

АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ

На правах рукопису

ТАМУРОВ ЮРІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ

ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН З УЗАГАЛЬНЕННЯМИ

ФІЗИКО-КІНЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Київ - 1993

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Запорізькому індустріальному інституті

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор А.Т.Василенко
доктор фізико-математичних наук,
професор Б.Л.Пелех
доктор технічних наук,
професор І.А.Цурпал

Провідна організація: Київський автомобільно-дорожній інститут

Захист відбудеться " 25 " січня 1994 р.

в 10 годин на засіданні спеціалізованої вченої
ради Д 016.49.01 в Інституті механіки
АН України /252057, Київ-57, вул.Нестерова,3/

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці
Інституту механіки АН України /вул.Нестерова,3/

Автореферат розіслано " 21 " грудня 1993 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради
доктор технічних наук,
професор

І.С.Чернишенко

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00802764 (R)

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Вимоги перспективних галузей машинобудування і приладобудування у використанні тонкостінних конструкційних елементів типу пластин і оболонок шаруватої неоднорідної структури, які б мали змогу працювати при підвищених зовнішніх навантаженнях детермінованого або випадкового характеру, висувають у розряд актуальних наукові і інженерні проблеми побудови уточнюючих математичних моделей деформування і розробці на їх основі теорії і методів розв'язання нових більш складних класів динамічних задач.

Використання матеріалів з регульованими фізико-механічними властивостями у вигляді окремих шарів неоднорідних оболонок і пластин, зокрема тришарових, зменшує матеріаломісткість виробів, покращує їх технологічність, споживчі властивості і конструктивну надійність, що обумовлює в значній мірі якість продукції, її довговічність в експлуатації.

Сьогодні відома велика кількість матеріалів, які вже на початковій стадії деформування в практично важливій зоні деформацій 0,1-1,5% проявляють відхилення від закону Гука. Деякі із таких матеріалів вже знайшли застосування як середній шар тришарових конструкцій, а подальше їх використання буде значно розширюватись.

Застосування у вигляді середнього шару матеріалів, які мають нелінійно-пружні властивості з врахуванням деформацій в поперечному напрямку значно ускладнюють побудову варіантів нелінійної теорії. Додаткове врахування ефектів поперечного зсуву в зовнішніх ортотропних шарах веде до результатів, узагальнюючих ряд відомих фізико-кінематичних моделей.

На цей час переважна більшість досліджень по нелінійній динаміці конструкцій виконана в припущенні лінійної залежності між напруженнями і деформаціями і детермінованому характері навантажень. Тому актуальною залишається проблема розробки адекватних напружно-деформованому стану тришарового пакета математичних моделей, побудові на їх основі теорій і аналітичних методів розв'язку нелінійних задач динаміки тришарових оболонок складної внутрішньої структури.

Метою роботи є:

- 1) розробка варіанта нелінійної теорії деформування, пристосовно до тришарових оболонок, утворених із нелінійно-пружного стисливого матеріалу середнього шару і податливих на попе-

речний зсув зовнішніх ортотропних шарів;

2) здобуття пристосованих для практичного використання рівнянь, які дають змогу розв'язувати складні задачі нелінійної динаміки;

3) застосування і розвиток відомих аналітичних методів досліджень до систем нелінійних диференціальних рівнянь і вивчення на їх основі динаміки детермінованих і випадкових процесів тришарових оболонок і пластин.

Наукова новизна дисертації полягає у наступному:

1) для нелінійно-пружного середнього шару утримані шість компонент тензора напружень з урахуванням функцій середнього подовження і квадрату інтенсивності деформацій зсуву при квадратичному законі стиснення по товщині;

2) побудовані нові математичні моделі деформування тришарових оболонок і пластин, які зображені варіаційними рівняннями відносно деформацій шарів і системами нелінійних диференціальних рівнянь відносно переміщень;

3) одержані нелінійні диференціальні рівняння відносно амплітуд поперечних коливань серединних поверхнень шарів і їх кореляційних функцій, які призначені для досліджень поведінки вільно опертих пологих оболонок при детермінованих і випадкових діях;

4) розвинені аналітичні методи дослідження динамічних задач стосовано до нелінійно-пружних тришарових оболонок складної внутрішньої структури;

5) розв'язані нові класи задач, виявлені якісно нові механічні ефекти пов'язані з урахуванням впливу нелінійно-пружних факторів на інтегральні характеристики динамічних процесів.

Вірогідність результатів. Вірогідність головних наукових положень і побудованих математичних моделей забезпечена використанням при їх формулюванні експериментально обґрунтованих законів деформування ортотропних і нелінійно-пружних ізотропних тіл, а також варіаційних принципів класичної механіки. Вірогідність кількісних і якісних результатів розрахунків динамічних задач визначається аналітичними розв'язками диференціальних рівнянь, вибором апробованих, з достатньою точністю апроксимуючих рішення функцій, а також оцінками збіжностей розв'язків у нових задачах динаміки і порівняннями одержаних результатів з вже відомими.

Практична цінність роботи полягає в тому, що запропонована узагальнена теорія і методи її реалізації є основою досліджень великого кола прикладних задач, зокрема для вивчення низькочастотних динамічних процесів тришарових оболонок і пластин несиметричної будови, шари яких виготовлені із композитних матеріалів різномірної структури. Одержані розв'язки і графічний ілюстраційний матеріал дозволяють обґрунтовано і з достатньою вірогідністю прогнозувати поведінку проектуємих тришарових тонкостінних елементів конструкцій при динамічних діях випадкового або детермінованого характеру, приймати до уваги вплив специфічних механічних ефектів, які установлені при урахуванні нелінійної пружності середнього шару.

Дослідження, наведені у дисертації, виконані згідно плану НДР вузів у галузі механіки на 1985-90 рр. МВССО СРСР і плану пріоритетних наукових досліджень на 1992-94 рр. Міністерства освіти України. Okремі результати роботи використані у проектній практиці КБ "Південне" і КБ Запорізького енерго-механічного заводу.

А пробація роботи. Okремі результати роботи доповідалися і обговорювалися: на II і III Всесоюзних нарадах-семінарах молодих науковців "Актуальные проблемы механики оболочек" /Казань, 1985, 1988/, на II Всесоюзному симпозиумі "Устойчивость в механике деформируемого твердого тела" /Калінін, 1986/, на II і III Всесоюзних конференціях з механіки неоднорідних структур /Львів, 1987, 1991/, на XIV, XV Всесоюзних конференціях з теорії пластин і оболонок /Кутаїсі, 1987; Казань, 1990/, на VI Всесоюзній конференції з композитних матеріалів /Ленінакан, 1987/, на III Всесоюзній конференції "Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов" /Казань, 1988/, на III науково-технічній конференції "Повышение надежности и долговечности машин и сооружений" /Запоріжжя, 1988/, на III Всесоюзній конференції "Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов" /Запоріжжя, 1989/, на Всесоюзній конференції "Технологические проблемы прочности несущих конструкций" /Запоріжжя, 1991/, на міжреспубліканському науковому семінарі "Технологические проблемы прочности" /Подольск, 1992/.

Дисертація в цілому доповідалась на семінарі відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ Інституту механіки АН України /Київ, 1993 р./, на семінарі Інституту технічної механіки

АН України /Дніпропетровськ, 1993 р./, на семінарі Київського автомобільно-дорожного інституту /1993 р./, на семінарі кафедри опору матеріалів і будівельної механіки Запорізького індустріального інституту /1993 р./.

П у б л і к а ц і я. Основний зміст дисертації опубліковано у 23 наукових роботах.

С т р у к т у р а і о б'є м р о б о т и. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти глав, висновку і бібліографії. Її загальний об'єм складає 251 сторінку машинописного тексту, включаючи 32 рисунка, 5 таблиць і список літератури із 178 найменувань.

О С Н О В Н И Й З М І С Т Р О Б О Т И

У вступі наведено огляд робіт, які містять наукові положення, необхідні для обґрунтування теоретичних і методичних основ розробки теорії тришарових оболонок, окремі шари яких утворені із нелінійно-пружних і ортотропних матеріалів; подані постановки нелінійних задач і методи їх розв'язання, аналіз якісних і кількісних результатів. Обґрунтована актуальність виконаних в дисертації досліджень, сформульована ціль і наукова новизна дисертації, подана коротка анотація роботи по главам і головні наукові результати, які виносяться на захист.

Відзначено, що до теперішнього часу відома велика кількість публікацій, присвячених теорії і методам розрахунку тришарових оболонок, а фундаментальним внеском у цьому напрямі є дослідження А.Я.Александрова, А.О.Амбарцум'яна, Л.Е.Брюккера, Е.І.Григолюка, К.З.Галімова, М.А.Ільгамова, Л.М.Куршина, Х.М.Муштарі, О.П.Прусакова, Е.Рейснера, О.В.Саченкова, П.П.Чулкова. Питанням побудови уточнюючих теорій ортотропних, трансверсально-ізотропних і шаруватих оболонок відводилась велика увага в працях М.А.Алфурова, В.В.Болотіна, Г.А.Ваніна, А.Т.Василенка, Б.Л.Пелеха, В.Г.Піскунова, О.О.Рассказова, В.С.Саркісяна, М.О.Шульги.

Розвиток нелінійної теорії і методів розв'язання динамічних задач обумовлений результатами, одержаними В.В.Болотіним, А.С.Вольміром, В.Ц.Гнуні, О.М.Гузєм, М.А.Ільгамовим, В.Д.Кубенко, П.М.Огібаловим, Г.Шмідтом, В.Флюге.

Відмічено істотний внесок у питання побудови визначальних співвідношень для нелінійно-пружних тіл, розв'язання деяких класів фізично-нелінійних задач статички і концентрації напружень біля отворів, який зробили О.М.Гузь, Г.Каудерер, Ю.М.Немиш,

Г.М.Савін, І.Г.Терегулов, Л.О.Толоконніков, І.А.Цурпал, І.С.Чернишенко та інші.

В першій главі побудований варіант нелінійної теорії тришарових пологих оболонок, який відрізняється врахуванням поперечних деформацій зсуву в зовнішніх шарах і нелінійно-пружних властивостей в стисливому матеріалі середнього шару.

Напруження в матеріалах зовнішніх ортотропних шарів описані законом Гука

$$h \leq z \leq h + \delta_1:$$

$$\sigma_x = B_{11} \varepsilon_x + B_{12} \varepsilon_y; \quad \sigma_y = B_{22} \varepsilon_y + B_{21} \varepsilon_x; \quad /1/$$

$$\tau_{xy} = B_{66} \varepsilon_{xy}; \quad \tau_{xz} = B_{55} \varepsilon_{xz}; \quad \tau_{yz} = B_{44} \varepsilon_{yz}.$$

Для шару $-h - \delta_2 \leq z \leq -h$ виконуються ті ж співвідношення /1/, помічені для відзнаки індексом */.

Напружений стан в середньому шарі описується співвідношеннями Каудерера

$$-h \leq z \leq h:$$

$$\tilde{\sigma}_x = 3\tilde{K} \chi(\tilde{\varepsilon}_0) \tilde{\varepsilon}_0 + 2\tilde{G} \gamma(\tilde{\Psi}_0^2) (\tilde{\varepsilon}_x - \tilde{\varepsilon}_0); \quad \tilde{\tau}_{xy} = \tilde{G} \gamma(\tilde{\Psi}_0^2) \tilde{\varepsilon}_{xy};$$

$$\tilde{\sigma}_y = 3\tilde{K} \chi(\tilde{\varepsilon}_0) \tilde{\varepsilon}_0 + 2\tilde{G} \gamma(\tilde{\Psi}_0^2) (\tilde{\varepsilon}_y - \tilde{\varepsilon}_0); \quad \tilde{\tau}_{xz} = \tilde{G} \gamma(\tilde{\Psi}_0^2) \tilde{\varepsilon}_{xz}; \quad /2/$$

$$\tilde{\sigma}_z = 3\tilde{K} \chi(\tilde{\varepsilon}_0) \tilde{\varepsilon}_0 + 2\tilde{G} \gamma(\tilde{\Psi}_0^2) (\tilde{\varepsilon}_z - \tilde{\varepsilon}_0); \quad \tilde{\tau}_{yz} = \tilde{G} \gamma(\tilde{\Psi}_0^2) \tilde{\varepsilon}_{yz},$$

де $\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3} (\tilde{\varepsilon}_x + \tilde{\varepsilon}_y + \tilde{\varepsilon}_z); \quad \chi(\tilde{\varepsilon}_0) \approx 1 + \tilde{\chi}_2 \tilde{\varepsilon}_0^2; \quad \gamma(\tilde{\Psi}_0^2) \approx 1 + \tilde{\gamma}_2 \tilde{\Psi}_0^2;$

$$\tilde{\Psi}_0^2 = \frac{8}{9} (\tilde{\varepsilon}_x^2 + \tilde{\varepsilon}_y^2 + \tilde{\varepsilon}_z^2 - \tilde{\varepsilon}_x \tilde{\varepsilon}_y - \tilde{\varepsilon}_y \tilde{\varepsilon}_z - \tilde{\varepsilon}_z \tilde{\varepsilon}_x) + \frac{2}{3} (\tilde{\varepsilon}_{xy}^2 + \tilde{\varepsilon}_{xz}^2 + \tilde{\varepsilon}_{yz}^2)^{1/3}/$$

Використовуючи принцип Лагранжа, одержано варіаційне рівняння відносно деформацій

$$\delta \mathcal{J} = \iint \left\{ \int_h^{h+\delta_1} (K_1 \delta \varepsilon_x + K_2 \delta \varepsilon_y + K_4 \delta \varepsilon_{xy} + K_5 \delta \varepsilon_{xz} + K_6 \delta \varepsilon_{yz}) + \right. \quad /4/$$

$$\left. + \int_{-h}^{-h-\delta_2} (\tilde{K}_1 \delta \tilde{\varepsilon}_x + \tilde{K}_2 \delta \tilde{\varepsilon}_y + \tilde{K}_3 \delta \tilde{\varepsilon}_z + \tilde{K}_4 \delta \tilde{\varepsilon}_{xy} + \tilde{K}_5 \delta \tilde{\varepsilon}_{xz} + \tilde{K}_6 \delta \tilde{\varepsilon}_{yz}) + \right.$$

$$+ \int_{-h-\delta_2}^{-h} (K_1^* \delta \varepsilon_x^* + K_2^* \delta \varepsilon_y^* + K_4^* \delta \varepsilon_{xy}^* + K_5^* \delta \varepsilon_{xz}^* + K_6^* \delta \varepsilon_{yz}^*) dz - \\ - q_{v_1}(x; y) \delta w_1(x; y) - q_{v_2}(x; y) \delta w_2(x; y) \} dx dy = 0,$$

де

$$K_1 = 2(B_{11} \varepsilon_x + B_{12} \varepsilon_y); \quad K_2 = 2(B_{22} \varepsilon_y + B_{12} \varepsilon_x); \\ K_4 = 2B_{66} \varepsilon_{xy}; \quad K_5 = 2B_{55} \varepsilon_{xz}; \quad K_6 = 2B_{44} \varepsilon_{yz}; \\ \tilde{K} \dots = \tilde{K} \dots (\tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \dots, \tilde{\varepsilon}_x^3, \tilde{\varepsilon}_x \cdot \tilde{\varepsilon}_{xy}^2, \dots); \\ K_1^* = 2(B_{11}^* \varepsilon_x^* + B_{12}^* \varepsilon_y^*); \dots; \quad K_6^* = 2B_{44}^* \varepsilon_{yz}^*.$$

Із рівняння /4/ при розгляді різних кінематичних гіпотез в рамках геометрично-лінійної теорії одержуються як відомі, так і нові диференціальні рівняння деформованого стану оболонки.

Реалізован варіант, коли для податливих на поперечний зсув зовнішніх шарів прийнята поперечна модель зсуву типу С.П.Тимошенка

$$h \leq z \leq h + \delta_1: u = \sum_{i=1}^4 u_i(x; y) \lambda_i(z); \quad v = \sum_{i=1}^4 v_i(x; y) \lambda_i(z); \\ -h - \delta_2 \leq z \leq -h: u^* = \sum_{i=1}^4 u_i(x; y) \lambda_i^*(z); \quad v^* = \sum_{i=1}^4 v_i(x; y) \lambda_i^*(z); \quad /5/ \\ \lambda_1(z) = \lambda_2^*(z) = 1; \quad \lambda_3(z) = z - h - \frac{\delta_1}{2}; \quad \lambda_4^*(z) = z + h + \frac{\delta_2}{2}; \quad \lambda_i(z) = \lambda_i^*(z) = 0; \\ w = \sum_{j=1}^3 w_j(x; y) p_j; \quad w^* = \sum_{j=1}^3 w_j(x; y) p_j^*; \\ p_1 = p_2^* = 1; \quad p_j = p_j^* = 0.$$

Для поздовжніх переміщень середнього шару $-h \leq z < h$ прийнята гіпотеза розподілу по товщині, яка аналогічна закону С.О.Амбарцум'яна, а для прогинів враховано поперечне стиснення по параболічному закону.

Використані далі умови сполучення при відсутності взаємних

зсунень поверхнень шарів $z = \pm h$ дали змогу виразити через функції u_i, v_i, w_j переміщення заповнювача зображені у вигляді

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^4 u_i(x; y) a_i(z) + \sum_{j=1}^3 w_{j,x}(x; y) h_2(z) C_j(z);$$

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^4 v_i(x; y) b_i(z) + \sum_{j=1}^3 w_{j,y}(x; y) h_6(z) C_j(z); \quad /6/$$

$$\tilde{w} = \sum_{j=1}^3 w_j(x; y) C_j(z); \quad C_1(z) = \frac{z}{2h} \left(1 + \frac{z}{h}\right);$$

$$C_2(z) = -\frac{z}{2h} \left(1 - \frac{z}{h}\right); \quad C_3(z) = 1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2.$$

Тут $a_i(z), b_i(z), h_2(z), h_6(z)$ - вирази, які визначають зміну тангенціальних переміщень по товщині середнього шару; w_1, w_2 і w_3 - прогини серединних поверхнень зовнішніх шарів і середнього шару.

Враховуючи /5/, /6/ із /4/ одержана система нелінійних диференціальних рівнянь в переміщеннях для оболонок з податливими на поперечний зсув /малою зсувною жорсткістю/ зовнішніми шарами. Ця система містить сім шуканих функцій переміщень $u_i, v_i, w_j / i=1, 2; j=1, 2, 3/$ і чотири функції $/ i=3, 4/$, визначаючі кути поворотів нормалей до серединних поверхнень зовнішніх шарів. Її структура має вигляд

$$\int_h^{h+\delta_1} [\lambda_s(K_{1,x}, K_{1,y}), \lambda_{s,z} K_5] dz + \int_{-h}^h [a_s(\tilde{K}_{1,x}, \tilde{K}_{1,y}), a_{s,z} \tilde{K}_5] dz +$$

$$+ \int_{-h-\delta_2}^{-h} [\lambda_s^*(K_{1,x}^*, K_{1,y}^*), \lambda_{s,z}^* K_5^*] dz = 0; \quad /7/$$

$$\int_h^{h+\delta_1} [\lambda_s(K_{2,y}, K_{2,x}), \lambda_{s,z} K_6] dz + \int_{-h}^h [b_s(\tilde{K}_{2,y}, \tilde{K}_{2,x}), b_{s,z} \tilde{K}_6] dz +$$

$$+ \int_{-h-\delta_2}^{-h} [\lambda_s^*(K_{2,y}^*, K_{2,x}^*), \lambda_{s,z}^* K_6^*] dz = 0; \quad /8/$$

$$\int_h^{h+\delta_1} (K_1, K_2, K_{5,x}, K_{6,y}) \rho_z dz + \int_{-h}^h [\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_{1,xx}, \tilde{K}_{2,yy}, \tilde{K}_3, \tilde{K}_{4,xy}, \tilde{K}_{5,x}, \tilde{K}_{6,y}, C_z(z), C_{\tau,z}(z), h_2(z), h_6(z)] dz +$$

$$+ \int_{-h-\delta_2}^{-h} (K_1^*, K_2^*, K_{5,x}^*, K_{6,y}^*) \rho_z^* dz = q_1(x;y) \rho_z + q_2(x;y) \rho_z^*, \quad /9/$$

/ S=1, ..., 4; z=1, 2, 3/.

При розгляді задач динаміки права частина рівнянь /9/ доповнюється членами, які враховують поперечну інерцію оболонки і демпфування.

Із контурного інтеграла варіаційного рівняння /4/ отримані граничні умови, на основі яких моделюються всілякі симетричні і несиметричні кріплення шарів на контурі.

Виконані спрощуючі перетворення, які дозволили варіаційним шляхом перейти до диференціальних рівнянь руху оболонки з жорсткими на поперечний зсув зовнішніми шарами. В цьому випадку рівняння записані відносно переміщень u_i, v_i, w_j / $i=1, 2; j=1, 2, 3$ /.

Одержані результати мають узагальнений характер і дозволяють суттєві спрощення на випадки лінійного закону поперечного стиснення і нехтування стисненням взагалі, тобто, приймаючи, що $w_3 = 1/2(w_1 + w_2)$ або $w_1 = w_2 = w_3 = w$. Так, враховуючи додатково $\tilde{\xi}_z \approx 0, \tilde{\xi}_z \approx -\tilde{\nu}_0 (\tilde{\xi}_x + \tilde{\xi}_y)$ із /7/-/9/ у випадку нехтування стисненням одержані нелінійні диференціальні рівняння відносно п'яти функцій переміщень і чотирьох функцій, визначаючих кути поворотів нормалей.

В межах геометрично-лінійної теорії з залученням визначальних співвідношень /2/ побудована модель нелінійно-пружної основи, в якій прийнято, що горизонтальні переміщення відсутні, а вертикальні характеризуються тільки однією функцією $\psi(z)$, тобто

$$w^0(x; y; z; t) = w_2(x; y; t) \psi(z);$$

$$\varepsilon_z^0 = w_2 \psi_{,z}; \quad \varepsilon_{zx}^0 = w_{2,x} \psi; \quad \varepsilon_{zy}^0 = w_{2,y} \psi;$$

$$\sigma_z^0 = 3K_0 \chi(\varepsilon_0) \varepsilon_0 + 2G_0 \gamma(\psi_0^2) (\varepsilon_z^0 - \varepsilon_0);$$

$$\tau_{zx}^{\circ} = G_0 \gamma (\Psi_0^2) \varepsilon_{zx}^{\circ} ; \tau_{zy}^{\circ} = G_0 \gamma (\Psi_0^2) \varepsilon_{zy}^{\circ} ;$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_z^{\circ} / 3 ; \Psi_0^2 = 2/3 [4/3 (\varepsilon_z^{\circ})^2 + (\varepsilon_{zx}^{\circ})^2 + (\varepsilon_{zy}^{\circ})^2] .$$

Із умови рівноваги елемента основи товщиною H визначена його реакція, яка узагальнює результати В.З.Власова, М.М.Леонт'єва на випадок нелінійної пружності матеріалу. Її можна навести у вигляді

$$q_{\nu_0}(x; y; t) = m_0^* \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - q_{\nu_{00}} \nabla w_2 + q_{\nu_{01}} w_2 + q_{\nu_{\text{нел}}} (w_2 \nabla w_2, w_2^3, \dots, w_2^5) .$$

В другій главі одержані рівняння динаміки вільно опертих оболонок, які записані відносно амплітуд прогинів серединних поверхонь шарів $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$.

Деформації в шарах оболонок визначені після прийняття апроксимуючих переміщення і кути поворотів функцій у тригонометричному вигляді. Виконав лінеаризацію у виразах деформацій середнього шару відносно амплітуд тангенціальних переміщень $f_i(t)$, $\bar{f}_i(t)$ і тригонометричних функцій, записані вирази для $K_{1, \dots, 6}(\xi_j, \dots, f_i, \bar{f}_i)$ рівнянь /7/, /8/, що дало змогу зв'язати

$$f_i(t) = \Delta^{-1} \left(\sum_{k=1}^3 \Delta_i^k \xi_k(t) + \sum_{k, j, l} \Delta_i^{kjl} \xi_k(t) \xi_j(t) \xi_l(t) \right) ;$$

$$\bar{f}_i(t) = \Delta^{-1} \left(\sum_{k=1}^3 \Delta_{i+4}^k \xi_k(t) + \sum_{k, j, l} \Delta_{i+4}^{kjl} \xi_k(t) \xi_j(t) \xi_l(t) \right) ;$$

/ i = 1, \dots, 4/.

Тоді із /9/ виходить система нелінійних диференціальних рівнянь відносно амплітуд поперечних коливань

$$(m_1^* \xi_{1,tt} + C_1^* \xi_{1,t}) p_z + (m_2^* \xi_{2,tt} + C_2^* \xi_{2,t}) p_z^* +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{3} (m_3^* \xi_{3,tt} + c_3^* \xi_{3,t}) P_z^{**} + \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^{(z)} \xi_k + \sum_{k,j,\ell} \Lambda_{kjl}^{(z)} \xi_k \xi_j \xi_\ell + \quad /I0/ \\
 & + \sum_{k,j,\ell,m,n} \Lambda_{kj\ell mn}^{(z)} \xi_k \xi_j \xi_\ell \xi_m \xi_n = q_1^*(t) P_z + q_2^*(t) P_z^* , \\
 & \quad \quad \quad /z=1,2,3/.
 \end{aligned}$$

Для системи /I0/, яка згідно /3/ містить параметри $\tilde{\gamma}_2, \tilde{\chi}_2$, характеризуючі малу фізичну нелінійність пружного матеріалу заповнювача застосовано метод розкладу в ряди по малому параметру $\lambda = \tilde{\gamma}_2 \tilde{K} \cdot (\tilde{G}^3 + 3\tilde{G}^2 \tilde{K})^{-1}$ і сформульовані рекурентні системи неоднорідних лінійних рівнянь.

Нехтуючи врахуванням поперечного стиску і впроваджуючи такі позначення

$$M = m_1^* + m_2^* + \frac{2}{3} m_3^* ; C = c_1^* + c_2^* + \frac{2}{3} c_3^* ;$$

$$F_1 = \sum_{z=1}^3 (\Lambda_1^{(z)} + \Lambda_2^{(z)} + \Lambda_3^{(z)}) ; F_2 = \sum_{z=1}^3 \sum_{k,j,\ell} \Lambda_{kjl}^{(z)} ;$$

$$F_3 = \sum_{z=1}^3 \sum_{k,j,\ell,m,n} \Lambda_{kj\ell mn}^{(z)} ,$$

із /I0/ одержано рівняння поперечних коливань

$$M \xi_{,tt} + C \xi_{,t} + F_1 \xi(t) + F_2 \xi^3(t) + F_3 \xi^5(t) = q_1^*(t) . \quad /II/$$

При взаємодії оболонки з пружньою основою його реакція виражається виразом

$$q_0^*(t) = m_0^* \xi_{,tt} + F_{10} \xi(t) + F_{20} \xi^3(t) + F_{30} \xi^5(t) .$$

В третій главі розглянуті застосування розробленої некласичної теорії і методів її реалізації. Досліджені динамічні процеси в тришарових оболонках і пластинах при поперечному навантаженні. Рекурентні системи рівнянь наведені в такому вигляді

$$m_1^* \xi_{10,tt} + c_1^* \xi_{10,t} + \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^{(1)} \xi_{k0} = q_1^*(t) ,$$

$$m_2^* \xi_{20,t} + C_2^* \xi_{20,t} + \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^{(2)} \xi_{k0} = q_2^*(t), \quad /I2/$$

$$\frac{2}{3} m_3^* \xi_{30,t} + \frac{2}{3} C_3^* \xi_{30,t} + \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^{(3)} \xi_{k0} = 0;$$

$$m_1^* \xi_{1\mu,t} + C_1^* \xi_{1\mu,t} + \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^{(1)} \xi_{k\mu} = \Pi_{1\mu}(t),$$

$$m_2^* \xi_{2\mu,t} + C_2^* \xi_{2\mu,t} + \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^{(2)} \xi_{k\mu} = \Pi_{2\mu}(t), \quad /I3/$$

$$\frac{2}{3} m_3^* \xi_{3\mu,t} + \frac{2}{3} C_3^* \xi_{3\mu,t} + \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^{(3)} \xi_{k\mu} = \Pi_{3\mu}(t),$$

де $\mu = 1, 2, \dots$ - номер наближення в розкладі по малому параметру λ .

Проаналізовані умови і можливі випадки коливних процесів в тришарових оболонках при дії зовнішніх збурних факторів $q_1(t)$, $q_2(t)$. Для цього робилось припущення відносно виконання умов додатності головних діагональних мінорів матриці Рауса-Гурвіца, побудованої для характеристичного рівняння системи /I2/

$$\omega^6 + a_1 \omega^5 + a_2 \omega^4 + a_3 \omega^3 + a_4 \omega^2 + a_5 \omega + a_6 = 0, \quad /I4/$$

де a_1, \dots, a_6 - коефіцієнти, які одержані при розгортанні визначника.

Розглянуті стійкісні коливальні рухи оболонки, які можливі при трьох випадках коренів рівняння /I4/

$$1) \omega_{1,2} = -\alpha_1 \pm \beta_1 i; \quad \omega_{3,4} = -\alpha_2 \pm \beta_2 i; \quad \omega_{5,6} = -\alpha_3 \pm \beta_3 i;$$

$$2) \omega_{1,2} = -\alpha_1 \pm \beta_1 i; \quad \omega_{3,4} = -\alpha_2 \pm \beta_2 i; \quad \omega_{5,6} < 0;$$

$$3) \omega_{1,2} = -\alpha_1 \pm \beta_1 i; \quad \omega_{3,\dots,6} < 0.$$

Рішення задачі зображено в вигляді суми розв'язків систем /I2/ і /I3/, де частинні розв'язки визначено методом варіації довільних сталих, а загальні - при початкових амплітудах зсунень $\xi_{\tau_0}(0)$ і швидкостей $\dot{\xi}_{\tau_0,t}(0)$.

Аналогічний вигляд має рішення задачі при рівномірному стис-

ленні заповнювача. Тут характеристичне рівняння має четвертий порядок і можливі два випадка коренів.

Розглянута задача маловидкісного поперечного удару кулею по поверхні тришарової пластинки. Зсунення спадного тіла, які відраховуються від точки зіткнення з пластинкою в початковий момент часу, визначаються із диференціального рівняння

$$m\ddot{s} = -P(t).$$

Вважається, що повне зсунення складається із місцевого стиску $\alpha(P)$ і динамічного прогину $w(x_i, y_i, t)$. Тоді рішення може бути зображено в вигляді функціонального рівняння типу Тимошенка, в якому місцевий стиск визначається по теорії Герца $\alpha(P) = kP^{2/3}$, а прогини пластинки одержані методом малого параметру із рівняння /II/ при навантаженні $q_{mn} = 4P(t)a^{-1}b^{-1}\sin\alpha_m x_i \sin\beta_n y_i$

$$\begin{aligned} v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 dt_1 = \alpha(P) + e^{-\alpha t} [\beta^{-1}(v_0^* + \alpha w_0^*) \sin \beta t + \\ + w_0^* \cos \beta t] + \frac{1}{M\beta} \int_0^t (q_{mn} + \sum_{j=1}^M Q_j) e^{-\alpha(t-t_1)} \sin(\beta(t-t_1)) dt_1, \quad /15/ \end{aligned}$$

$$\beta = \left[\frac{F_1}{M} - \left(\frac{c}{2M} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad \alpha = \frac{c}{2M};$$

$$Q_1 = -\frac{1}{\lambda} \xi_0^3 (F_2 + F_3 \xi_0^2); \quad Q_2 = -\frac{1}{\lambda} \xi_0^2 \xi_1 (3F_2 + 5F_3 \xi_0^2);$$

$$Q_3 = -\frac{1}{\lambda} [3F_2 \xi_0 (\xi_1^2 + \xi_0 \xi_2) + 5F_3 \xi_0^3 (\xi_0 \xi_2 + 2\xi_1^2)],$$

де m, v_0 - маса і швидкість кулі в момент часу $t=0$; w_0^*, v_0^* - початкові умови в точці удара, яка має координати x_i, y_i ; a, b - розміри пластинки.

В випадку, коли динамічна контактна сила перевершує деяке граничне значення, яке визначається теорією Герца, то нехтування пластичними деформаціями вносить суттєві спотворення в динаміку розглядаємого процесу, веде до похибок в обчисленні $P(t), s, w$. Тому тут для розв'язку задачі використана пружно-пластична модель локального деформування в зоні удару, яка запропонована в роботі В.М.Александрова, И.Г.Кадомцева, Л.Б.Царюка і добре погод-

жується з теорією і експериментом:

$$\mathcal{L}(P) = \left\{ \begin{array}{l} k P^{2/3}, \quad \sup_{\xi \leq t} P(\xi) < P_1 \\ k_{\phi} P^{2/3} + \mathcal{L}_P[\sup_{\xi \leq t} P(\xi)], \quad \sup_{\xi \leq t} P(\xi) > P_1 \\ (1 + \beta^0) c^0 P^{1/2} + d(1 - \beta^0) P, \quad \sup_{\xi \leq t} P(\xi) = P_1 \end{array} \right\} \sup_{\xi \leq t} P(\xi) > P_1$$

де k, P_1 - коефіцієнт і граничне значення сили по теорії Герца; \mathcal{L}_P - пластична компонента місцевого стиску. Інтервал часу співудару поділено на малі елементи $\Delta \tau$, після чого рівняння /15/ інтегрується чисельно і крок за кроком обчислюються значення зсувів, прогинів і контактних сил по ітераційній схемі М.А.Кільчевського, в яку внесені доповнення відповідно складності задачі.

На рис. I показано випадок центрального удару сталевю кулею радіуса $R = 0,01$ м з швидкістю $v_0 = 0,3$ м/с, $c = 0$ і початковими умовами $v_0^* = 10^{-2}$ м/с, $\omega_0^* = 0$. Тут суцільні лінії відповідають рішенням лінійної / $\lambda = 0$, криві P_0, ω_0, S_0 / і нелінійно-пружної /з урахуванням третього наближення/ задачі, а штриховими лініями наведені результати розрахунку з урахуванням другого наближення.

Розглядався випадок нелінійності "м'якого" типу, тому прогини виявились більшими, ніж для відповідної лінійної задачі. Урахування вищих наближень в розкладі по параметру привело до збільшення прогинів, зменшення значень контактних сил з розходженнями між другим і третім наближеннями в області максимальних значень не перебільшувачими 1,5%.

Було встановлено, що при малих v_0 початкові умови можуть здійснити суттєвий вплив на прояв пластинкою II нелінійно-пружних властивостей. При $v_0^* < 0, \omega_0^* \leq 0$ вплив нелінійної пружності не виявляється, так як система стає більш "жорсткою" по відношенню до поперечного навантаження, і прогини не виходять за межі нескінченно малих значень. Якщо $\omega_0^* > 0$ і $v_0^* \geq 0$, то вже на початковому етапі одержані розрахункові прогини виявляються значними, і вплив нелінійної пружності помітний. При

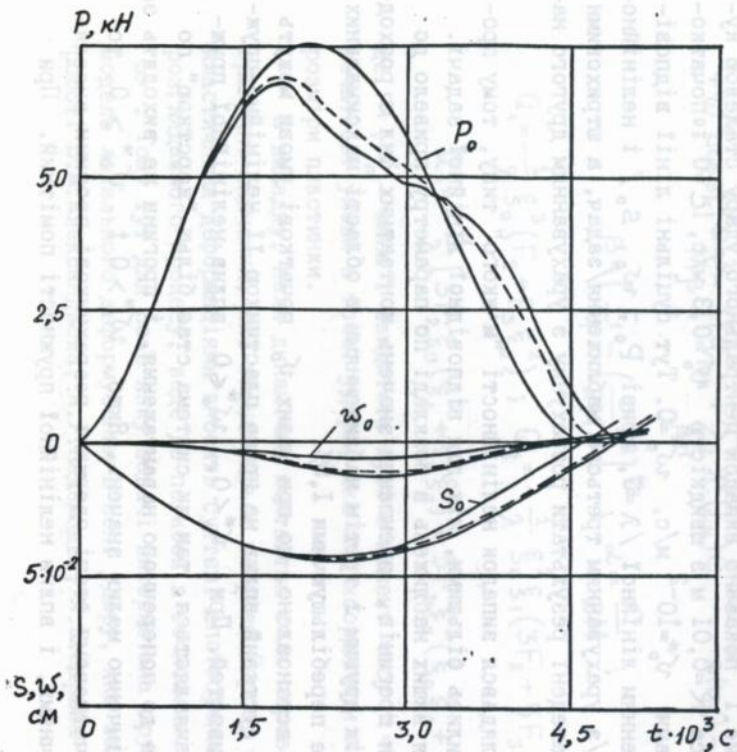


Рис. 1

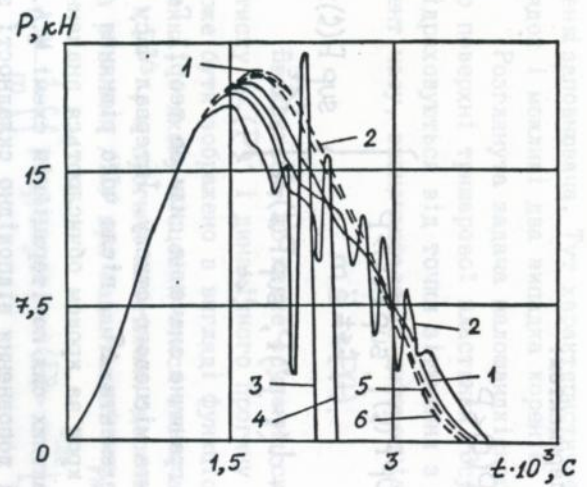


Рис. 2

$\omega_0^* = 1/60(\delta_1 + 2\eta + \delta_2)$ врахування нелінійно-пружних властивостей привело до таких результатів, коли розгляд задачі з прийнятими параметрами в рамках впроваджених припущень стає неможливим.

На рис.2 показано характер перебігу процесу удару при $v_0 = 0,7$ м/с, $\omega_0^* = 0$, $v_0^* = 0$ і $v_0^* = 0,01$ м/с. Результати засвідчують про помітний вплив початкових умов на поведінку нелінійно-пружної пластинки. Штриховими лініями наведені результати для лінійної задачі, а суцільними - для нелінійної з урахуванням третього наближення. Крива 1 відповідає розрахунку із параметрами $C = 2,5$ МПа·с·м⁻¹, $v_0^* = 0$; крива 2 - $C = 2,5$ МПа·с·м⁻¹, $v_0^* = 0,01$ м/с; криві 3,4 - $C = 0$, $v_0^* = 0,01$ м/с і $v_0^* = 0$ відповідно; крива 5 - $C = 0$, $v_0^* = 0$, крива 6 - $C = 0$, $v_0^* = 0,01$ м/с. Наведений графічний матеріал засвідчує, що при врахуванні демпфування система виявляється менш чутливою до розглянутих початкових умов, і тому вплив нелінійної пружності на прогини і контактні сили зменшується.

В четвeртій главі досліджена стійкість оболонок при дії періодичних і лінійно зростаючих динамічних сил.

Досліджена поведінка оболонок в головній області динамічної нестійкості, коли по контурам зовнішніх шарів діють нормальні навантаження

$$N_{x1} = N_{01} + N_{t1} \cos \theta t ; N_{y1} = \bar{N}_{01} + \bar{N}_{t1} \cos \theta t ; N_{x2} = \dots ; N_{y2} = \dots$$

Рішення /10/ шукається в стандартному вигляді. Після лінеаризації тригонометричних функцій амплітудно-частотні залежності визначаються із системи шести нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \left[P_z m_1^* C_{1i} + P_z^* m_2^* C_{2i} + \frac{2}{3} P_z^{**} m_3^* C_{3i} \right] \mp \\ & \mp \left[P_z C_1^* C_{13-i} + P_z^* C_2^* C_{23-i} + \frac{2}{3} P_z^{**} C_3^* C_{33-i} \right] + \\ & + m_1^* (\Omega_{1t}^{(z)})^2 (1 \pm \mu_{1t}^{(z)}) C_{1i} + m_2^* (\Omega_{2t}^{(z)})^2 (1 \pm \mu_{2t}^{(z)}) C_{2i} + \\ & + \Lambda_3^{(z)} C_{3i} + \sum_{k,j,l} \Lambda_{kjl}^{(z)} C_{kjl}^{(i)} + \sum_{k,j,l,m} \Lambda_{kjlm}^{(z)} C_{kjlm}^{(i)} = 0, \end{aligned} \quad /16/$$

$$/ i = 1, 2; z = 1, 2, 3/.$$

В /16/ верхні позначення відносяться до рівнянь $i=1$, нижні - до рівнянь $i=2$, а позначені коефіцієнти мають вигляд

$$J_{1t}^{(z)} = \frac{0,5 N_{\pm 1} (\alpha_m^2 + \eta \beta_n^2)}{\Lambda_1^{(z)} - N_{01} (\alpha_m^2 + \eta \beta_n^2)} P_z ; \quad /17/$$

$$(\Omega_{1t}^{(z)})^2 = \frac{1}{m_1^*} [\Lambda_1^{(z)} - N_{01} (\alpha_m^2 + \eta \beta_n^2) P_z] ,$$

$J_{2t}^{(z)}$, $(\Omega_{2t}^{(z)})^2$ - одержуються з /17/ при замінах $1 \rightarrow 2$, $P_z \rightarrow P_z^*$.

Рішення цієї задачі одержано і для лінійної моделі стисливості середнього шару. В цьому випадку замість /16/ одержана система чотирьох рівнянь $i=1, 2/$, в якій вирази /17/ зберігають свій вигляд, але в них необхідно замінити $\Lambda_k^{(z)}$ на коефіцієнти відповідні рівнянням з лінійною стисливістю.

Розглянута стійкість оболонки при дії по контурам зовнішніх шарів зсувних навантажень $N_1 = N_{01} + N_{\pm 1} \cos \theta t$, $N_2 = N_{02} + N_{\pm 2} \cos \theta t$. Система шести рівнянь вигляду /16/, яка установлює амплітудно-частотні залежності для цієї задачі, одержана після інтегрування /10/ методом Бубнова-Гальоркіна, підстановки в праві частини рівнянь виразів

$$q_{V_1}(t) = 2 (N_{01} + N_{\pm 1} \cos \theta t) \alpha_m \beta_n \xi_1(t) b_{ik, mn} ,$$

$$q_{V_2}(t) = 2 (N_{02} + N_{\pm 2} \cos \theta t) \alpha_m \beta_n \xi_2(t) b_{ik, mn}$$

і розкладу амплітуд $\xi_k(t)$ / $k=1, 2, 3/$ по ортогональним тригонометричним функціям. Тут замість коефіцієнтів /17/ враховується

$$J_{1t}^{(z)} = \frac{\alpha_m \beta_n N_{\pm 1}}{\Lambda_1^{(z)} - 2 N_{01} \alpha_m \beta_n \frac{b_{ik, mn}}{a_{ik, mn}}} \cdot \frac{b_{ik, mn}}{a_{ik, mn}} P_z ; \quad /18/$$

$$(\Omega_{1t}^{(z)})^2 = \frac{1}{m_1^*} [\Lambda_1^{(z)} - 2 N_{01} \alpha_m \beta_n \frac{b_{ik, mn}}{a_{ik, mn}} P_z] ,$$

а $J_{2t}^{(z)}$, $(\Omega_{2t}^{(z)})^2$ одержуються при заміні індексів $1 \rightarrow 2$, $P_z \rightarrow P_z^*$; $a_{ik, mn}$, $b_{ik, mn}$ - визначаються інтегралами від тригонометричних функцій координат. Розглянута також задача, коли стисливість

середнього шару здійснюється по лінійному закону.

На основі рівняння/II/ вивчена стійкість оболонок при стиску і при зсуві контура зовнішніх шарів періодичними навантаженнями. При дії на оболонку стискуючих сил, рівняння типу Дuffінга має вигляд

$$\xi_{,ttt} + \frac{C}{M} \xi_{,t} + \Omega_t^2 (1 - 2\mu_t \cos \theta t) \xi + \frac{F_2}{M} \xi^3 + \frac{F_3}{M} \xi^5 = 0 ;$$

$$\mu_t = \frac{0,5 N_t (\alpha_m^2 + \eta \beta_n^2)}{F_1 - (\alpha_m^2 + \eta \beta_n^2) N_0} ; \quad \Omega_t^2 = \frac{1}{M} [F_1 - (\alpha_m^2 + \eta \beta_n^2) N_0],$$

де μ_t - коефіцієнт збудження; Ω_t - частота власних коливань. Апроксимуюча функція прийнята в вигляді

$$\xi(t) = C_1 \sin \frac{\theta t}{2} + C_2 \cos \frac{\theta t}{2},$$

після чого приходимо до рівнянь, дійсні рішення яких установлюють залежність амплітуди від відношень частот

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{F_3}{M \Omega_t^2} A^4 + \frac{3}{4} \cdot \frac{F_2}{M \Omega_t^2} A^2 + 1 - \left(\frac{\theta}{2\Omega_t}\right)^2 \pm \sqrt{\mu_t^2 - k \left(\frac{\theta}{2\Omega_t}\right)^2} = 0, \quad /19/$$

де $A^2 = C_1^2 + C_2^2$ - квадрат амплітуди поперечних коливань оболонки.

Розв'язок рівняння /19/ зображено виразом

$$A = \left[-\frac{3}{5} \cdot \frac{F_2}{F_3} \pm \left[\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{F_2}{F_3} \right)^2 - \frac{8}{5} \cdot \frac{M \Omega_t^2}{F_3} \left\{ 1 - \left(\frac{\theta}{2\Omega_t} \right)^2 \pm \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \pm \sqrt{\mu_t^2 - k \left(\frac{\theta}{2\Omega_t} \right)^2} \right\} \right]^{1/2} \right]^{1/2}. \quad /20/$$

На рис.3 наведені амплітудно-частотні залежності, одержані в результаті розрахунку по формулі /20/ для випадку усталених коливань панелі без врахування демпфування при дії по контуру стискуючих періодичних навантажень. Розрахунок проводився для параметрів навантаження $N_0 = 10^4$ кН/м, $\mu_t = 0,4$, розмірах $a = 0,6$ м, $b = 0,4$ м, $\delta_1/\delta_2 = 3$, $\delta_2 = h = 10^{-3}$ м і для заповнювача з характеристиками $\tilde{\gamma}_2 = -0,387 \cdot 10^6$, $\tilde{\chi}_2 = 0$. Криві I відповідають

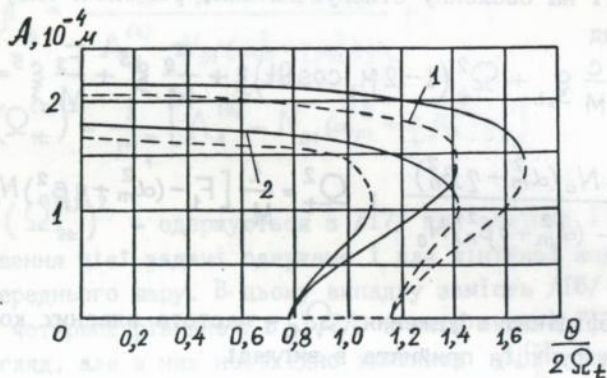


Рис. 3

$\xi_0 \cdot 10^6, \text{ м}$	$N_0, \text{ Н}$	$\lambda N_1, \text{ Н}$	$10^2 \frac{\lambda N_1}{N_0}, \%$	$\lambda^2 N_2, \text{ Н}$	$10^2 \frac{\lambda^2 N_2}{N_0 + \lambda N_1}, \%$	$N_{кр}, \text{ Н}$
3		-171	-0,48	-12	-0,03	35355
6	35538	-683	-1,92	-99	-0,28	34756
9	34483	-1537	-4,32	-334	-0,98	33667
12		-2733	-7,69	-792	-2,41	32013
15		-4270	-12,01	-1547	-4,94	29721

пластинці $R_1=R_2=\infty$, а криві 2 - циліндричній панелі $R_2=1$ м. Вигляд графічних залежностей якісно погоджується з відомими результатами, якщо врахувати, що розглянутий випадок нелінійної пружності "м'якого" типу. Явище перекидання, яке при цьому спостерігається, виражається в зміни стійких віток рішень /суцільні лінії/ на нестійкі вітки /штрихові лінії/ і навпаки - при розвороті резонансних кривих в напрямку нелінійності "м'якого" типу. Одержані результати погоджуються з висновками Г.Шмідта, коли для урахованого у відновлюючій силі доданка п'ятого степеня вірна умова $F_2 F_3 < 0$. Якщо $F_2 F_3 > 0$, то спостерігається уточнення розв'язку рівняння Дуффінга.

На прикладі задачі статичної стійкості подовженої пластинки симетричної побудови проведено порівняння результатів розрахунків з відомими літературними джерелами, а також вивчена збіжність метода малого параметру. Розглянута пластинка з розмірами $\delta = 1 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 8 \cdot 10^{-3}$ м і довжиною $a = 0,4$ м. Розрахунки проводились при механічних характеристиках ізотропних зовнішніх шарів $\nu = 0,27$, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа і заповнювача $\tilde{G} = 8,7 \cdot 10^4$ МПа, $\tilde{K} = 1,82 \cdot 10^5$ МПа, $\tilde{\gamma}_2 = -8 \cdot 10^4$. Збіжність методу малого параметру досліджено на числовому аналізі результатів розрахунків критичних сил, які наведені в таблиці при різних значеннях амплітуди ξ_0 . Здобута величина критичної сили N_0 лінійної задачі підвищує на 3,06% результат, обчислений на основі розв'язку О.П.Прусакова, який наведено в знаменнику. При амплітуді прогину $\xi_0 = 3+6 \cdot 10^{-6}$ м вплив нелінійно-пружних властивостей незначний. Але вже при амплітудах ξ_0 рівних 0,083% товщини, врахування нелінійної пружності зменшує одержане значення $N_{кр}$ на 16,37%.

Розв'язана задача динамічної стійкості тришарової оболонки при дії лінійно наростаючих навантажень

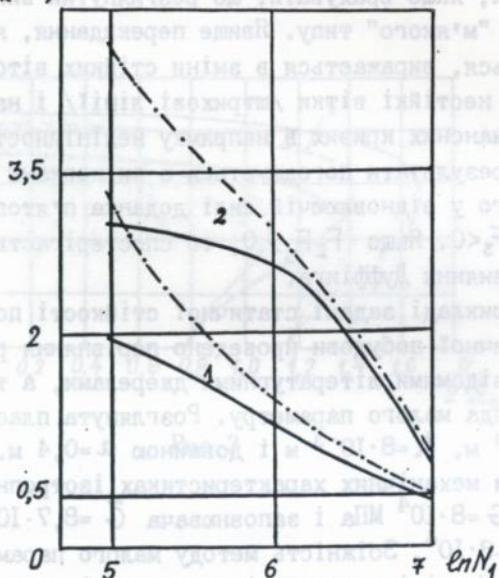
$$N_x = N_1 t ; N_y = \eta N_1 t ; t = \tau t_k ,$$

де N_1 - темп навантаження, t_k - критичний час, $0 \leq \tau \leq 1$. Для апроксимуючої функції використана функція

$$\xi(\tau) = L e^{\alpha \tau} \left(\frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \tau - \tau^2 \right), \quad /21/$$

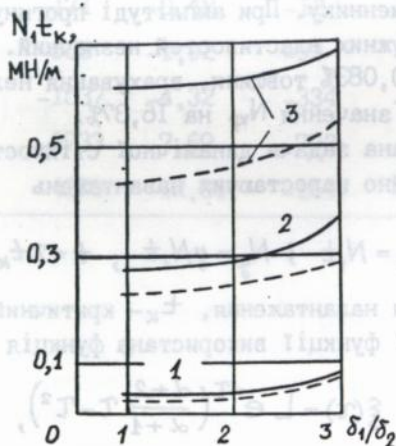
яка задовольняє умовам $\xi(0) = \xi, \tau(1) = 0$.

$t_k \cdot 10^4, ^\circ\text{C}$



середній шар: 1 - вініпласт, 2 - ДІБ-Т

Рис.4



1 - $N_1 = 10^5 \text{ кН}/(\text{м} \cdot \text{с})$; 2 - $N_1 = 10^6 \text{ кН}/(\text{м} \cdot \text{с})$;

3 - $N_1 = 10^7 \text{ кН}/(\text{м} \cdot \text{с})$

Рис.5

Застосовуючи теоретико-експериментальний метод О.В.Саценка із /II/ з урахуванням /2I/ одержано енергетичний функціонал

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{1}{2} M t_{\kappa}^{-2} \int_0^1 \xi_{\xi, \tau}^2(\tau) d\tau + c t_{\kappa}^{-1} \int_0^1 d\tau \int \xi_{\xi, \tau}^2 d\tau + \frac{1}{2} F_1 \int_0^1 \xi^2(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{4} F_2 \int_0^1 \xi^4(\tau) d\tau + \frac{1}{6} F_3 \int_0^1 \xi^6(\tau) d\tau - \\ & - N_1 t_{\kappa} (\alpha_m^2 + \eta \beta_n^2) \int_0^1 d\tau \int \tau \xi(\tau) \xi_{\xi, \tau}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Із умов мінімізації $\frac{\partial \Theta}{\partial L^2}$ і $\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha_m^2}$ виходить система двох нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення критичного часу і хвильового числа α_m /при $\beta_n = const$ / в залежності від параметрів N_1, η, L . Результати розрахунків для цієї задачі зображені на рис.4,5. Суцільні лінії на графіках відповідають нелінійно-пружним оболонкам, штрихові - пластинкам, а штрих-пунктиром зображені криві, які відповідають лінійно-пружним оболонкам. Шляхом лінеаризації зв'язку між функціями $f_i(t), \bar{f}_i(t)$ і $\xi(t)$ одержані наближені аналітичний вираз для критичної сили $N_1 t_{\kappa}$ і рівняння для визначення хвильового числа α_m .

Розв'язана задача коливань тришарової оболонки на нелінійно-пружній по Каудереру основі при дії рухомого навантаження. Виконані дослідження процесу малих коливань, виникаючих при виведенні системи із стійкого квазістатичного режиму дією "амплітудного збурення". Задача зведена до розв'язання рівняння

$$\xi_{\xi, \tau\tau} + \omega_0^2 \xi + \frac{F_{22}}{M_*} \xi^3 + \frac{F_{33}}{M_*} \xi^5 = 0 ;$$

$$\omega_0^2 = M_*^{-1} (F_1 + F_{10} - \alpha_m^2 V^2 m) ;$$

$$F_{22} = F_2 + F_{20} ; F_{33} = F_3 + F_{30} ,$$

де ω_0 - частота коливань лінійної системи; V, m - швидкість і маса рухомого навантаження.

Після впровадження безрозмірного параметру часу $\tau = \omega t$ і одночасного розкладу амплітуди і частоти в ряди по параметру

$$\xi(\tau) = \xi_0(\tau) + \sum_{j=1}^M \lambda^j \xi_j(\tau); \quad \omega = \omega_0 + \sum_{j=1}^M \lambda^j \omega_j,$$

одержана система рекурентних диференціальних рівнянь, звідки, використовуючи метод О.М.Крилова для усунення вікових членів, одержані значення $\xi(t)$ і ω з врахуванням других наближень. На підставі одержаних розв'язків розглянуто ряд окремих випадків.

Питання, розглянуті в п'ятій главі дисертації відносяться до статистичної динаміки конструкцій. Використовуючи метод диференціальних рівнянь до рівняння /II/, одержано нелінійне диференціальне рівняння відносно кореляційної функції амплітуд $K(\tau) = \langle \xi(t_1) \cdot \xi(t_2) \rangle$ стаціонарного процесу, близького до нормального, центрального

$$K_{,tttt}(\tau) + F_{1k} K_{,tt}(\tau) + F_{2k} K(\tau) + F_{3k} K^3(\tau) + F_{4k} K^5(\tau) = q_k(\tau), \quad /22/$$

$$\text{де } F_{1k} = 2(\omega_\varepsilon^2 - \varepsilon^2); \quad F_{2k} = (\omega_0^2 + \tilde{\omega}^2)^2; \quad F_{3k} = \frac{6}{M^2} [F_2 + 10F_3 K(0)]^2;$$

$$F_{4k} = 120 \left(\frac{F_3}{M}\right)^2; \quad q_k(\tau) = \frac{K_q(\tau)}{M^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{F_1}{M}; \quad \varepsilon = \frac{C}{2M};$$

$$\omega_\varepsilon^2 = \omega_0^2 + \tilde{\omega}^2 - \varepsilon^2; \quad \tilde{\omega}^2 = 3 \frac{K(0)}{M} [F_2 + 5F_3 K(0)];$$

τ - різниця між двома моментами часу, $\tau = t_2 - t_1$.

Після зображення кореляційної функції в вигляді розкладу $K(\tau) = K_0(\tau) + \sum_{j=1}^3 \lambda^j K_j(\tau)$ із /22/ одержані рекурентні диференціальні рівняння, лінійні відносно $K_0(\tau)$, $K_1(\tau)$, ...

$$K_{0,tttt}(\tau) + F_{1k} K_{0,tt}(\tau) + F_{2k} K_0(\tau) = q_k(\tau); \quad /23/$$

$$K_{j,tttt}(\tau) + F_{1k} K_{j,tt}(\tau) + F_{2k} K_j(\tau) = \Pi_j(\tau). \quad /24/$$

Рівняння /23/ має більш загальний вигляд, ніж рівняння нульового наближення, яке відповідає розв'язку лінійної задачі. Його можливо розглядати як один із варіантів статистичної лінеаризації рівняння /22/.

Для знаходження кореляційної функції із рівняння /23/ використовується метод спектральних зображень /співвідношення Вінера-Хінчина/:

$$K_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad q_{\nu_k}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_k(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad /25/$$

$$G(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau; \quad Q_k(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_{\nu_k}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Врахування /25/ дає змогу встановити зв'язок між спектральними щільностями в вигляді

$$G(i\omega) = Q_k(i\omega) \cdot (\omega^4 - F_{1k}\omega^2 + F_{2k})^{-1}$$

і одержати кореляційну функцію

$$K_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_k(i\omega) e^{i\omega\tau} (\omega^4 - F_{1k}\omega^2 + F_{2k})^{-1} d\omega. \quad /26/$$

Для випадку "білого шуму", коли $q_{\nu_k}(\tau) = S\delta(\tau)$, $Q_k(i\omega) = S = \text{const}$ із /26/ виходить, що

$$K_0(\tau) = \frac{s \cdot e^{-\varepsilon|\tau|}}{8\pi\varepsilon(\omega_0^2 + \tilde{\omega}^2)} (\cos \omega_\varepsilon \tau + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon |\tau|); \quad /27/$$

$$G_0(i\omega) = \frac{s}{(\omega^2 - \omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2},$$

а параметр дисперсії може бути визначений із кубічного рівняння

$$K(0) = s \left\{ 8\pi\varepsilon [\omega_0^2 + 3K(0)M^{-1}(F_2 + 5F_3 K(0))] \right\}^{-1}.$$

Як доповнення до характеристик випадкового процесу наведені вирази середніх кругових частот по нулям, екстремумам і складності структури процесу.

На рис.6 в безрозмірних величинах показано якісний характер зміни величини спектральної щільності в частотній області до її значення $G_0(0)$. Криві 1 відповідають випадку $\varepsilon_{(1)}=0$, а 2,3 - випадку $\varepsilon_{(3)} > \varepsilon_{(2)}$. Криві з максимумом при $(\omega/\omega_0)^2=1$ відповідають розв'язку лінійно-пружної задачі, а з максимумом при

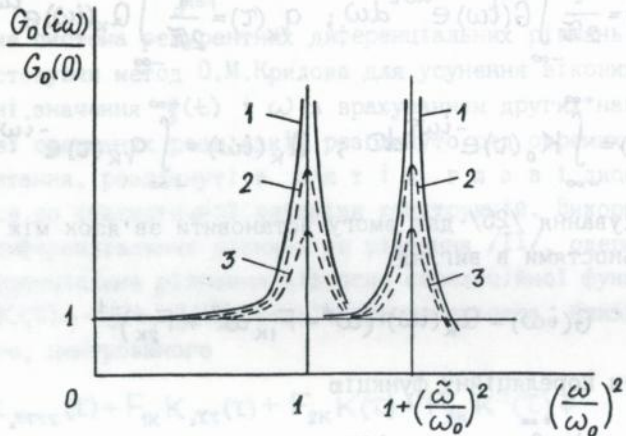


Рис.6

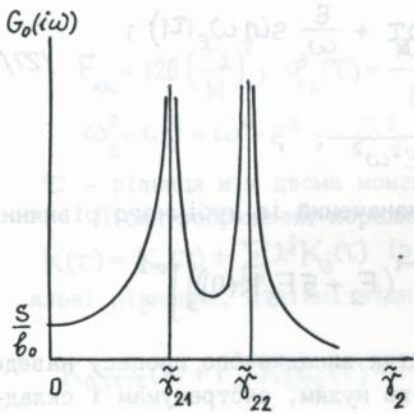


Рис.7

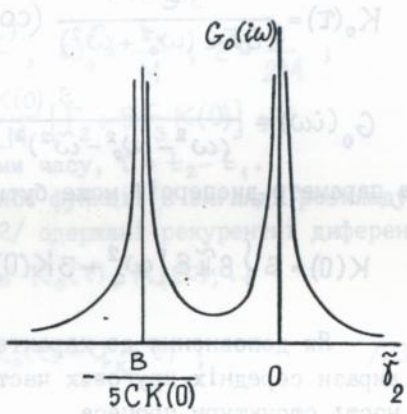


Рис.8

$(\omega/\omega_0)^2 = 1 + (\tilde{\omega}/\omega_0)^2$ - нелінійно-пружної.

Зображуючи спектральну щільність через параметр нелінійної пружності $\tilde{\gamma}_2$ у вигляді

$$G_0(i\omega) = \frac{S}{\sum_{j=0}^4 b_j \tilde{\gamma}_2^j},$$

вивчено поведінку оболонки при $\omega = \text{const}$ в залежності від параметру $\tilde{\gamma}_2$. На рис.7 показано змінювання спектральної щільності для випадку додатних коренів $\tilde{\gamma}_{2\dots}$, а на рис.8 зображені результати коли $\omega = \omega_0$, $\varepsilon = 0$.

В новій постановці розглянута задача параметричних коливань тришарової панелі при дії нормальних до контуру випадкових навантажень

$$N_x(\theta, t) = V_{1x} \sin \theta t + V_{2x} \cos \theta t; \quad N_y(\theta, t) = V_{1y} \sin \theta t + V_{2y} \cos \theta t,$$

де V_{1x} , V_{2x} , V_{1y} , V_{2y} - некорелюючі випадкові величини з дисперсіями d і d_1 і нульовими математичними сподіваннями.

Замість /22/ для цієї задачі записано рівняння

$$K_{,\tau\tau\tau\tau}(\tau) + F_{1k} K_{,\tau\tau}(\tau) + \left[F_{2k} - \frac{d d_0}{2M^2} \cos \theta \tau \right] K(\tau) + F_{3k} K^3(\tau) + F_{4k} K^5(\tau) = 0.$$

Його розв'язок шукається в вигляді $K(\tau) = C_1 \sin \frac{\theta \tau}{2} + C_2 \cos \frac{\theta \tau}{2}$, тоді із біквдратного рівняння відносно амплітуди кореляційної функції одержано

$$A = \left[F \pm \left[F^2 - \frac{8}{5} \cdot \frac{\omega_0^4}{F_{4k}} \left\{ \left[\left(\frac{\theta}{2\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right]^2 + \left(\frac{2\varepsilon}{\omega_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{\theta}{2\omega_0} \right)^2 \pm J_d \right\} \right]^{1/2} \right]^{1/2},$$

$$\text{де } d_0 = \alpha_m^4 + \beta_n^4 \frac{d_1}{d}; \quad F = -\frac{3}{5} \cdot \frac{F_{3k}}{F_{4k}}; \quad J_d = \frac{d d_0}{2M^2 \omega_0^4}.$$

Для лінійного закону стисливості середнього шару одержана система трьох нелінійних диференціальних рівнянь відносно кореляційних функцій $K_{\xi_1 \xi_1}(\tau)$, $K_{\xi_1 \xi_2}(\tau)$, $K_{\xi_2 \xi_2}(\tau)$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{j1} K_{\xi_1 \xi_1}(\tau) + \mathcal{L}_{j2} K_{\xi_1 \xi_2}(\tau) + \mathcal{L}_{j3} K_{\xi_2 \xi_2}(\tau) + (\alpha_j K_{\xi_1 \xi_1}(\tau) + \\ & + \beta_j K_{\xi_1 \xi_2}(\tau) + \gamma_j K_{\xi_2 \xi_2}(\tau))^3 = K_{q_j}(\tau), \end{aligned} \quad /28/$$

/j = 1, 2, 3/.

При II виведенні враховані умови симетрії і стаціонарності, після чого вона зображена рекурентними системами рівнянь по малому фізичному параметру. Знайдені спектральні щільності для лінеаризованої системи, а при однобічному навантаженні $q_2(t) = 0$ одержані вирази для кореляційних функцій, амплітудних і фазових спектрів щільності. Проаналізована зміна амплітудних і фазових спектрів щільності в частотній області і розглянута їх поведінка в залежності від параметра $\tilde{\gamma}_2$.

На підставі /10/ побудована система шести лінеаризованих диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{j11} K_{\xi_1 \xi_1}(\tau) + \mathcal{L}_{j22} K_{\xi_2 \xi_2}(\tau) + \mathcal{L}_{j33} K_{\xi_3 \xi_3}(\tau) + \\ & + \mathcal{L}_{j12} K_{\xi_1 \xi_2}(\tau) + \mathcal{L}_{j13} K_{\xi_1 \xi_3}(\tau) + \mathcal{L}_{j23} K_{\xi_2 \xi_3}(\tau) = K_{q_j}(\tau), \end{aligned} \quad /29/$$

/j = 1, 2, ..., 6/.

В /29/ при j = 3, 5, 6: $K_{q_j}(\tau) = 0$. Розв'язок шукається в вигляді інтегралів Фур'є

$$K_{\xi_k \xi_l}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\xi_k \xi_l}(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega;$$

$$K_{q_j}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_j(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

що дає $\sum_{kl} \nu_{jkl} G_{\xi_k \xi_l} = Q_j$. При $q_2(t) = 0$ можна записати, що

$$G_{\xi_k \xi_l} = Q_1 \frac{\Phi_{1kl}(\omega) + i\Phi_{2kl}(\omega)}{F_{1kl}(\omega) + iF_{2kl}(\omega)},$$

звідки одержані вирази для амплітудних і фазових спектрів щільностей.

У висновках коротко сформульовані основні результати наукового і прикладного характеру, які одержані в дисертації. Вони полягають у наступному:

1) побудовані нові, узагальнюючі ряд неklasичних, математичні моделі деформування тришарових пологих оболонок на основі варіаційних принципів механіки, експериментально обґрунтованих законів деформування ортотропних і нелінійно-пружних ізотропних матеріалів і відповідних їм кінематико-деформаційних співвідношень;

2) одержані варіаційне і системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно деформацій і переміщень відповідно, в яких для зовнішніх ортотропних шарів враховується податливість на поперечний зсув, а для нелінійно-пружного матеріалу середнього шару враховується поперечна стисливість;

3) для вільно опертих тришарових оболонок одержані системи нелінійних диференціальних рівнянь в амплітудах переміщень і відносно кореляційних функцій /при дії випадкових стаціонарних навантажень/;

4) одержані аналітичні розв'язки нелінійних задач динаміки тришарових оболонок і пластин при імпульсних, вібраційних і ударних навантаженнях;

5) для нелінійно-пружних тришарових оболонок розвинуто теоретико-експериментальний метод аналітичного дослідження стійкості при імпульсних стискуючих навантаженнях; встановлена залежність критичних навантажень від відношень товщин шарів і радіуса кривини оболонки, впливу на критичний час втрати стійкості оболонки і хвильові числа темпу навантаження, нелінійно-пружних параметрів матеріала;

6) вивчений процес сбіжності методу малого параметру для переміщень і критичних навантажень в задачі статичної стійкості нелінійно-пружних тришарових пластин;

7) досліджена поведінка амплітудно-частотних залежностей усталених параметричних коливань тришарових оболонок з врахуванням в рівнянні типу Дуффінга відновлюючої сили вищого наближення /доданок п'ятого степеня/; вивчено вплив кривини оболонки, коефіцієнта збудження і товщин шарів на амплітуди усталених коливань в головній області динамічної нестійкості;

8) вивчена динаміка пружнопластичного удару кулею по поверхні тришарової пластини і визначені залежності контактних сил, змішень кулі, прогинів, тривалості співудару від механіко-геометричних і нелінійно-пружних параметрів пластини, швидкості співудару і початкових умов, дана оцінка сбіжності метода малого параметру;

9) одержані розв'язки стаціонарних задач в вигляді кореляційних і спектральних функцій і проведений їх аналіз в частотній області, яка характеризує поведінку тришарових оболонок при поперечних і вібраційних параметричних випадкових навантаженнях; визначені амплітудні і фазові спектральні щільності для моделей стану, враховуючих поперечну стисливість заповнювача по квадратичному і лінійному законам або нехтуючих нею;

10) при розв'язанні перелічених класів задач виявлені нові механічні ефекти, які обумовлені врахуванням впливу нелінійно-пружних факторів на інтегральні характеристики динамічних процесів, зокрема із аналізу наведеного графічного матеріала виходить, що:

а) врахування нелінійно-пружних властивостей в задачі на поперечний удар привело до зменшення максимального значення контактної сили на 11%, при цьому на результати розв'язку лінійної і нелінійно-пружної задач суттєвий вплив мали початкові умови і демпфування;

б) врахування вишого наближення в відновлюючій силі рівняння типу Дуффінга привело при $F_2 F_3 < 0$ до якісно нових результатів, які виражаються в явшій перекиданні амплітудно-частотних залежностей в головній області динамічної нестійкості;

в) вплив врахування нелінійної пружності на величину критичної сили втрати стійкості при наростаючих стискуючих силах приводить до зменшення $N_{кр}$ на 30%-35% при темпі навантаження $N_1 = 10^5 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ і на 7%-12% при $N_1 = 10^6 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, при подальшому збільшенню темпу вплив нелінійно-пружних властивостей на величину $N_{кр}$ зменшується;

г) врахування нелінійно-пружних факторів приводить до зсування резонансних частот коливань оболонки при випадковому навантаженні типу "білий шум".

Таким чином, виконані в дисертаційній роботі дослідження, сформульовані наукові положення і одержані результати дозволяють кваліфікувати їх сукупність як теоретичне узагальнення і вирішення крупної наукової проблеми в новому перспективному напрямку не-

класичної механіки оболонки.

Основний зміст дисертації опубліковано в наступних роботах автора:

1. Тамуров Ю.Н. Динамическая устойчивость нелинейно-упругих трехслойных пластин несимметричного строения//Алгоритмы решения нелинейных задач и обработка данных.-Днепропетровск: ДГУ, 1984.-С.131-135.

2. Тамуров Ю.Н. Поверхностное давление и сжатие трехслойной цилиндрической панели с нелинейно-упругим наполнителем//Методы решения нелинейных задач и обработки данных.-Днепропетровск: ДГУ, 1985.-С.174-179.

3. Тамуров Ю.Н. Динамическая устойчивость трехслойной цилиндрической панели с нелинейно-упругим наполнителем//Актуальные проблемы механики оболочек: Тез. докл. II Всесоюз. совещания-семинара молодых ученых.-Казань: КИСИ, 1985.-С.211.

4. Тамуров Ю.Н. Основные уравнения устойчивости трехслойных пластин с ортотропными и нелинейно-упругими свойствами материалов и определение критических нагрузок при всестороннем сжатии прямоугольных пластин.-Киев, 1986.-34 с.-Деп. в УкрНИИТИ 10.07.86, № 1651.

5. Тамуров Ю.Н. Устойчивость трехслойных оболочек с малой сдвиговой жесткостью и нелинейно-упругими свойствами материалов// Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: Тез. докл. II Всесоюз. симп.-Калинин, 1986.-С.200-201.

6. Тамуров Ю.Н. Динамическая устойчивость трехслойных нелинейно-упругих пластин и некоторые упрощения аппроксимирующих функций и решений//Применение композиционных материалов при проектировании деталей машин.-М.: ВЗПИ, 1986.-С.40-46.

7. Тамуров Ю.Н. Поперечный удар шаром по кусочно-однородной нелинейно-упругой пластинке//II Всесоюз. конф. по механике неоднородных структур: Тез. докл.-Львов, 1987, т.2.-С.267-268.

8. Тамуров Ю.Н. Упругий удар по трехслойной пластинке с малой сдвиговой жесткостью и нелинейно-упругими свойствами материалов// XIV Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек: Тр. конф.-Кутаиси, 1987, т. II.-С.465-470.

9. Тамуров Ю.Н. Устойчивость слоистой физически нелинейной оболочки на нелинейно-упругом основании// VI Всесоюз. конф. по композиционным материалам: Тез. докл.-Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1987.-С.216.

10. Тамуров Ю.Н. Упругий удар по трехслойной панели на нелинейно-упругом основании//Материалоемкость и расчеты современных деталей машин.-М.: ВЗПИ, 1988.-С. 13-21.

11. Тамуров Ю.Н. Действие подвижной нагрузки на физически нелинейную трехслойную панель//Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов: Тез. докл. Ш Всесоюз. конф.-Казань: КАИ, 1988.-С. 141.

12. Тамуров Ю.Н. Влияние сдвиговой жесткости материала на амплитуды колебаний нелинейно-упругой пластинки//Повышение надежности и долговечности машин и сооружений: Тез. докл. Ш научно-технич. конф.-Запорожье, 1988, ч. 2.-С. 84-85.

13. Тамуров Ю.Н. Некоторые вопросы динамики тонкостенных конструкций//НТП в машиностроении. Вып. 3: Проблемы машиностроения и долговечности в машиностроении.-М: МЦТИ, 1988.-С. 141-150.

14. Тамуров Ю.Н. Динамическая устойчивость трехслойной физически нелинейной пластинки в поперечном магнитном поле//Актуальные проблемы механики оболочек: Тез. докл. Ш Всесоюз. совещания-семинара молодых ученых.-Казань: КИСИ, 1988.-С. 212.

15. Тамуров Ю.Н. Динамика трехслойных оболочек и пластин с физически нелинейным наполнителем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.-Ереван, 1988.-20 с.

16. Тамуров Ю.Н. Учет обжатия физически нелинейного наполнителя в теории трехслойных оболочек//Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов: Тез. докл. Ш Всесоюз. конф.-Запорожье, 1989.-С. 202-204.

17. Тамуров Ю.Н. Динамика трехслойных оболочек с малой сдвиговой жесткостью внешних слоев и нелинейно-упругим наполнителем//Вопросы проектирования и опыт разработки модулей гибких производственных систем.-Днепропетровск: ДГУ, 1988.-С. 45-51.

18. Тамуров Ю.Н. Параметрические колебания трехслойных оболочек с учетом обжатия нелинейно-упругого наполнителя//XV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин: Тр. конф.-Казань: КГУ, 1990, т. I.-С. 673-678.

19. Тамуров Ю.Н. Вариант обобщенной теории трехслойных полых оболочек с учетом обжатия физически нелинейного наполнителя//Прикл. механика.-1990.-26, № 12.-С. 39-45.

20. Тамуров Ю.Н. Колебательные процессы в трехслойной оболочке при неравномерном обжатии физически нелинейного наполнителя//Прикл. механика.-1991.-27, № 7.-С. 82-88.

21. Тамуров Ю.Н. Упругопластический удар шаром по трехслойной пластинке с физически нелинейным наполнителем//Изв.АН СССР, МТТ, -1991.-№ 3.-С.127-133.

22. Тамуров Ю.Н. Динамика трехслойных оболочек с включениями в нелинейно-упругом сжимаемом материале наполнителя//Изв. АН СССР, МТТ.-1991.-№ 5.-С.148-155.

23. Тамуров Ю.Н. Случайные колебания трехслойных оболочек с нелинейно-упругим наполнителем//Технологические проблемы прочности несущих конструкций: Тр.конф.-Запорожье, 1991.-С.229-235.

AB 28.757

AB 28.757

463769

AB 28.738

AB 28.738

300 страниц * 1043

с 1973 г. по 100 экз.

Edw 04