

ЗАПОРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

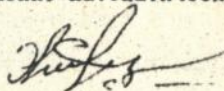
ЭЖКУВАТОВ КАЗИМ

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ  
КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

05.13.16 - Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов научных исследованиях

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук



Запорожье 1993



00802795 (V)

Робота виконана в Запорізькому державному університеті.

Научний керівитель - доктор технічних наук,  
професор Толук В.А.

Офіційними опонентами - доктор технічних наук,  
професор Веріцький В.В.

- кандидат технічних наук,  
доцент Сисюев М.А.


Ведуче підприємство - Запорізький індустріальний  
інститут

Захист дисертації состоится "28" грудня 1993г. в 15<sup>00</sup>  
на засіданні спеціалізованого ради К 088.52.02 при Запорізькому державному університеті по адресу: 330860 г. Запоріжжя, ул. Жуковського 68, ауд. 50

С дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Запорізького державного університета.

Автореферат розослан "27" ноября 1993г.

Учений секретар  
спеціалізованого ради  
к.т.н., доцент

 Сисюев М.А.

## Общая характеристика работы

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Численные методы являются одним из основных, а зачастую и единственным аппаратом решения современных прикладных задач механики, и в частности динамических контактных задач. Наибольшее распространение получили методы, основанные на дискретизации области, в которой ищется решение задачи.

В приложениях бывает необходимо исследовать случаи многократного соударения тел, затратив на это небольшое время и получив достаточную точность.

Классический вариант МКЭ-метод перемещений естественно наиболее разработанный, прост, но при этом обладает целым рядом недостатков, делающим его применение к трехмерным задачам, задачам разрушения и взаимодействия тел, концентрации напряжений трудно применимым.

По этому много работ посвящено неклассическим вариантам МКЭ, в которых разрабатываются приемы устранения главных недостатков: невысокой точности определения напряжений, трудоемкости решения динамических контактных задач, сложности расчета трехмерных задач.

Таким образом, актуальность проведенных исследований обусловлена, с одной стороны, практической важностью решаемых с помощью рассматриваемого подхода задач, с другой — необходимостью разработки математического аппарата и

построения алгоритмов, удобных для практического использования при проведении проектно-конструкторских работ.

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ.** Разработка эффективного варианта метода конечных элементов для динамических контактных задач одного или нескольких упругих тел с жесткой преградой.

Исследование на его основе перемещений и напряжений, возникающих в плоских телах прямоугольной и круглой формы, составление на базе разработанного метода алгоритмов и комплекса программ.

**НАУЧНАЯ НОВИЗНА.** Разработана модификация метода конечных элементов для расчета перемещений и контактных напряжений для задач удара упругих тел. Предложенный подход развит на задачи с переменной зоной контакта, причем зона контакта определяется в процессе решения (предложена соответствующая методика).

Разработаны алгоритмы и реализующие их пакеты прикладных программ для решения некоторых классов задач контакта упругих тел. Проведено исследование поведения круглой пластинки при падении ее на жесткое основание перпендикулярно плоскости пластинки.

**ДОСТОВЕРНОСТЬ** основных научных результатов обеспечивается строгостью постановки задачи на поиск экстремума энергетического функционала, строгостью математических методов для ее решения, решение тестовых задач, соответствием

пслученных результатов физическому содержанию задач. Численной проверкой сходимости метода.

**НАУЧНАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ.** Предложенные в диссертационной работе алгоритмы и комплекс программы могут быть использованы НИИ и КБ при расчетах прочности, надежности, долговечности элементов конструкций.

Результаты исследований могут быть использованы в соответствующих организациях при расчетах на прочность деталей и машин, элементов конструкций подземных сооружений различного назначения, таких как тоннели метрополитенов, круговые выработки, подземные резервуары и т.д. под воздействием ударных, взрывных и сейсмических нагрузок и различного рода конструкций, внедряющихся с малыми и большими скоростями в деформируемую среду, при создании противометеоритной защиты космических аппаратов и т.д.

**АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ.** Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на :

-научном семинаре кафедры прикладной математики Запорожского государственного университета ( г.Запорожье, 1993г. );

-научной конференции преподавателей и студентов Гулистанского государственного университета ( г.Гулистан, 1993г. );

-научном семинаре кафедры высшей математики Запорожского индустриального института под руководством проф. Тамурова Н.Г. (г. Запорожье, 1993г. );

-научном семинаре кафедры зданий и сооружений аэропортов Киевского института инженеров гражданской авиации под руководством проф. Вершского Ю.В. (г.Киев, 1993 г.);

-научном семинаре кафедры программного обеспечения и математического моделирования Запорожского индустриального института под руководством проф. Пожухова В.И.(г.Запорожье, 1993г.).

**ПУБЛИКАЦИИ.** По результатам выполненных исследований опубликовано 3 работы, в которых отражено основное содержание диссертационной работы.

**СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения.

Она содержит 168 страниц, включая 35 иллюстраций 3 таблицы, список литературы содержит 100 наименований, приложение на -- страницах.

#### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

ВО ВВЕДЕНИИ сделан краткий обзор работ по применению метода конечных элементов к решению динамических контактных задач. Отмечены преимущества и недостатки МКЭ в сравнении с МКР и МГЭ для рассматриваемого класса задач.

Все основные модификации МКЭ (Метод перемещений, метод гибридных ЭЭ, метод равновесных граничных элементов) получены, исходя из одного энергетического принципа. В

-каждом из случаев некоторые соотношения считаются выполненными точно, а некоторые - приближенно. Отмечается, что среди многообразия формальных постановок МКЭ можно выбрать необходимую модификацию, наиболее отвечающую особенностям данной задачи.

Приведен краткий обзор выполненной работы, изложены актуальность исследований и цель работы.

ПЕРВАЯ ГЛАВА посвящена модифицированному численному методу на основе смешанной формы метода конечных элементов для решения динамической контактной задачи. Построена дискретная модель и введены уравнения динамики конечного элемента.

В параграфе 1.1 строится дискретная модель сплошной среды. Исследуемые тела разбиваются на треугольные симплекс-элементы. Поле перемещения каждого элемента имеет вид:

$$U^e(x, y, t) = \sum_{i=1}^6 N_i^e q_i^e(t)$$

где  $U(x, y, t)$  - перемещение в момент времени  $t$ .

$N_i$  - функции формы,  $q_i$  - узловые перемещения, и  $e$  - номер каждого элемента.

Для вывода уравнений динамики отдельного элемента воспользуемся принципом виртуальных перемещений,

$$-\delta \Pi^e + \delta A_{ин}^e + \delta A_p^e + \delta A_c^e = 0$$

где  $\delta \Pi = \int (\delta \varepsilon)^T \{ \delta \} dv$  - вариация потенциальной энергии,  $\delta A_{ин}$  - виртуальная работа инерционных сил,  $\delta A_p$  - внешние нагрузки и  $\delta A_c$  - сосредоточенные силы.

После преобразования получаем уравнение динамики конечного элемента

$$[M^e] \{ \ddot{q}^e \} + [C^e] \{ \dot{q}^e \} = [Q^e]_p^T + [Q^e]_c^T$$

где

$$[M^e] = \rho \int [N^e]^T [N^e] dV - \text{матрица инерции элемента,}$$

$$[C^e] = \int [B^e]^T [D] [B^e] dv - \text{матрица жесткости элемента,}$$

$$[Q^e]_p = \int [N^e]^T \{ q \} dS - \text{вектор поверхностных сил,}$$

$$[Q^e]_c - \text{вектор сосредоточенных сил.}$$

В параграфе 1.2 показано, как путем ассамблирования объединять уравнения для каждого из элементов в одну систему

$$[M] [\ddot{q}]^T + [C] [\dot{q}]^T = [Q]_p^T$$

В этом параграфе также приведены формулы вычисления матриц жесткости и инерции.

В параграфе 1.3 полученная система уравнений численно

интегрируется методом Галеркина на интервале времени  $(0, t)$ . В результате приходим к системе линейных уравнений

$$\left(\frac{[M]}{T} + \frac{[C] \cdot T}{6}\right) [q]_1 = \int_0^T [Q]_p^t \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt + [M] [\dot{q}]_0 -$$

$$- \left(\frac{[C] \cdot T}{3} + \frac{[M]}{T}\right) [q]_0$$

$$\left(\frac{[M]}{T} + \frac{[C] \cdot T}{6}\right) [q]_{i+1} = \int_0^T \left([Q]_p^{(i)} \cdot \frac{t}{T} + [Q]_p^{(i+1)} \left(1 - \frac{t}{T}\right)\right) dt -$$

$$- 2 \left(\frac{[C] \cdot T}{3} - \frac{[M]}{T}\right) [q]_i - \left(\frac{[M]}{T} + \frac{[C] \cdot T}{6}\right) [q]_{i-1}$$

Так как  $[q]_0$  и  $[\dot{q}]_0$  известны из начальных и граничных условий, то первое уравнение можно использовать для вычисления  $[q]_1$ , а второе — для вычисления всех требуемых значений  $[q]_{i+1}$  для любого  $i$ , начиная с  $i=1$ .

В параграфе 1.4 описан алгоритм смещенной формы МКЭ.

Рассматриваются возможности реализации подобных вычислительных процессов с учетом задания части нагрузок и части напряженно-деформированного состояния и получение неизвестной части нагрузок и неизвестной части деформированного состояния.

В результате получаем следующую систему уравнений

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

Решая это уравнение при  $t=0$  получаем перемещения во всех узлах и одновременно контактное напряжение в контактной зоне. Делаем шаг по времени и снова получаем перемещения для всех узлов и контактное напряжение в зоне контакта и т.д., пока не достигнем нужного момента времени.

В этом и состоит модификация метода конечных элементов, выраженная в том, что поверхностные силы аппроксимируются как бы граничными элементами и вводятся в задачу как равнозначные элементы.

ВО ВТОРОЙ ГЛАВЕ предлагается процедура составления системы уравнений, ее преобразование и решение, а также представлена общая блок-схема вычислений и подпрограммы.

В параграфе 2.1 показан алгоритм расширения матрицы инерции от размера  $b \times b$  до размера  $2n \times 2n$ . Суживая расширенные матрицы всех элементов, получим глобальные матрицы жесткости и инерции.

В параграфе 2.2 предложено преобразование и решение системы линейных уравнений

$$[K]\{q\} = \{F\}$$

где  $[K]$  — матрица жесткости,  $\{F\}$  — вектор правых частей. Особо отметим, что матрица в результирующей системе уравнений обладает двумя свойствами: симметрия и положительная определенность.

В параграфе 2.3 матрица коэффициентов  $[K]$  в уравнениях является ленточной и ее целесообразно хранить в машинной памяти в виде прямоугольного массива вместо квадратного. Такой способ запоминания матрицы  $[K]$  приводит к необходимости составления ряда подпрограмм. Преобразование матрицы  $[K]$  в верхнюю треугольную осуществлен в одной подпрограмме, а модификация вектора столбца  $\{F\}$  и решение системы обратной прогонкой — в другой.

В параграфе 2.4 показан способ хранения всех элементов матрицы и вектора правых частей в общем одномерном массиве в виде столбца. Основной причиной использования одномерного массива является то, что его размер может быть установлен при выполнении программы.

При этом исключаются ошибки, связанные с определением размеров массивов.

Так же в этой главе представлена общая блок-схема вычислений.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА начинается обзором работ, посвященных соударению тел. Выделяются два подхода к решению данной задачи:

- в рамках механики сплошных сред, что приводит к ин-

тегро-дифференциальными уравнениями,

- более современный и точный подход, который используется и автором.

Проведенный обзор литературы свидетельствует о том, что проблема моделирования МКЭ в контактных задачах при ударе деформируемого тела о жесткую преграду очень сложна, и что подобные процессы практически не рассматривались в упругих и нелинейно-упругих средах.

В главе рассматриваются возможности реализации подобных вычислительных процессов с учетом задания части нагрузок и части напряженно-деформированного состояния и получения неизвестной части деформированного состояния. Для упрощения, но без потери общности, рассматриваемые внешние усилия аппроксимируются сосредоточенными силами в узлах. Как самостоятельные приложения рассматриваются возможности решения контактных задач.

В параграфе 3.1 дана постановка задачи: упругое однородное тело прямоугольной формы (ударник) конечного размера падает с постоянной скоростью  $U$ . В начальный момент времени  $t=0$  своей нижней плоской стороной нормально сталкивается с поверхностью упругого прямоугольного тела (преградой), противоположная сторона которого жестко закреплена, причем на верхней стороне ударника начинает действовать постоянная нагрузка.

При применении МКЭ к этой задаче получены две системы дифференциальных уравнений; для ударника и для преграды.

В параграфе 3.2 отмечается, что в качестве граничных условий в зоне контакта рассматриваются условия полного

прилипания и отсутствия трения и описан метод учета внешних связей в данной модели.

В параграфе 3.3 дан вычислительный алгоритм для сведения систем дифференциальных уравнений, полученных в параграфе 3.1 к системам линейных уравнений.

В задачах теории упругости должны быть фиксированы некоторые перемещения. Методика соответствующего преобразования систем линейных уравнений для данного случая дана так же в этом разделе.

Для проверки правильности полученных формул в параграфе 3.4 решается соответствующая одномерная задача и сравниваются решения, полученные аналитически и с помощью данного метода. Отмечается удовлетворительное совпадение результатов.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА посвящена применению разработанной методики к решению конкретных задач. Рассмотрены динамические контактные задачи удара упругого стержня, четырехугольного тела и круглой пластинки о жесткую преграду, а так же рассмотрены задачи о деформировании этих тел под действием других тел, двигающихся с заданной скоростью.

В параграфе 4.1 рассматривается три задачи:

1. Удар упругого стержня о жесткую преграду.

2. Упругий однородный стержень длины  $L$  одним концом закреплен в вертикальном положении. Сверху на него падает второй стержень длины  $L_1$  со скоростью  $U_0$ , и в начальный момент времени  $t=0$  нижним концом нормально сталкивается с нижним стержнем.

3. Упругий однородный стержень длины  $L$  закреплен одним концом в вертикальном положении. На другой конец стержня поставили второй стержень длины  $L_1$  из того же материала. Сверху на него падает третий стержень длины  $L_2$  со скоростью  $U$ , и в начальный момент времени  $t=0$  нижним концом нормально сталкивается со средним стержнем.

Данная задача приведена здесь для сравнения полученных результатов с аналитическим решением. Приведены графики изменения напряжения в точках контакта стержней, исследуется отскок стержня.

В параграфе 4.2 рассматриваются три задачи:

1. Удар упругого прямоугольного тела о жесткую преграду.
2. Упругое однородное прямоугольное тело (ударник) конечного размера падает с постоянной скоростью  $U_0$ . В начальный момент времени  $t=0$  своей нижней плоской стороной нормально сталкивается с поверхностью упругого прямоугольного тела (преградой), противоположная сторона которого жестко заделана.
3. Упругое однородное прямоугольное тело конечного размера закреплено нижней стороной за жесткую преграду. На другую сторону прямоугольного тела поставлено второе прямоугольное тело из того же материала. Сверху на него падает третье прямоугольное тело со скоростью  $U_0$ . В начальный момент времени  $t=0$  нижней стороной сталкивается с средним прямоугольным телом.

Каждое прямоугольное тело разбивается на 60 треугольных симплекс-элементов, каждый из которых имеет шесть узловых компонент, которые связаны между собой в узлах.

На рис. 1.а показан процесс изменения напряжения от времени во 2-й узловой контактной точке между верхним и средними телами. Напряжение в этой точке очень быстро растет до момента  $t=0.12 \times 10^{-6}$ , в интервале  $0.12 \times 10^{-6} < t < 0.56 \times 10^{-6}$  значение напряжения колеблется на этом уровне, и при  $t=0.56 \times 10^{-6}$  достигает максимального значения, потом оно резко убывает и меняет знак. Процесс изменения напряжения со временем во 2-й узловой точке между нижним и средними телами показано на рис. 1.в.

На соответствующих графиках изображены перемещения некоторых точек, напряжения в зоне контакта, углы волн и скорости некоторых точек, а так же исследуется отскок прямоугольного тела.

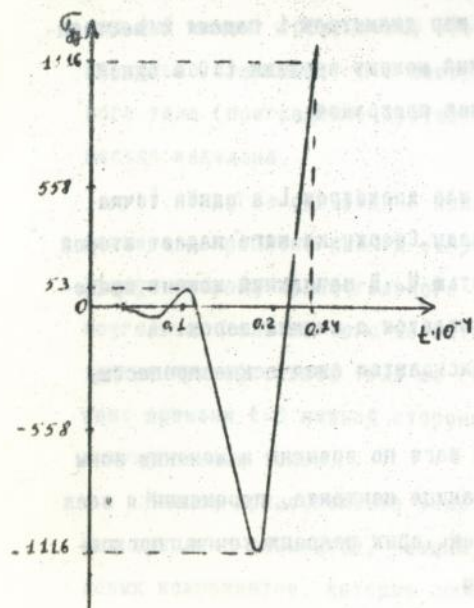
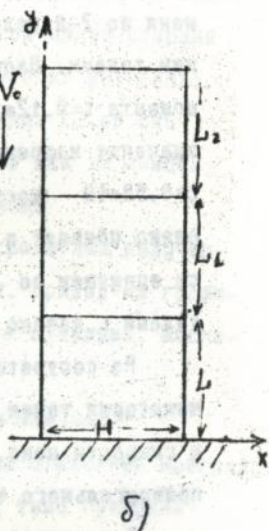
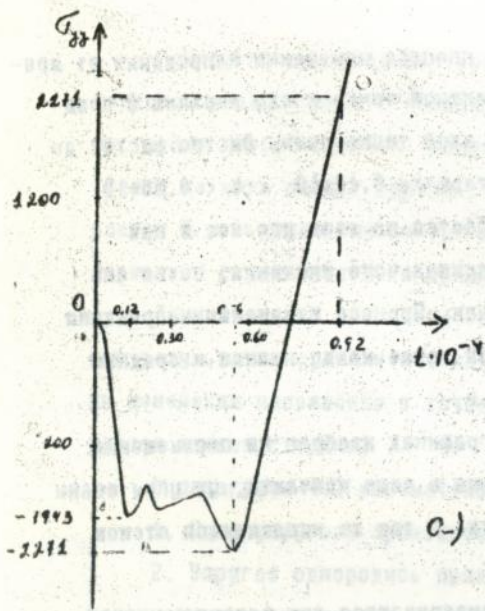
В параграфе 4.3 рассматриваются две задачи:

1. Упругий однородный шар диаметром  $L$  падает с постоянной скоростью  $U_0$ . В начальный момент времени  $t=0$  в одной точке сталкивается с жесткой преградой.

2. Упругий однородный шар диаметром  $L$  в одной точке закреплен за жесткую преграду. Сверху на него падает второй шар диаметром  $L_1$  со скоростью  $U_0$ . В начальный момент времени  $t=0$  в одной точке сталкивается с нижним шаром.

В начале параграфа описываются физические процессы, происходящие в шаре.

Исследуются на каждом шаге по времени изменение зоны контакта, напряжение на границе контакта, перемещения всех узловых точек и скорости некоторых узловых точек, прохождение упругой волны по телу.



b)

Зависимость длины зоны контакта от времени изображена на графике (Рис.2).

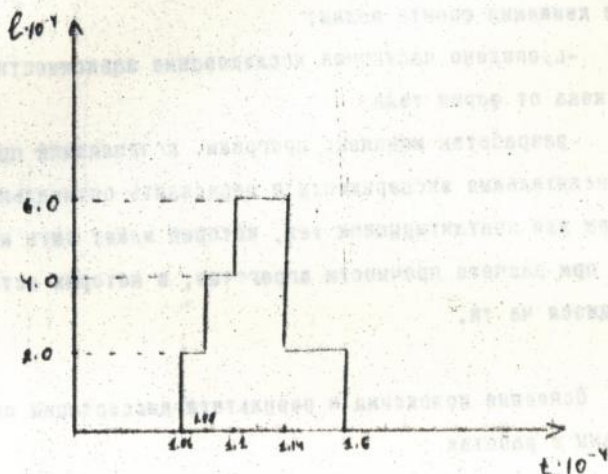


Рис.2

Исследуется процесс отскока шара от преграды и шара от шара.

В ЗАКЛЮЧЕНИИ сформулированы основные результаты и выводы диссертации, которые сводятся к следующему:

-разработан вариант метода конечных элементов для решения задач контакта упругих тел;

-разработана схема численного исследования напряженно-деформированного состояния упругого стержня, прямоугольника и шара при ударе о жесткую преграду. Соответствующие программы реализованы на языке Фортран IV для ЕС ЭВМ.

Программы отлажены и проверены на тестовых примерах;

-предложен и опробован алгоритм определения зоны кон-

такта, которая изменяется со временем;

-проведены вычислительные эксперименты по исследованию движения фронта волны;

-определено частичное исследование зависимости времени отскока от формы тела;

-разработан комплекс программ, позволяющий проводить вычислительные эксперименты и определять оптимальные параметры для контактирующих тел, который может быть использован при расчете прочности агрегатов, в которых есть соударяющиеся части.

Основные положения и результаты диссертации опубликованы в работах :

1.Толок В.А., Зыкуватов К. К развитию вычислительной процедуры алгоритмической системы решения задач теории упругости на контактной задаче.//К., 1992. -18с. Деп. УкрНИИИ-ТИ. N -Ук.92

2.Толок В.А., Зыкуватов К. Разработка вычислительной схемы расчета удара жесткого тела//Республиканский семинар по информатике; Тез. докл. -Гулистан. 1993. -С.71.

3.Зыкуватов К. Применение МКЭ в решении динамической задачи.//Областной семинар по МКЭ; Тез. докл. -Джизак. 1993. -С.40.

464157

AB 28.734  
**AB 28.734**

Подписано к печати 12.11.1993г. Формат 60x84 / 16

---

г. Запорожье, ООП ОУС, зак. № 1207, тир. 100 экз.