\,\frac{V_0}{\sup V_0}\,\frac{\mu_0}{k}\sin t \text{ на } S_0,$$

де $Q_1(t)$ - область, що зайнята газом, $Q_2(t)$ - область, що зайнята рідиною, Bo - число Бонда, $\nu_* = \nu\left[gl^3/\sigma\right]^{1/2}$ - безрозмірна частота, k - хвильове число. Відносно постійних величин, що входять до задачі (6), виконані співвідношення

$$\varepsilon = \sup|V_0|/(c\mu_0) \ll 1; \quad \rho_{01}/\rho_{02} = \delta = \mu_1\varepsilon, \quad |\mu_1| \sim 1,$$

$$\nu_*^{-2} = \mu\,\mu_1\varepsilon^3, \quad \mu \sim 1; \quad V(x,y,z) = V_0(x,y,z)/\sup|V_0|; \; k \sim 1; \; Bo \sim 1.$$

Визначенню в (6) підлягають області $Q_i(t)$: $\partial Q_i(t) = S_i \cup \Sigma(t)$, $S_0 \subset S_1$, а також їх поверхня розділу $\Sigma(t): \xi(x,y,z,t) = 0$, функції $\rho_i(x,y,z,t)$, $\varphi_i(x,y,z,t)$ та $p_i(x,y,z,t)$. Структура задачі дозволяє виділити малий параметр ε, який стоїть при єдиній неоднорідній умові й характеризує акустичний характер віброполя в газі, та в динамічній умові й характеризує капілярні та гравітаційні сили. Така структура розподілу малих параметрів характерна для цілого класу задач маятникової вібромеханіки, що і дає змогу при спеціальних припущеннях відносно властивостей розв'язків задачі (6) застосувати до неї принцип розділення рухів, виписати спеціальну рекурентну процедуру та редукувати вихідну задачу до нелінійної еволюційної крайової задачі з вільною поверхнею, яка описує хвильові рухи поверхні розділу.

Теорема 1.2.1. Нехай початкові збурення $\xi(x,y,z,0) = \xi_0(x,y,z)$, $\xi_t(x,y,z,0) = \tilde{\xi}_1(x,y,z)$, $\varphi_i(x,y,z,0) = \theta_i(x,y,z)$, $\varphi_{it}(x,y,z,0) = \theta_{1i}(x,y,x)$, $i=1,2$ такі, що задача (6) має розв'язок, який для будь яких $t_1 < t_2$ $\varphi_i, p_i, \rho_i \in W_2^2(\hat{Q}_i)$, $\hat{Q}_i = \left\{(t,x,y,z): \forall t \in [t_1, t_2]\; (x,y,z) \in Q_i \cup \Sigma(t)\right\}$, а поверхня $\Sigma(t)$ гладка (тобто існує гладкий ізоморфізм $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})$ для деякої фіксованої одновв'язної області з кусочно-гладкою границею Q_0 $[t_1,t_2] \times \bar{Q}_0 \xrightarrow{\mathcal{F}} \bar{\hat{Q}}_2 \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} [t_1,t_2] \times \bar{Q}_0$) і $\xi, \varphi_i, \rho_i, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})$ - аналітичні по ε функції в околі нуля. Тоді рух поверхні розділу Σ може бути знайдено з задачі ($\tau = \varepsilon^{-1/2} t$, $\varepsilon \ll 1$)

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \langle Q_2\rangle; \quad \partial\varphi/\partial n = 0 \text{ на } \langle S_2\rangle; \quad \partial\varphi/\partial n = -\zeta_\tau/|\nabla\zeta| \text{ на } \Sigma,$$

$$\varphi_\tau + 0{,}5(\nabla\varphi)^2 + \mu\mu_1\left[Box - (K_1 + K_2)\right] + 0{,}25\mu_1\left[k^2(\Phi_1)^2 - (\nabla\Phi_1)^2\right] = const \text{ на } \Sigma(\tau);$$

$$-(\nabla W,\nabla\zeta)/|\nabla W| = \cos\alpha\ |\nabla\zeta| \text{ на } \partial\langle\Sigma\rangle(\tau); \qquad \int\limits_{\langle Q_2\rangle} dQ = const, \tag{7}$$

де

$$\Delta\Phi_1+k^2\Phi_1=0 \text{ в } \langle Q_1\rangle(\tau);\ \partial\Phi_1/\partial n=0 \text{ на } \langle S_1\rangle \cup \langle\Sigma\rangle(\tau),\ \partial\Phi_1/\partial n=\mu_0\frac{V(x,y,z)}{k} \text{ на } S_0. \tag{8}$$

Крім того, $\zeta(x,y,z,\tau)=\xi_0(x,y,z,\tau)$, $\psi(x,y,z,\tau)=\varphi_2^{3/2}(x,y,z,\tau)$ й виконані співвідношення між φ_1, φ_2, ξ та φ, Φ_1, ζ.

$\varphi_2(x,y,z,t,\tau)=\varepsilon^{3/2}\varphi_2^{(3/2)}(x,y,z,\tau)+o(\varepsilon^{3/2})$; $\xi(x,y,z,t,\tau)=\xi_0(x,y,z,\tau)+$ $+o(\varepsilon^{3/2})$; $\varphi_1(x,y,z,t,\tau)=\varepsilon\Phi_1(x,y,z)\sin t+\varepsilon^{3/2}\varphi_1^{(3/2)}(x,y,z,\tau)+o(\varepsilon^{3/2})$.

Така нова нелінійна математична модель (7) по формі аналогічна відомим задачам теорії поверхневих хвиль в обмежених об'ємах зі спеціального виду потенціалом, що носить інтегро-диференціальний характер. Побудова теорії хвильових рухів з задачі (7), (8) відповідно до методології теорії поверхневих хвиль включає в себе визначення форм рівноваги та формулювання й аналіз спектральної задачі про власні (нормальні) коливання відносно вказаного положення рівноваги. Перша проблема приводить до нелінійної стаціонарної крайової задачі з вільною поверхнею, так званої задачі про капілярно-звукову форму рівноваги (Σ_0: $\zeta_0(x,y,z)=0$):

$$\mu\left[\, Bo\ x-(K_1+K_2)\,\right]+0{,}25\left[\, k^2(\Phi_1)^2-(\nabla\Phi_1)^2\,\right]=const \text{ на } \Sigma_0,$$

$$-(\nabla W,\nabla\zeta_0)/|\nabla W| = \cos\alpha\ |\nabla\zeta_0| \text{ на } \partial\Sigma_0; \qquad \int\limits_{Q_2} dQ = const, \tag{9}$$

$$\Delta\Phi_1+k^2\Phi_1=0 \text{ в } \langle Q_1\rangle;\ \partial\Phi_1/\partial n=0 \text{ на } \langle S_1\rangle\cup\Sigma_0;\ \partial\Phi_1/\partial n=\mu_0 V(x,y,z)/k \text{ на } S_0.$$

Ця задача є стаціонарною задачею з вільною поверхнею для рівняння Гельмгольца в області $\langle Q_1\rangle$ з неоднорідною умовою Неймана на частині фіксованої границі S_0. Задача (9) є аналогом задачі про капіляр у наведеному випадку. Дослідження питань, пов'язаних з описанням відомих ефектів здуття та стабілізації поверхні, визначаються властивостями задачі щодо 1) існування і однозначності розв'язку; 2) біфуркації розв'язків; 3) стійкості розв'язків задачі (6), що відповідають розв'язкам (9).

Оскільки питання, пов'язані з однозначністю розв'язку, не є остаточно визначеними навіть для капілярної задачі, в роботі досліджуються властивості 1)-2) на випадок циліндричного об'єму з коловим перерізом у випадку, коли $\alpha=\pi/2$, $V=1$ (капілярна задача має тривіальний плоский розв'язок). Застосовуючи проекційні методи до задачі (9), можна звести її до звичайної нескінченновимірної нелінійної системи рівнянь. В главі 1 вдалося знайти тривіальний розв'язок цієї системи, визначити значення k, при яких порушується умова однозначної розв'язності. З застосуванням теореми М.А.Красносельського можна довести, що існують осесиметричні біфуркації знайдених форм рівноваги. Останні знаходяться конструктивно в околі біфуркаційного значення k.

Теорія малих хвиль для капілярної рідини будується відносно капілярної форми рівноваги. Для задачі (7), (8) теорія хвиль будується відносно капілярно-звукової форми рівноваги. Нехай Σ_0 $\xi_0=x-H_0(y,z)$, $\Phi_1(x,y,z)$ - розв'язок задачі (9). Тоді задача в варіаціях, що описує малі коливання (відносно $\tilde{H}$, $\tilde{\varphi}$ і Φ), має вигляд

$$\Delta\tilde{\varphi}=0 \text{ в } \langle Q_2\rangle;\ \partial\tilde{\varphi}/\partial n=0 \text{ на } \langle S_2\rangle;\ \partial\tilde{\varphi}/\partial n=\tilde{H}_\tau/\sqrt{1+(\nabla H_0)^2};\ \tilde{\varphi}_\tau+\mu_1\mu A\tilde{H}=0 \text{ на } \Sigma_0, \tag{10}$$

де оператор A визначається з співвідношення

$$A\tilde{H} = -\operatorname{div}\left[\nabla\tilde{H}/(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2} - (\nabla\tilde{H},\nabla H_0)\nabla H_0/(1+(\nabla H_0)^{3/2}\right] +$$

$$+(2\mu)^{-1}\left\{k^2\Phi_1\Phi_{1x}\tilde{H} - (\nabla\Phi_1,\nabla\Phi_{1x})\tilde{H} + k^2\Phi_1\Phi - (\nabla\Phi_1,\nabla\Phi)\right\} + Bo\tilde{H}, \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Sigma_0}\tilde{H}\,dydz = 0;\ \frac{(W_z\tilde{H}_z + W_y\tilde{H}_y)}{|\nabla_2 W|} = \frac{(W_zH_{0z}+W_yH_{0y})}{|\nabla_2 W|}\,\frac{(\nabla\tilde{H},\nabla H_0)}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}} \text{ на } \partial\Sigma_0,$$

а Φ - розв'язок задачі

$$\Delta\Phi+k^2\Phi=0 \text{ в } \langle Q_1\rangle;\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S_1\rangle\cup\Sigma_0; \tag{12}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\left(\Phi_{1xx}\tilde{H}-\Phi_{1z}\tilde{H}_z-\Phi_{1y}\tilde{H}_z-\left[\Phi_{1xy}H_{0y}+\Phi_{1xz}H_{0z}\right]\tilde{H}\right)/(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2} \text{ на } \Sigma_0.$$

Задача (10) по структурі подібна до відомих задач теорії малих поверхневих хвиль, але оператор A має більш складний вигляд. Якирозглянути нормальні коливання $\tilde{\varphi}=i\omega\, exp(i\omega\tau)\varphi(x,y,z)$, $\tilde{H}=exp(i\omega\tau)H$, то отримаємо задачу про власні коливання поверхні відносно капілярно-звукової форми рівноваги

$$\Delta\varphi=0 \text{ в } \langle Q_2\rangle;\ \partial\varphi/\partial n=0 \text{ на } \langle S\rangle;\ \partial\varphi/\partial n=\frac{H}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}};\ -\omega^2\varphi+\mu_1\mu AH=0 \text{ на } \Sigma_0, \quad (10')$$

де ω - власні частоти, $H(y,z)$ -моди коливань вільної поверхні, $\varphi(x,y,z)$ - моди коливань об'єму.

З застосуванням леми 1.3.1

Лема 1.3.1. Нехай (H_0,Φ_1)-розв'язок задачі (9), $H_0\in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi_1\in W_2^2(\langle Q_1\rangle\cup\Sigma_0)$, а пари $(\tilde{H}_i,\tilde{\Phi}_i)$, $i=1,2$ визначені з задачі (11) та $H_i\in C^1(P\Sigma_0)$, $\int H_i dydz = 0$, $|H_i|_C=1$, $P\Sigma_0$ - проекція поверхні Σ_0 на Oyz. Тоді

$$\int_{\Sigma_0}\left[k^2\tilde{\Phi}_1\Phi_1-(\nabla\tilde{\Phi}_1,\nabla\Phi_1)\right]\tilde{H}_2/(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}ds=\int_{\langle Q_1\rangle}\left[k^2\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2-(\nabla\tilde{\Phi}_1,\nabla\tilde{\Phi}_2)\right]dQ$$

доведена самоспряженість оператора A в $L_{2,\frac{1}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}}}(\Sigma_0)$.

Теорема 1.3.3 (про точковий спектр оператора A).
Нехай (H_0,Φ_1)-розв'язок задачи (9), $H_0\in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi_1\in W_2^2(\langle Q_1\rangle\cup\Sigma_0)$ ($P\Sigma_0$- проекція Σ_0 на Oyz). Тоді

1 . Лінійний самоспряжений оператор A має дійсний точковий спектр, який складається лише з власних значень.

2 . Набір власних функцій $\{\tilde{H}_n\}$ оператора A є базисом в фактор-просторі $L_2(P\Sigma_0)$ без константи.

3 . Множина власних значень оператора A має єдину граничну точку $+\infty$. Множина від'ємних власних значень скінчена.

Теорема 1.3.4 (про властивості спектра задачі (10')).
Нехай (H_0,Φ_1)-розв'язок задачі (9), $H_0\in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi_1\in W_2^2(\langle Q_1\rangle\cup\Sigma_0)$. Тоді спектральна задача (10') має лише власні значення $(\omega_n^2,H_n,\varphi_n)$ і

1 . $\forall n\ \omega_n^2 \in \mathbb{R}$, $\{H_n\}$ - базис в фактор-просторі $L_2(P\Sigma_0)$ без константи.

2 . Множина $\{n: \omega_n^2 < 0\}$ скінченна.

В п.п. 1.4-1.5 побудовано варіаційний апарат для задачі (6) Це дозволило звести процедуру розв'язку задачі до визначення стаціонарних точок деякого функціоналу.

Теорема 1.4.1. Нехай розв'язок задачі (6) такий, що $\forall\ t_1<t_2$ $\varphi_i, p_i, \rho_i \in W_2^2(\hat{Q}_i)$, $\hat{Q}_i = \{(t,x,y,z): \ \forall t\in[t_1,t_2] \ \ (x,y,z)\in Q_i(t)\}$, в поверхня $\Sigma(t)$ гладка ($\exists$ ізоморфізм $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})$ для деякої фіксованої області Q_0 $[t_1,t_2]\times\bar{Q}_0 \rightarrow \xrightarrow{\mathcal{F}} \bar{\hat{Q}}_2 \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} [t_1,t_2]\times\bar{Q}_0$). Тоді множина розв'язків задачі (6) співпадає з множиною стаціонарних точок функціоналу

$$G(\xi,\varphi_i,\rho_i) = \int_{t_1}^{t_2} \left[T-U-\Pi\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i(t)} \rho_i\left[\frac{(\nabla\varphi_i)^2}{2} - U_i(\rho_i) - gx\right] dQ - \sigma\left[|\Sigma| - \cos\alpha\ |S_2|\right]\right\} dt \qquad (13)$$

при кінематичному зв'язку (6') і умові

$$\delta\xi|_{t_1,t_2} = 0; \qquad \delta\rho_i|_{t_1,t_2} = 0. \qquad (14)$$

Тут $U(\rho)$:

$$p_i \overset{df}{=} \rho_i^2 \frac{\partial U_i}{\partial \rho_i}. \qquad (15)$$

Теорема 1.4.2 (варіаційна задача типу Бейтмена).

При умовах теореми 1.2.1 множина розв'язків задачі (6) співпадає з множиною стаціонарних точок функціоналу

$$B(\xi,\varphi_i,\rho_i) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i(t)} \rho_i\left[- \varphi_{it} - \frac{(\nabla\varphi_i)^2}{2} - U_i(\rho_i) - gx\right] dQ - \sigma\left[|\Sigma| - \cos\alpha\ |S_2|\right] + \int_{S_0} \rho_0 V_0 \sin(\gamma t)\ \varphi_1 ds\right\} dt \qquad (16)$$

при незалежних ізохронних гладких варіаціях

$$\delta\xi|_{t_1,t_2} = 0; \quad \delta\varphi_i|_{t_1,t_2} = 0; \quad \delta\rho_i|_{t_1,t_2} = 0.$$

Теорема 1.4.3 (варіаційна задача типу Бейтмена-Бердичевського). При умовах теореми 1.2.1 множина розв'язків задачі (6) співпадає з множиною стаціонарних точок функціоналу

$$B_b(\xi,\varphi_i) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i(t)} \sup_{\rho_i} \left\{ \rho_i \left[-\varphi_{it} - \frac{(\nabla\varphi_i)^2}{2} - U_i(\rho_i) - gx \right] \right\} dQ - \right.$$
$$\left. - \sigma\left[|\Sigma| - \cos\alpha\, |S_2| \right] + \int_{S_0} \rho_0 V_0 \sin(\nu t)\, \varphi_1 ds \right\} dt \tag{17}$$

при незалежних ізохронних гладких варіаціях ξ и φ

$$\delta\xi|_{t_1,t_2} = 0; \quad \delta\varphi_i|_{t_1,t_2} = 0. \tag{17'}$$

Якщо функція стану $\rho_i = \rho_i(p_i)$ відома в явному вигляді, то результат застосування операції $\sup$ буде відомий і дасть залежність між p та φ $p = P^{-1}(-\varphi_t - 0.5(\nabla\varphi)^2 - gx)$, а функціонал $B_b(\xi,\varphi_i)$ матиме вигляд:

$$B_l(\xi,\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_{Q_i(t)} P^{-1} \left[-\varphi_{it} - \frac{(\nabla\varphi_i)^2}{2} - U_i(\rho_i) - gx \right] dQ - \right.$$
$$\left. - \sigma\left[|\Sigma| - \cos\alpha\, |S_2| \right] + \int_{S_0} \rho_0 V_0 \sin(\nu t)\, \varphi_1 ds \right\} dt. \tag{18}$$

Теорема 1.4.4 (варіаційна задача типу Бейтмена-Люка). При умовах теореми 1.2.1 множина розв'язків задачі (6) співпадає з множиною стаціонарних точок функціоналу (18) при незалежних ізохронних гладких варіаціях ξ и φ_i (17').

Виписані варіаційні задачі теорем 1.4.1- 1.4.4 еквівалентні вихідним задачам та допускають при припущеннях теореми 1.2.1 процедуру редукції (6) до задачі (7),(8). Це приводить до сукупності варіаційних задач для (7),(8). Останні є базовими для побудови прямих методів розв'язку задачі про нелінійні рухи рідини при акустичній дії і дають можливість перенести на випадок, що досліджується, результати нелінійної теорії поверхневих хвиль.

Теорема 1.5.1. Нехай виконані умови теореми 1.4.1 і, крім того, $\xi, \varphi_\iota, \rho_\iota, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})$ - аналітичні функції від ε в околі нуля. Тоді задача визначення розв'язку задачі (6) в точністю до ε^3 на Σ та стаціонарних точок функціоналу (14) еквівалентна визначенню стаціонарних точок функціоналу (G^* - функціонал (14) в безрозмірному вигляді)

$$\langle G^*(\xi,\varphi_\iota,\rho_\iota)\rangle_\iota = const + \varepsilon^{3/2}\mathcal{G}(\zeta,\varphi) + O(\varepsilon^2),$$

де

$$\mathcal{G}(\zeta,\phi) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\int_{\langle Q_2\rangle}\left[\frac{(\nabla\varphi)^2}{2} - \mu\mu_1 Bo\ x\right]dQ - \mu\mu_1\left[|\langle\Sigma\rangle| - \cos\alpha\ |\langle S_2\rangle|\right] + \right.$$

$$\left. + 0.25\ \mu_1\int_{\langle Q_1\rangle}\left[k^2\Phi_1^2 - (\nabla\Phi_1)^2\right]dQ - 0.5\mu_1\mu_0/k\int_{S_0}\Phi_1 V(x,y,z)ds\right\}d\tau, \tag{19}$$

для ізохронних гладких варіацій $\delta\zeta\big|_{\tau_1,\tau_2} = 0$, кінематичних обмежень

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \langle Q_2\rangle;\quad \partial\varphi/\partial n=0 \text{ на } \langle S_2\rangle;\quad \partial\varphi/\partial n = -\zeta_\tau/|\nabla\zeta| \text{ на } \langle\Sigma\rangle \tag{20}$$

і умов параметричної залежності $\Phi_1(x,y,z,\tau)$ від $\zeta(x,y,z,\tau)$

$$\Delta\Phi_1+k^2\Phi_1=0 \text{ в } \langle Q_1\rangle;\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=0 \text{ на } \langle S_1\rangle\cup\langle\Sigma\rangle;\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}= \mu_0 V(x,y,z)/k \text{ на } S_0. \tag{21}$$

Теорема 1.5.2. Нехай виконані умови теореми 1.5.1. Тоді задача визначення розв'язку задачі (6) з точністю до ε^3 на Σ та стаціонарних точок функціоналів (17), (18) еквівалентна визначенню стаціонарних точок функціоналу (G^* - функціонал (17) чи (18) в безрозмірному вигляді)

$$\langle B^*(\xi,\varphi_\iota,\rho_\iota)\rangle_\iota = const + \varepsilon^{3/2}\mathcal{B}(\zeta,\varphi) + O(\varepsilon^2),$$

де

$$\mathcal{B}(\zeta,\varphi,\Phi_1)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\int_{\langle Q_2\rangle}\left[-\varphi_\tau - \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} - \mu\mu_1 Bo x\right]dQ - \mu\mu_1\left[|\langle\Sigma\rangle| - \cos\alpha\ |\langle S_2\rangle|\right] + \right.$$

$$\left. + 0.25\ \mu_1\int_{\langle Q_1\rangle}\left[k^2\Phi_1^2 - (\nabla\Phi_1)^2\right]dQ - 0.5\mu_1\mu_0/k\int_{S_0}\Phi_1 V(x,y,z)ds\right\}d\tau,$$

для ізохронних гладких незалежних варіацій

$$\delta\zeta\Big|_{\tau_1,\tau_2} = 0; \quad \delta\varphi\Big|_{\tau_1,\tau_2} = 0.$$

Показано, що, на відміну від задачі (6), задача (7),(8) допускає лише два варіаційні формулювання типу Гамільтона-Остроградського (т. 1.5.1) та Люка (т. 1.5.2). Дуже важливим є також те, що варіаційні задачі Бейтмена, Бейтмена-Бердичевського, Бейтмена-Люка після операції редукції приводять до варіаційної задачі Люка. Наявність варіаційних задач т. 1.5.1 та т. 1.5.2 дозволяє сформулювати варіаційні задачі для задачі про капілярно-звукову форму рівноваги (9). Характерно також те, що ці варіаційні формулювання стосується одного й того ж функціоналу, який носить характер потенціальної енергії.

Теорема 1.5.3 (варіаційна задача типа Гамільтона- Остроградського для задачі про капилярно-звукову форму рівноваги).

Задача визначення гладких поверхонь Σ_0 з задачі про капілярно-звукову форму рівноваги при умовах теореми 1.5.1 еквівалентна визначенню стаціонарних точок функціоналу

$$U(\cdot)=\mu\Big[-|\Sigma_0|-\cos\alpha\ |\langle S_1\rangle| - \int_{\langle Q_2\rangle} \mathrm{Box}\ dQ\Big] + \Big[0.25 \int_{\langle Q_1\rangle} (k^2\ \Phi_1{}^2-(\nabla\Phi_1)^2)dQ + 0.5\ \mu_0/k \int_{S_0} V(x,y,z)\ \Phi_1 ds\Big] \tag{21}$$

при обмеженнях

$$\int_{\langle Q_2\rangle} dQ = const \tag{22}$$

і

$$\Delta\Phi_1+k^2\Phi_1=0 \text{ в } \langle Q_1\rangle; \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=0 \text{ на } \langle S_1\rangle\cup\Sigma_0;\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\mu_0 V(x,y,z)/k \text{ на } S_0. \tag{23}$$

Теорема 1.5.4 (варіаційна задача типу Бейтмена для капілярно-звукової форми рівноваги).

Задача визначення гладких поверхонь Σ_0 з задачі про капілярно-звукову форму рівноваги при умовах теореми 1.5.1 еквівалентна визначеню стаціонарних точок функціоналу (21) по ζ_0 та Φ_1 при обмеженні (22).

Таким чином, у випадку акустичної взаємодії вдалося побудувати ряд варіаційних задач, що еквівалентні вихідним нелінійним диференціальним. Це є базою для побудови прямих методів розв'язку вказаних задач. Наявність останніх двох варіаційних задач для задачі про капілярно-звукову форму рівноваги є суттєвим узагальненням варіаційних принципів маятникової вібромеханіки на випадок континуальної задачі. Це дозволяє будувати варіаційні ознаки стійкості поверхні розділу.

Друга глава присвячена побудові теорії стійкості поверхні розділу $\Sigma(t)$ в задачі (7), (8), яка розуміється як стійкість (2π) - періодичного розв'язку задачі (6). На базі досліджень спектральної задачі про власні коливання відносно капілярно-звукової форми рівноваги формулюється динамічний крітерій стійкості: $\forall n\ \omega_n^2>0$ з (13). Динамічний критерій є універсальним критерієм стійкості, на ньому базуються інші.

Задача про стійкість капілярно-звукової форми рівноваги допускає фізичне узагальнення (що витікає з аналізу баланса сил на поверхні)- спектральну ознаку стійкості: $\forall\ n,\ Ah_n=\lambda_n h_n,\ \lambda_n>0$. В роботі доводиться еквівалентність динамічної та спектральної ознак На конкретних прикладах побудовано процедуру застосування спектральної ознаки для "тривіальних" та осесиметричних "нетривіальних" капілярно-звукових форм рівноваги в циліндрі колового перерізу, що знайдені в главі 1. Ці приклади можуть ілюструвати відомий ефект акустичної стабілізації при від'ємних числах Бонда, який полягає в тому, що при деяких значеннях k при від'ємних числах Бонда, де не є стійкою капілярна форма рівноваги, є стійкою відповідна капілярно-звукова форма рівноваги.

Наступне узагальнення пов'язано з можливістю формулювання варіаційного принципу стійкості (що є узагальненням відповідних принципів маятникової вібромеханіки на досліджуваний клас задач в частинних похідних - аналог функціоналу потенціальної енергії), яка зводиться до теореми.

Теорема 2.2.2 (варіаційний принцип стійкості капілярно-звукової форми рівноваги).

Нехай (H_0,Φ_1) - розв'язок задачі (9) задовольняє умови гладкості $H_0\in C^2(PQ)$, $\Phi_1\in W_2^2(<Q_1>\cup\Sigma_0)$, (PQ - проекція області Q на Oyz). Тоді задача визначення стійких капілярно-звукових форм рівноваги еквівалентна визначенню точних мінімумів функціоналу (21) при виконаних умовах зв'язку між H_0 та Φ_1 (22), (23).

Наступне означення дозволяє ввести поняття узагальненого розв'язку задачі (9).

Означення 2.2.1. Нехай Q_0 - кусочно-гладка однозв'язна підобласть області Q й множина $\{Q^n\}$ - кусочно-гладких однозв'язних підобластей Q. Нехай також однозвязна частина границі $S_0 \subset \partial Q$ з гладкою ∂S_0: $S_0 \subset \partial Q_0$, $S_0 \subset \partial Q^n$, а границі $\Sigma_0 = \partial Q_0 \setminus \partial Q$, $\Sigma^n = \partial Q^n \setminus \partial Q$ також однозвязні кусочно-гладкі й існує кусочно-гладкий ізоморфізм

$$F: Q_0 \to Q^n = \begin{cases} x' = X(x,y,z) \\ y' = Y(x,y,z); \\ z' = Z(x,y,z) \end{cases} F^{-1}: Q^n \to Q_0 = \begin{cases} x = X^{-1}(x',y',z') \\ y = Y^{-1}(x',y',z'), \\ z = Z^{-1}(x',y',z') \end{cases} X,Y,Z \in C^1(Q_0) \text{ і}$$

$X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1} \in C^1(Q^n)$. Будемо говорити, що область Q^n прямує до Q_0 $(Q^n \to Q_0)$ за визначенням 2.2.1 і поверхні $\Sigma^n = \partial Q^n \setminus \partial Q$ прямують до $\Sigma_0 = \partial Q_0 \setminus \partial Q$ за визначенням 2.2.1, якщо $X,Y,Z \to x,y,z$ и $X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1} \to x', y', z'$ в метриці C^1.

В роботі доводиться, що функціонал (21) при умові-зв'язку (22), (23) є неперервним за означенням 2.2.1 і на множинах (Q, Σ_0), які визначені означенням 2.2.1, можна ввести поняття узагальненого розв'язку задачі (9). Крім того, такі розв'язки, якщо вони мають відповідну гладкість, будуть стійкими.

Третя глава присвячена побудові методів розв'язку основних (базових) задач теорії малих хвиль: задачі про капілярно-звукову форму рівноваги (9) та задачу про власні коливання (10'). Методи базуються на можливості побудови варіаційного аналога вказаних задач. Так, для розв'язання проблеми визначення капілярно-звукової форми рівноваги використовується варіаційна ознака стійкості, що дає змогу запобігати виникненню нестійких розв'язків. В дисертаційній роботі для побудови варіаційних методів розв'язку за варіаційною ознакою виписується спектральний розклад функціоналу (21). Для цього має бути проаналізована спектральна задача з параметром на частині границі для рівняння Гельмгольца

$$\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = 0 \text{ в } \langle Q_1 \rangle; \ \partial\Phi_1/\partial n = 0 \text{ на } \langle S_1 \rangle \cup \Sigma_0; \ \partial\Phi_1/\partial n = \theta\Phi_1 \text{ на } S_0, \quad (24)$$

(тут k - хвильове число). Така задача приводить до операторних рівнянь, які не є додатньо визначеними. В той же час в роботі узагальнюються деякі теореми про властивості спектру, про критичні значення k, про варіаційне формулювання, про неперервну залежність спектра, про кількість від'ємних власних значень θ.

Якщо Φ_l, θ_l – розв'язок задачі (24), то функціонал (21) має вигляд

$$\Pi(d_\eta)=\mu\left[|\Sigma_0|+\cos\alpha|\langle S_1\rangle|+\int_{\langle Q_2\rangle} \mathrm{Bo}\,x\,dQ\right]-(\mu_0/k)^2 0.25\sum_l\left[\int_{S_0} V(x,y,z)\Phi_{1l}ds\right]^2/\theta_l, \tag{25}$$

де $S_l=\mu_0\int_{S_0} V\Phi_{1l}ds/(k\theta_l)$, а поверхня Σ_0 має розклад $H_0=\sum d_l h_l$.

Вид спектрального розкладу функціоналу уточнюється в роботі для випадків, коли є можливим розділ змінних. У випадку циліндра колового перерізу уточнюється та досліджується за допомогою варіаційно-проекційних методів ефект резонансної втрати стійкості та багатовимірної біфуркації, наводяться відповідні чисельні приклади. Наведені чисельні діаграми, що були отримані за допомогою комп'ютерної графіки, демонструють залежність значення функціоналу від k та геометрії поверхні. Показано, що при k, близькому до резонансного, (першого власного значення $æ_{11}$: $J'(æ_{11})=0$), відповідна капілярно-звукова форма рівноваги втрачає стійкість, замість вказаної капілярно-звукової форми рівноваги з'являється цілий підпростір в $L_2(P\Sigma_0)$, що і є аналогом розв'язку задачі та відповідає резонансним рухам системи.

Друга половина глави 3 присвячена формулюванню та доведенню варіаційних принципів (на мінімум функціоналу) для спектральних задач (10') та спектральної задачі для оператора A: $Ah=\lambda h$. Варіаційні принципи для задачі (10') є прямим аналогом відомих варіаційних принципів для задачі про власні коливання капілярної рідини, які доведені в роботах М.Д.Копачевського, М.Я.Барняка.

Принципово новими є варіаційні принципи для спектральної задачі з параметром в крайовій умові, яка має операторний запис $Ah=\lambda h$.

Теорема 3.6.2 Нехай виконані умови теореми 1.3.3. Тоді задача послідовного (в порядку зростання) визначення власних значень оператора A еквівалента наступній варіаційній процедурі.

Нехай $A_0\subset L_2(P\Sigma_0)$ – допустима множина функцій для функціоналів

$\nu(H,\Phi)$ та $\nu_0^1(H,\Phi)$, $\Phi\in W_2^1(\langle Q_1\rangle)$. Тоді

$$\lambda_1 = \min_{\substack{H\in\mathcal{A}_0\\ \Phi\in C_0}} \nu(H,\Phi) = \min_{\substack{H\in\mathcal{A}_0\\ \Phi\in C_0}} \Bigg\{ \int\limits_{P\Sigma_0} \Bigg[\frac{(\nabla H,\nabla H)}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}} - \frac{(\nabla H_0,\nabla H)(\nabla H_0,\nabla H)}{(1+(\nabla H_0)^2)^{3/2}} + \Big[Bo +$$

$$+ \frac{1}{2\mu}\left(K^2\Phi_1\Phi_{1x} - (\nabla\Phi_1,\nabla\Phi_{1x})\right)\Big]H^2\Bigg] dydz +$$

$$+ \frac{1}{2\mu}\int\limits_{\langle Q_1\rangle} \left[K^2\Phi^2 - (\nabla\Phi,\nabla\Phi)\right]dQ\Bigg\} \Big/ \int\limits_{P\Sigma_0} H^2 dydz = \nu(H_1,\Phi_1),$$

де $C_0 = \left\{\Phi:\ \delta\nu_0^1(H,\Phi)=0,\quad H\in\mathcal{A}_0\right\}$,

$$\lambda_2 = \min_{\substack{H\in\mathcal{A}_1\\ \Phi\in C_1}} \nu(H,\Phi) = \nu(H_2,\Phi_2), \text{ где } \mathcal{A}_1 = \left\{H\in\mathcal{A}_0:\ \int\limits_{P\Sigma_0} HH_1\, dydz = 0\right\} \text{ та}$$

$$C_1 = \left\{\Phi:\ \delta\nu_0^1(H,\Phi)=0,\ H\in\mathcal{A}_1\right\};$$

. . . .

$$\lambda_l = \min_{\substack{H\in\mathcal{A}_{l-1}\\ \Phi\in C_{l-1}}} \nu(H,\Phi) = \nu(H_l,\Phi_l), \text{ где } \mathcal{A}_{l-1} = \left\{H\in\mathcal{A}_{l-2}:\ \int\limits_{P\Sigma_0} HH_{l-1}\, dydz = 0\right\} \text{ и}$$

$$C_{l-1} = \left\{\Phi:\ \delta\nu_0^1(H,\Phi)=0,\ H\in\mathcal{A}_{l-1}\right\},$$

а функціонал $\nu_0^1(H,\Phi)$ має вигляд

$$\nu_0^1(H,\Phi) = \int\limits_{\langle Q_1\rangle} \left[K^2\Phi^2 - (\nabla\Phi,\nabla\Phi)\right]dQ + \int\limits_{\Sigma_0} \Big\{\Phi_{1xx}H - \Phi_{1z}H_z - \Phi_{1y}H_z -$$

$$- \left[\Phi_{1xy}H_{0y} + \Phi_{1xz}H_{0z}\right]H\Big\} \frac{\Phi\, ds}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}}.$$

Оформульовані в роботі варіаційні принципи дають змогу побудувати спеціальні схеми методу Рітца для визначення власних значень вказаних спектральних задач і є базою для побудови лінійної теорії сумісних рухів системи " тіло-рідина-газ+акустичне поле". Схема методу Рітца базується на можливості розкладу відповідних задач а розв'язками інших задач на власні значення. Показано, що якщо

$$A_0 H^{(k)} = -div\left[\nabla H^{(k)}/(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2} - (\nabla H^{(k)},\nabla H_0)\nabla H_0/(1+(\nabla H_0)^{3/2}\right] +$$

$$+(2\mu)^{-1}\left\{k^2\Phi_1\Phi_{1x} - (\nabla\Phi_1,\nabla\Phi_{1x}) + Bo\right\} H^{(k)} = \chi^{(k)}H^{(k)} \text{ на } \Sigma_0,$$

$$\int_{\Sigma_0} H^{(k)}dydz = 0; \quad \frac{\partial H^{(k)}}{\partial e} = \frac{\partial H_0}{\partial e}(\nabla H^{(k)},\nabla H_0)/(1+(\nabla H_0))^{1/2} \text{ на } \partial\Sigma_0, \text{ а}$$

$$\Delta\Phi^{(k)} + k^2\Phi^{(k)} = 0 \text{ в } \langle Q_1\rangle; \; \partial\Phi^{(k)}/\partial n = 0 \text{ на } \langle S_1\rangle \cup S_0; \; \partial\Phi^{(k)}/\partial n = \theta_k\Phi^{(k)} \text{ на } \Sigma_0,$$

то власні значення та власні функції оператора A можуть бути знайдені з задачі

$$det\left[\{\chi\} - \frac{1}{\mu}C\{1/\theta\}C^T - \lambda E\right] = 0,$$

де $\{\chi\}$ і $\{1/\theta\}$ - діагональні матриці з відповідних власних значень, а $\int_{\Sigma_0} L[H^{(k)}]\Phi^{(l)}ds = c_{kl}$ ($L[H]$ визначається з правої частини крайової умови на Σ_0 в задачі (10)).

Крім того, якщо

$$AH^{(k)} = \lambda_k H^{(k)}; \quad \int_{P\Sigma_0} H^{(k)}dydz = 0,$$

$$\Delta\psi^{(k)} = 0 \quad \text{в} \quad \langle Q_2\rangle; \quad \partial\psi^{(k)}/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad \langle S_2\rangle;$$

$$\partial\psi^{(k)}/\partial n = \varkappa_k\psi^{(k)}/(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2} \text{ на } \Sigma_0; \quad \int_{P\Sigma_0}\psi^{(k)}dydz = 0$$

то знаходження власних значень ω^2 задачі (10') і відповідних власних функцій зведеться до задачі

$$det\left[\{\lambda\} - \omega^2 C\{1/\varkappa\}C^T\right] = 0,$$

де $c_{nl} = \int_{P\Sigma_0}\psi^{(n)}|_{\Sigma_0}H^{(l)}dydz.$

Четверта глава присвячена побудові методів розв'язку задач про хвильові рухи рідини при акустичній дії в рухомій порожнині

$$\rho_{it}+ div(\rho_i(\nabla\Phi_i-v_O-\vec{\omega}\times r)) = 0; \quad \rho_i= \rho_{Oi}\left(\frac{p_i}{p_{Oi}}\right)^{1/\gamma_i},$$

$$\rho_i\nabla\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + (\nabla\Phi_i)^2/2 - \nabla\Phi_i(v_O+\vec{\omega}\times r)+ U(r)\right) = -p_i \text{ в } Q_i, \; i=1,2,$$

$$\rho_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}= \rho_{Oi}(v_O n + \vec{\omega}(r\times n)) \quad \text{на} \quad S_i, \quad i=1,2,$$

$$\rho_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}=\rho_{Oi}(v_O+\vec{\omega}\times r)n-\rho_{Oi}\xi_t/|\nabla\xi|; \quad - p_2 + \sigma(K_1+ K_2) = - p_1 \text{ на } \Sigma,$$

$$-\frac{(\nabla W,\nabla\xi)}{|\nabla\cdot|} = \cos\alpha\ |\nabla\xi| \quad \text{на } \partial\Sigma,$$

$$\rho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}= \rho_{O1}(v_O n + \vec{\omega}(r\times n) + V_O(x,y,z)\ sin(\nu t)) \quad \text{на} \quad S_O.$$

В дисертації доведено, що одночасне застосування методу редукції глави 1, а також розкладу розв'язку на потенціал внутрішнього руху та потенціали Стокса-Жуковського дозволяє при виконанні умов теореми 1.2.1 виписати задачу про сумісні рухи, що подібна до задачі (2), але з потенціалом спеціального вигляду, сформулювати відповідний варіаційний принцип Люка, побудувати варіаційно-проекційний метод І.О Луковського та відповідні нелінійні та лінійні скінченовимірні моделі (з використанням результатів глави 3) сумісних рухів системи, які в зв'язку зі значною громіздкістю формулювань не наводяться в авторефераті.

П'ята та шоста глави присвячені розгляду спеціального класу задач типу (2), що виникають при вібрації порожнини:

$$\rho_t + div(\rho\ \nabla\varphi) = 0; \quad \rho = \left(\frac{p}{p^O}\right)^{1/\gamma} \quad \text{в } Q,$$

$$\rho\ \nabla\left[\varphi_t + 0.5(\nabla\varphi)^2 + \nu^{-2}Box + \varepsilon(a_1x + a_2y + a_3z)\ sin(t)\right] = -\nabla p \text{ в } Q,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\xi_t}{|\nabla\xi|} \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{26}$$

$$p - \nu^{-2}(K_1+K_2) = p^0 = const \text{ на } \Sigma; \quad -(\nabla W, \nabla\xi)/|\nabla\xi| = \cos\alpha\sqrt{1+(\nabla H)^2} \text{ на } \partial\Sigma,$$

де виконані співвідношення

$1/\nu^2 = \mu\,\varepsilon^2$, $\mu \sim 1$ при Bo $\lesssim 1$; $Bo/\nu^2 = \mu\,\varepsilon^2$, $\mu \sim 1$ при Bo $\gtrsim 1$,

а $Q(t)$ - невідома область визначення, $\varphi(x,y,z,t)$, $p(x,y,z,t)$, $\rho(x,y,z,t)$ - функції, що підлягають визначенню, $\Sigma(t):\xi(x,y,z,t)=0$ - невідома поверхня. Аналіз задачі проводиться за схемою глав 1-3. Введено поняття виброкапілярної форми рівноваги (аналога задачі про капіляр), яка визначається з задачі

$$-\mu\, div\left(\frac{\nabla H_0}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\right) + \mu\, Bo\, x - 0.25\left[k^2\left(\Phi_1 - (a_1x + a_2y + a_3z)\right)^2 - \right.$$

$$\left. - (\nabla\Phi_1)^2\right] - 0.5\left[\Phi_{1x} - a_1\right] H_* = const \quad \text{на} \quad \Sigma_0,$$

$$-\frac{W_x - W_y H_{0y} - W_z H_{0z}}{|\nabla W|} = \cos\alpha\sqrt{1+(\nabla H_0)^2} \quad \text{на } \partial\Sigma_0, \tag{27}$$

$$\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = k^2(a_1x+a_2y+a_3z) \text{ в } Q_0; \quad \Phi_1 = a_1x+a_2y+a_3z \text{ на } \Sigma_0;$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ на } S; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = -\frac{\xi_*}{|\nabla\xi_0|} \text{ на } \Sigma_0.$$

В дисертації побудована задача про власні коливання відносно віброкапілярної форми рівноваги, яка зводиться до розв'язку наступної спектральної задачі:

$$\Delta\phi = 0 \text{ в } Q_0; \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S\rangle; \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = h/\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}; \; -\omega^2\phi + Ah = 0 \text{ на } \Sigma_0, \tag{28}$$

де оператор A

$$Ah = -\mu\, div\left[\frac{\nabla h}{\left[1+(\nabla H_0)^2\right]^{1/2}} - \frac{\nabla H_0(\nabla h, \nabla H_0)}{\left[1+(\nabla H_0)^2\right]^{3/2}}\right] + \mu\, Bo\, h +$$

$$+ 0.5\left\{(\nabla\Phi_1, \nabla\Phi) - k^2(\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z)\,\Phi - \Phi_x H_* + (\nabla\Phi_{1x}, \nabla\Phi_1)\, h - \right.$$

$$\left. -k^2(\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z)\,(\Phi_{1x} - a_1)h - (\Phi_{1xx}H_*)h - (\Phi_{1x} - a_1)h_*\right\} \text{ на } \Sigma_0; \quad (29)$$

$$\frac{\partial h}{\partial e} = \frac{\partial H_0}{\partial e}\, \frac{(\nabla h, \nabla H_0)}{\left[1+(\nabla H_0)^2\right]^{1/2}} \text{ на } \partial\Sigma_0,$$

а

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \text{ в } Q_0; \ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S\rangle; \ \Phi + \Phi_{1x}h = a_1 h \text{ на } \Sigma_0,$$

$$h_* = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}H_{0y} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}H_{0z} + \left[\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y}H_{0y} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial z}H_{0z}\right]h - \quad (30)$$

$$- \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}h_y - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}h_z, \quad \text{на} \quad \Sigma_0.$$

Лема 5.3.1. Нехай (H_0, Φ_1) – розв'язок задачі (27), й $H_0 \in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi_1 \in W_2^2(Q_0 \cup \Sigma_0)$, $(\Phi^{(i)}, h^{(i)}, h_*^{(i)})$ визначається з розв'язку задачі (30), а $h^{(i)} \in C^1(P\Sigma_0)$, $\|h^{(i)}\|_{C^1} = 1$. Тоді

$$\int_{\Sigma_0}\left[k^2\Phi^{(1)}(\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z) - (\nabla\Phi^{(1)}, \nabla\Phi_1) + H_*\Phi_x^{(1)}\right]h^{(2)} / \left[1+(\nabla H_0)^2\right]^{1/2} ds =$$

$$= -\int_{Q_0}\left[k^2\Phi^{(1)}\Phi^{(2)} - (\nabla\Phi^{(1)}, \nabla\Phi^{(2)})\right]dQ + \int_{\Sigma_0}\frac{h_*^{(2)}(\Phi_{1x} - a_1)h^{(1)}}{\left[1+(\nabla H_0)^2\right]^{1/2}}ds.$$

Теорема 5.3.2. Нехай (H_0, Φ_1) – розв'язок задачі (27), а $H_0 \in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi_1 \in W_2^2(Q_0 \cup \Sigma_0)$. Тоді оператор A самоспряжений в $L_{2,\frac{1}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}}}(\Sigma_0)$.

Теорема 5.3.3 (про точковий спектр оператора A).

Нехай (H_0, Φ_1) – розв'язок задачі (27), $H_0 \in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi_1 \in W_2^2(Q_0 \cup \Sigma_0)$. Тоді

1 . Лінійний самоспряжений оператор A має дійсний точковий спектр, який складається лише з власних значень.

2 . Набір власних функцій $\left\{h^{(n)}\right\}$ є базисом в

$L_{2,\frac{1}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}}}(\Sigma_0)$.

3 . Множина власних значень оператора A має лише одну граничну точку $+\infty$. Множина від'ємних власних значень скінченна.

Теорема 5.3.4. Нехай (H_0, Φ_1) – розв'язок задачі (27), а $H_0 \in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi_1 \in W_2^2(Q_0 \cup \Sigma_0)$. Тоді

1 . Спектральна задача (28) має лише власні значення

$\left[\omega_n^2, h_n, \varphi_n\right]$ и $\forall n$, $\omega_n^2 \in \mathbb{R}$, $\left\{h_n\right\}$ – базис в $L_2(P\Sigma_0)$.

2 . Множина $\left\{n:\ \omega_n^2<0\right\}$ скінчевна.

Теореми 5.3.2-5.3.4 дають змогу узагальнити на цей клас задач результати глави 1.

Динамічна ознака стійкості відповідного (2π)-періодичного розв'язку задачі (26) може бути сформульована у вигляді $\omega_l^2>0$, $\forall l$ з задачі (28). Використовуючи спектральні властивості задачі, доведено, що

Наслідок 5.4.2. При умовах теореми 5.4.1 втрата стійкості віброкапілярної поверхні Σ_0 може статися лише скінченним числом лінійно незалежних способів.

Спектральна ознака стійкості зводить аналіз до визначення знаків власних значень оператора A.

Наслідок 5.4.3. При умовах теореми 5.4.1 спектральна ознака стійкості еквівалентна динамічному критерію стійкості.

Так само, як для задачі про капілярно-звукову форму рівноваги, вдається побудувати варіаційний принцип стійкості.

Теорема 5.4.4. Нехай (H_0,Φ_1) - розв'язок задачи (27), $H_0 \in C(P\Sigma_0)$, $\Phi_1 \in W_2^2(\langle Q_1\rangle \cup \Sigma_0)$. Тоді задача визначення стійких віброакустичних форм еквівалентна визначенню строгих мінімумів функціоналу

$$\Pi(H_0,H_*,\Phi_1)=\mu\Big[|\Sigma_0|-\cos(\alpha)|S|\Big]+\int_{Q_0}\mu Boz\,dQ-0.25\int_{Q_0}\Big[k^2(\Phi_1-a_1x-a_2y-a_3z)^2 -(\nabla\Phi_1)^2\Big]dQ-0.5\int_{\Sigma_0}\frac{H_*}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\Big(\Phi_1-a_1x-a_2y-a_3z\Big)ds,$$

де виконані умови зв'язку між H_0, H_* та Φ_1

$$\Delta\Phi_1+k\Phi_1=k^2\,(a_1x+a_2y+a_3z)\ \text{в}\ Q_0;\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\frac{H_*}{\sqrt{1+(\nabla H_0)^2}}\ \text{на}\ \Sigma_0,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=0\ \text{на}\ S;\ \Phi_1=a_1x+a_2y+a_3z\ \text{на}\ \Sigma_0.$$

Останній функціонал допускає спектральний розклад:

$$\Pi(d_\eta,a_l)=\mu\Big[|\Sigma_0|-\cos(\alpha)|S|\Big]+\int_{Q_0}\mu Boz\,dQ-0.25\sum_l\Big[\int_{\langle S\rangle}\frac{\partial(a_1x+a_2y+a_3z)}{\partial n}\Phi_l\,ds\Big]^2/\theta_l,$$

де $\Phi=\sum S_l\Phi_l$ - розклад задачі (30) за власними функціями:

$$\Delta\Phi+k^2\Phi=0\ \text{в}\ Q_0;\ \Phi=0\ \text{на}\ \Sigma_0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}=\lambda\Phi\ \text{на}\ \langle S\rangle.$$

Побудовані наближені проекційно-варіаційні методи розв'язку задачі про вібр假капілярну форму рівноваги в циліндрі колового перерізу, чисельно досліджені біфуркації форм рівноваги. Комп'ютерні тривимірні графіки ілюструють існування критичних значень k, при яких суттєво змінюється геометрія вільної поверхні.

Для задачі про власні значення оператора A оформульований варіаційний принцип, який є базою для схеми метода Рітца.

Теорема 3.6.1. Нехай виконані умови теореми 5.3.2. Тоді задача послідовного (в порядку зростання) визначення власних значень оператора A еквівалентна наступній варіаційній процедурі. Нехай $\mathcal{A}_0 \subset L_2(P\Sigma_0)$ ($P\Sigma_0$ - проекція Σ_0 на Oxy) - допустима множина функцій для функціоналів $\delta\mathcal{V}(h,h_*,\Phi)$ та $\delta\mathcal{V}_0(h,h_*,\Phi)$, $\Phi \in W_2^1(Q_0)$, $h_* \in W_2^{-1/2}(\Sigma_0)$. Тоді

$$\lambda_1 = \min_{\substack{h\in\mathcal{A}_0 \\ (\Phi,h_*)\in C_0}} \mathcal{V}(h,h_*,\Phi) = \min_{\substack{h\in\mathcal{A}_0 \\ (\Phi,h_*)\in C_0}} \left\{ \int_{P\Sigma_0} \left[\frac{(\nabla h,\nabla h)}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}} + \frac{(\nabla H_0,\nabla h)(\nabla H_0,\nabla h)}{(1+(\nabla H_0)^2)^{3/2}} + \left[Bo + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2\mu} \left[(\nabla\Phi_{1x},\nabla\Phi_1) - k^2(\Phi_1 - a_1x - a_2y - a_3z)(\Phi_{1x} - a_1) - (\Phi_{1xx}H_*) \right] \right] \right) h^2\,dydz +$$

$$+ \frac{1}{2\mu} \int_{Q_0} \left[k^2\Phi^2 - (\nabla\Phi,\nabla\Phi) \right] dQ -$$

$$\left. - \frac{1}{\mu} \int_{P\Sigma_0} \left\{ h_*(\Phi_{1x} - a_1)h \right\} dydz \right\} \Big/ \int_{P\Sigma_0} h^2\,dydz = \mathcal{V}(h_1,h_{*1},\Phi_1),$$

де $C_0 = \left\{ (\Phi,h_*) : \delta_\Phi \mathcal{V}_0(h,h_*,\Phi) = 0,\ \delta_{h_*} \mathcal{V}_0(h,h_*,\Phi) = 0,\ h\in\mathcal{A}_0 \right\}$, а

$$\delta\mathcal{V}_0(h,h_*,\Phi) = \int_{\langle Q_1\rangle} \left[k^2\Phi^2 - (\nabla\Phi,\nabla\Phi) \right] dQ + 2\int_{\Sigma_0} \frac{h_* - L[h]}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}} \left[\Phi + (\Phi_{1x} - a_1)n \right] ds,$$

$$L[h] = \left[\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} H_{0y} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial z} H_{0z} \right] h - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} h_y - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} h_z \quad \text{на } \Sigma_0;$$

$$\lambda_2 = \min_{\substack{h\in\mathcal{A}_1 \\ (\Phi,h_*)\in C_1}} \mathcal{V}(h,h_*,\Phi) = \mathcal{V}(h_2,h_{*2},\Phi_2), \text{ де } \mathcal{A}_1 = \left\{ h\in\mathcal{A}_0 : \int_{P\Sigma_0} hh_1\,dydz = 0 \right\} і$$

$$C_1 = \left\{ (\Phi,h_*) : \delta_\Phi \mathcal{V}_0(h,h_*,\Phi) = 0,\ \delta_{h_*} \mathcal{V}_0(h,h_*,\Phi) = 0,\ h\in\mathcal{A}_1 \right\};$$

. . . .

$$\lambda_l = \min_{\substack{h\in A_{l-1} \\ (\Phi, h_*)\in C_{l-1}}} \nu(h, h_*, \Phi) = \nu(h_l, h_{*l}, \Phi_l), \text{ де}$$

$$A_{l-1} = \left\{ h\in A_{l-2} : \int_{PI_0} hh_{l-1}\,dydz = 0 \right\} \text{ и}$$

$$C_{l-1} = \left\{ (\Phi, h_*) : \delta_\Phi \nu_0(h, h_*, \Phi) = 0,\ \delta_{h_*} \nu_0(h, h_*, \Phi) = 0,\ h\in A_{l-1} \right\}.$$

Сьома глава присвячена розв'язку ряду конкретних задач фізики, акустики, гідромеханіки, що пов'язані з розв'язком задач про акустичну чи вібровзаємодію, похідних чи узагальнених від них. За допомогою побудованих методів розв'язку відповідних еволюційних задач (глави 1-6) досліджено і описано ряд фізичних ефектів, пов'язаних з проявом віброакустичного впливу та зведених до аналізу задач, подібних до (6), (26).

В роботі описані ефекти провалу та перекиду рідини в обмеженій порожнині при горизонтальних вібраціях. Аналіз проблеми за допомогою методів глав 5-6 зводиться до знаходження мінімуму функціоналу. Після використання проекційних методів будується функція кількох змінних та обчислюється її мінімум. Це дає змогу не тільки вичислити значення частот, при яких втрачає стійкість плоска форма рівноваги, але й побудувати геометрію нової форми рівноваги. На конкретних прикладах досліджено вплив віброакустичної дії на частоти й форми коливання рідини в порожнині.

З використанням методу редукції показано, що під впливом акустичного поля рідина в трубі в невагомості починає рухатися від акустичного вібратора. Для цього проаналізована трьохфазна задача з двома вільними поверхнями, що по структурі подібна до задач (6) (в об'ємі, що торкається другої поверхні, всі умови однорідні - відсутній акустичний вібратор). На прикладі виписаний сталий режим руху й показано, що в деяких діапазонах хвильових чисел k рухається вільна поверхня. Це приводить в реальних гідродинамічних системах до проштовхування рідини.

На конкретних прикладах досліджено вплив поздовжніх вібрацій на частоти коливання рідини в порожнині.

В заключенні наведені основні результати, що виносяться на захист.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. О свободных колебаниях системы "жидкость-газ" в цилиндрическом сосуде в слабом гравитационном поле // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986.- С. 5-12 (сумісно з І.О.Луковським).
2. О формах равновесия свободной поверхности ограниченного объема жидкости, находящейся в высокочастотном акустическом поле // Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987.- С. 22-26.
3. Нелинейная динамика поверхности раздела жидкости и газа при наличии в газе высокочастотного акустического поля. Установившиеся режимы движения.- Киев, 1988.- 39с.- (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 88.9) (сумісно з І.О.Луковським).
4. Нелинейная динамика поверхности раздела жидкости и газа при наличии в газе высокочастотного акустического поля. Устойчивость установившихся рёжимов.- Киев, 1988.- 48с.- (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 88.10) (сумісно з І.О.Луковським).
5. О капиллярно-звуковых формах равновесия // Математическое моделирование динамических процессов в системе тел с жидкостью.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.- С. 77-84
6. Применение метода вариации границы для отыскания устойчивых капиллярно-звуковых равновесных форм // Тр. XIII науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР, Киев, 24 - 27 мая 1988г.- Ч. III/ Ин-т механики АН УССР.- Киев, 1988.- С. 528-532.- Деп. в ВИНИТИ 27.12.88 № 9073-В88.
7. К задаче управления свободной поверхностью ограниченного объема жидкости при помощи звука // Докл. АН УССР. Сер. А.- 1989.- № 7.- С. 52-55 (сумісно з І.О.Луковським).
8. Теория возмущения в нелинейных задачах акустического взаимодействия со свободной поверхностью жидкости // Всесоюз. конф. "Нелинейные проблемы диффер. ур-ний и математ. физики", 12-15 сент. 1989 г. Тез. докл. - Ч. 1.- Тернополь, 1989.- С. 254-255 (сумісно з І.О.Луковським).
9. Об осесимметричных "нетривиальных" капиллярно-звуковых равновесных формах // Тр. XIY науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР, Киев, 23 - 26 мая 1989г.- Ч. I/ Ин-т механики АН УССР.- Киев, 1989.- С. 192-196.-Деп. в ВИНИТИ 2.08.89 № 5164-В89.

10. Об устойчивости режима, порожденного "нетривиальной" осесимметричной капиллярно-звуковой равновесной формой // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.- С. 4-6.
11. Вариационная формулировка одной нелинейной краевой задачи с неизвестной поверхностью раздела двух областей // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем.- Киев:Ин-т математики АН УССР, 1989.- С. 4-6 (сумісно з І.О.Луковським).
12. О самосопряженности одного интегро-дифференциального оператора // Укр. мат. журн.- 1990.- 42, № 3.- С. 421-423 (сумісно з І.О.Луковським).
13. Пространственные движения резервуара с жидкостью, находящейся под действием виброакустической нагрузки.- Киев, 1990.- 56с.- (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 90.31) (сумісно з І.О.Луковським).
14. О формах равновесия свободной поверхности ограниченного объема жидкости, находящейся в условиях вибровоздействия // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.- С. 15-20.
15. Нелинейные волновые виброакустические процессы в ограниченных объемах жидкости и газа // Респ. семинар "Прочность и формоизменение элементов конструкций при воздействии динамических физико-механических полей", Киев, 25-27 сент. 1990 г.: Тез. докл.- Киев: Ин-т проблем прочности АН УССР, 1990.- С. 53 (сумісно з І.О.Луковським).
16. Вынужденные нелинейные колебания жидкости и газа, возбуждаемые акустическим источником в газе // Колебания упругих конструкций с жидкостью.- Новосибирск, 1990.- С. 127-131 (сумісно з І.О.Луковським).
17. Вариационный принцип типа Бейтмена в задаче об акустическом взаимодействии со свободной поверхностью жидкости // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.- С. 20-24 (сумісно з І.О.Луковським).
18. Собственные колебания свободной поверхности ограниченного объема жидкости, взаимодействующего с акустическим полем // Докл. АН УССР. Сер.А. - 1990.- № 12.- С. 23-25 (сумісно з І.О.Луковським).

19. Об акустическом воздействии на свободную поверхность ограниченного объема жидкости // Акуст. журн.- 1991.- 37, вып. 1.- С. 144-149 (сумісно з І.О.Луковським).
20. Об одном классе краевых задач в теории поверхностных волн // Укр. мат. журн.- 1991.- 43, № 3.- С. 359-364 (сумісно з І.О.Луковським).
21. О стабилизации поверхности раздела жидкости и газа при взаимодействии с акустическими полями в газе // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. - 1991.- № 3.- С. 80-86 (сумісно з І.О.Луковським).
22. О построении приближенных нелинейных моделей в задачах о взаимодействии акустического поля со свободной поверхностью жидкости // Докл. АН УССР. - 1991.- № 6.- С. 40-42 (сумісно з І.О.Луковським).
23. Об акустической транспортировке жидкости в трубе // Докл. АН УССР.- 1991.- № 9.- С. 82-84 (сумісно з І.О.Луковським).
24. Вариационный принцип Бейтмена для одного класса задач динамики и устойчивости поверхностных волн // Укр. мат. журн.- 1991.- 43, № 9.- С. 1181-1186 (сумісно з І.О.Луковським).
25. Формулировка нелинейных краевых задач пространственного движения твердого тела с жидкостью, подверженной воздействию акустического поля // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991.- С. 52-59.
26. Нелинейная динамика акустико- газожидкостных систем при высокочастотном воздействии // Гидромеханика.- 1992.- Вып. 65.- С. 52-59 (сумісно з І.О.Луковським).
27. Нелинейные модели в прикладных задачах динамики тел с жидкостью со свободной поверхностью // Прикл. механика.- 1992.- 28, № 11.- С. 75-83 (сумісно з І.О.Луковським, О.С.Лимарченко).
28. Вариационные формулировки задачи о взаимодействии поверхности раздела "жидкость-газ" с акустическим полем // Математ. методы исслед. прикладных задач динамики тел, несущих жидкость.- Киев, 1992.- С. 4-11 (сумісно з І.О.Луковським)
29. О воздействии акустического поля на поверхность раздела жидкости и газа // Проблемы гидромеханики в освоении океана: Материалы конф. по прикл. гидромеханике.- Киев: Ин-т гидромеханики АН Украины, 1992.- С. 141-144 (сумісно з

I.О.Луковським).
30. Вариационный подход к решению задачи о равновесии свободной поверхности жидкости в вибрирующем сосуде // Мат. методы исслед. прикладных задач динамики тел, несущих жидкость.- Киев, 1992.- С. 27-35.
31. Поведение свободной поверхности жидкости в вибрирующем ограниченном сосуде.- Киев, 1992.- 46с.- (Препр./ АН Украины. Ин-т математики; 92.22).
32. О виброакустическом воздействии на свободную поверхность ограниченного объема жидкости// Проблемы гидромеханики в освоении океана: Материалы конф. по прикл. гидромеханике.- Киев: Ин-т г тромеханики АН Украины, 1992.- С. 129-131.
33. Про вплив вібрації на геометрію та стійкість вільної поверхні обмеженого об'єму рідини // Доп. АН України.- 1993.- № 3.- С. 65-68 (сумісно з І.О.Луковським).
34. Waves on the liquid-gas free surface in limited volume in the presence of the acoustic field in gas // Int. Conf. Free Boundary Problem in Continuum Mech.- 15- 19 July, 1991.- Novosibirsk.- Abstracts.- 1991.- P. 82-83 (сумісно з І.О.Луковським).
35. Waves on the liquid-gas free surface in limited volume in the presence of the acoustic field in gas // Int. Series of Numerical Mathematics.- 1992.- 106.- P. 187-194 (сумісно з І.О.Луковським).
36. О воздействии звука на характер собственных колебаний поверхн сти раздела "жидкость-газ" в ограниченном объеме // кус журн.- 1993.- 39, вып. 2.- С. 357-361.
37. Прямые методы решения статических и спектральных задач теории взаимодействия поверхностных волн с акустическими полями.-Киев, 1993.- 49с.- (Препр./ АН Украины. Ин-т математики; 93.15).

Підп. до друку 25.10.93 Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,86 Ум. фарбо-відб. 1,86 . Обл.-вид.арк.
Тираж 100 пр. Зам. 377 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
[illegible] Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3 .